

Dynamika relatywistyczna

Wstęp do Fizyki I (B+C)

Wykład XI:

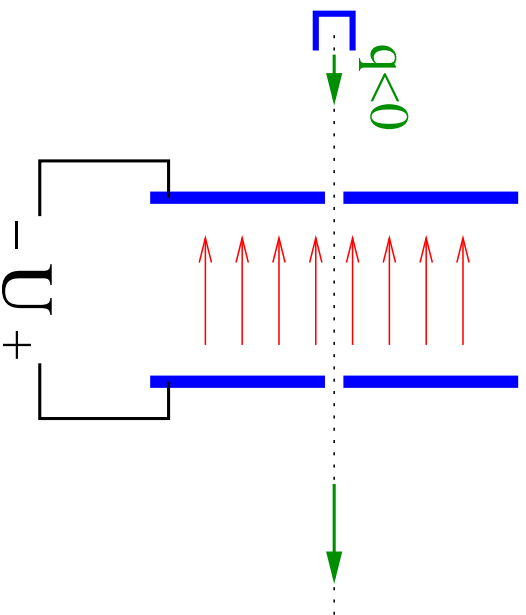
- Relatywistyczna definicja pędu
- Akceleratory cząstek
- Nowe teorie (MOND)

Pęd relatywistyczny

Granice podejścia klasycznego

Elektron w kondensatorze

(najprostszy 'akcelerator' cząstek):



Klasycznie:

$$m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{E}$$

Potrąfimy wytwarzać pola elektryczne

$$E \sim 10 \text{ MV}/m = 10^7 \text{ V}/m$$

Dla elektronu:

$$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 0.5 \text{ MeV}/c^2$$

$$|q_e| \equiv 1 e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\Rightarrow a \approx 20 \text{ m}^{-1} \cdot c^2 \approx 2 \cdot 10^{18} \text{ m}/s^2$$

W podejściu klasycznym elektron powinien osiągnąć prędkość światła już po przebyciu

$$\Delta x \approx 2.5 \text{ cm} !!!$$

\Rightarrow konieczność modyfikacji praw ruchu

Pęd relatywistyczny

Uogólnienie praw ruchu

W przypadku klasycznym:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad m=const \quad = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Otrzymujemy równoważną postać

II prawa Newtona ($\vec{p} = m\vec{v}$ - pęd cząstki):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Aby zachować prawo ruchu w tej postaci

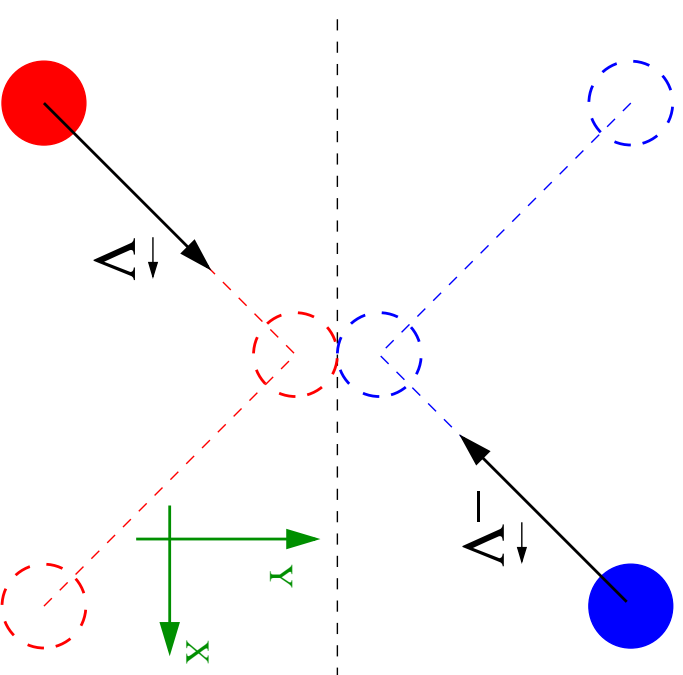
dla $v \sim c \Rightarrow$ modyfikacja definicji pędu

$$\vec{p} = f(v) \cdot m\vec{v}$$

$f(v)$ - poprawka relatywistyczna

Doświadczenie myślowe

Zderzenie dwóch kul o jednakowej masie m :

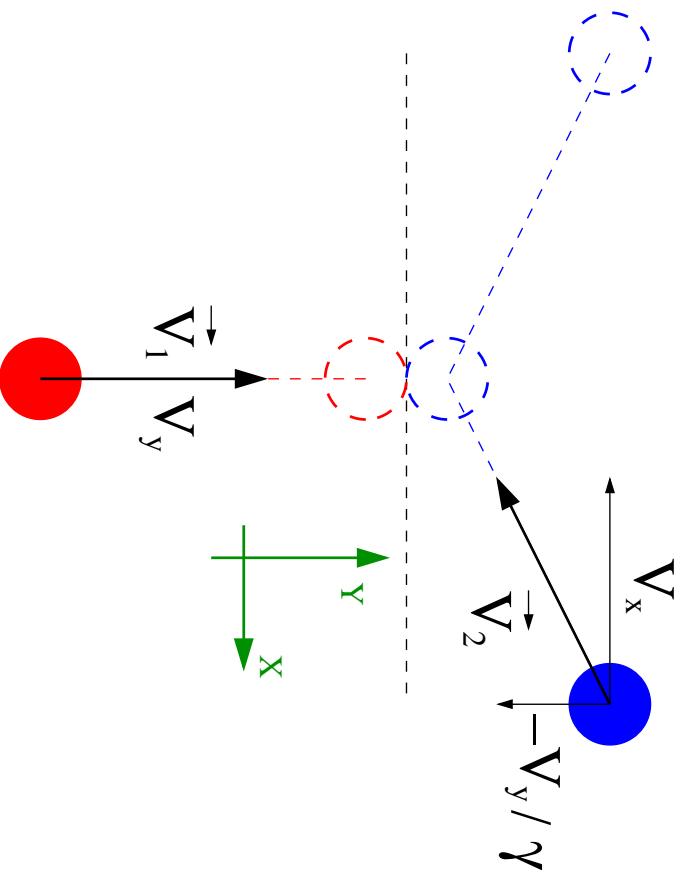


Pędy obu kul są równe co do wartości
ale przeciwnie skierowane

Pęd relatywistyczny

Doświadczenie myślowe

Przejdźmy do układu w którym jedna z kul porusza się tylko wzdłuż osi Y:



Dwie kule \Rightarrow dwa układy odniesienia

Wybór jednej z kul łamie symetrię zagadnienia!

Prędkość wzdłuż osi Y **drugiej** kuli jest zmniejszona na skutek dylatacji czasu:

$$v_{2,y} = \frac{V_y}{\gamma} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}$$

Ale pędy obu kul wzdłuż osi Y muszą pozostać równe! (aby nie zmienił się wynik doświadczenia)

$$m f(v_y) v_y = m f \left(\sqrt{v_x^2 + \frac{v_y^2}{\gamma^2}} \right) \frac{v_y}{\gamma}$$

Przechodząc do granicy $v_y \rightarrow 0$:

$$f(v_x) = \gamma \cdot f(0) = \gamma$$

chcemy zachować granicę klasyczna: $f(0) = 1$

Pęd relatywistyczny

Równanie ruchu

Dla przypadku ruchu relatywistycznego:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

gdzie: $\vec{p} = m \gamma \vec{v} = mc \gamma \vec{\beta}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

W przypadku ruchu jednowymiarowego:

$$F = \frac{d}{dt}(mc \gamma \beta) \\ = mc \gamma^3 \frac{d\beta}{dt}$$

⇒ przyspieszenie maleje jak γ^{-3} !

Rozwiązanie ruchu pod wpływem stałej siły elektrycznej $F = qE$:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{qE}{mc} (1 - \beta^2)^{3/2} \\ \Rightarrow \frac{d\beta}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \frac{qE}{mc} dt$$

Całkujemy podstawiając $\beta = \sin u$:

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{qE}{mc} \int dt \\ \Rightarrow \tan u = \frac{qE}{mc} \cdot t$$

przyjmując, że cząstka spoczywała w $t = 0$

Pęd relatywistyczny

Ruch pod wpływem stałej siły

Otrzymujemy rozwiązanie w postaci:

$$\beta(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + (at)^2}}$$

$$\text{gdzie: } \alpha = \frac{qE}{mc}$$

W naszym przykładzie (e^- w polu $10 \frac{MV}{m}$)

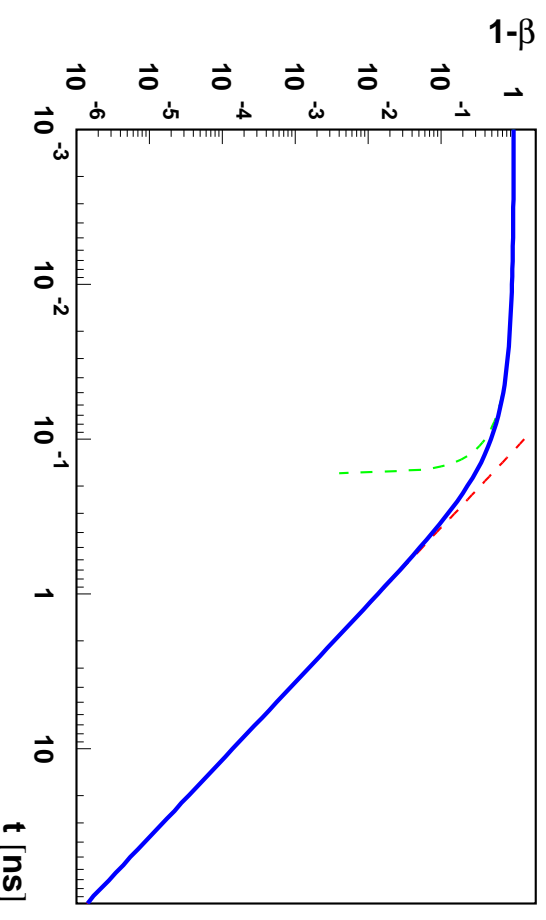
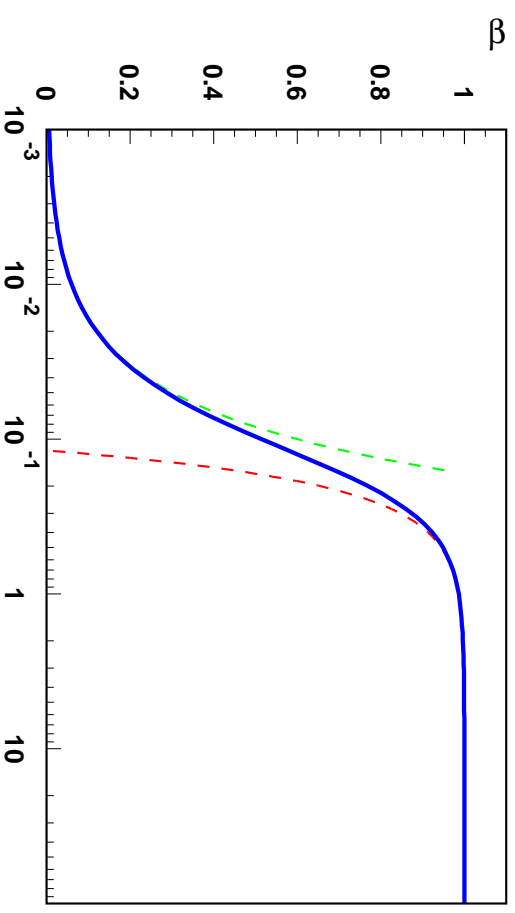
$$\alpha \sim 6 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}, \quad \alpha^{-1} \sim 0.17 \text{ ns}$$

W granicy $\alpha t \gg 1$:

$$1 - \beta(t) \approx \frac{1}{2\alpha^2 t^2}$$

nigdy nie osiągniemy $\beta = 1$

Ale: $p(t) = mc \alpha \cdot t$ - rośnie $\sim t$!



Pęd relatywistyczny

Ruch pod wpływem stałej siły

Rozwiązując dalej otrzymujemy:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c \alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}}$$

$$\Rightarrow x(t) = \int dx = \frac{c}{\alpha} \int \frac{\alpha t d(\alpha t)}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}}$$

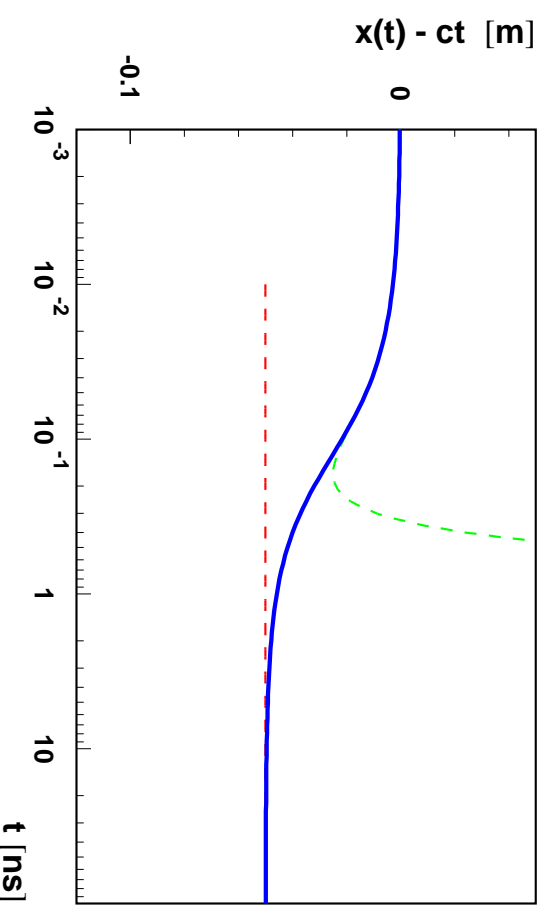
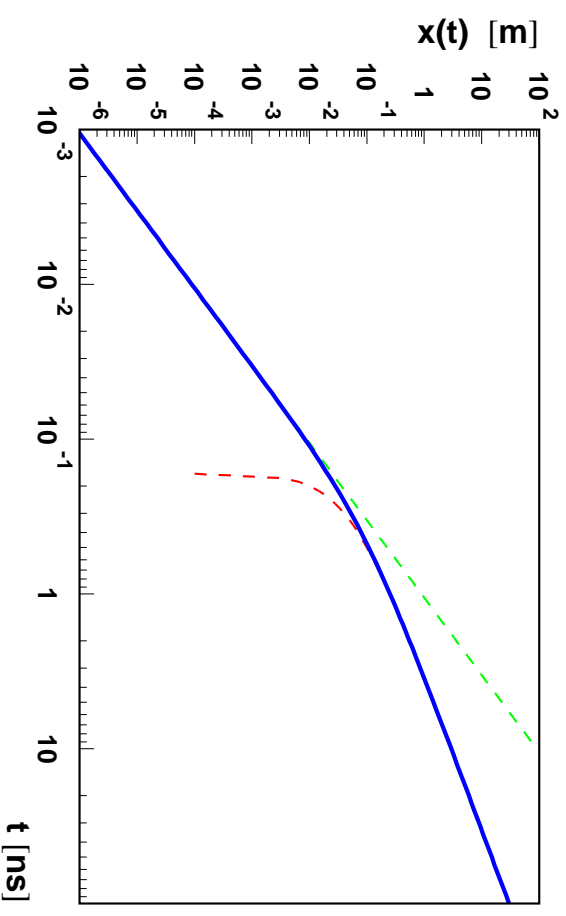
$$= \frac{c}{\alpha} \left(\sqrt{1 + (\alpha t)^2} - 1 \right)$$

W granicy $\alpha t \gg 1$:

$$x(t) \approx ct - \frac{c}{\alpha}$$

W naszym przykładzie:

światło wyprzedzi elektron tylko o 5 cm !!!



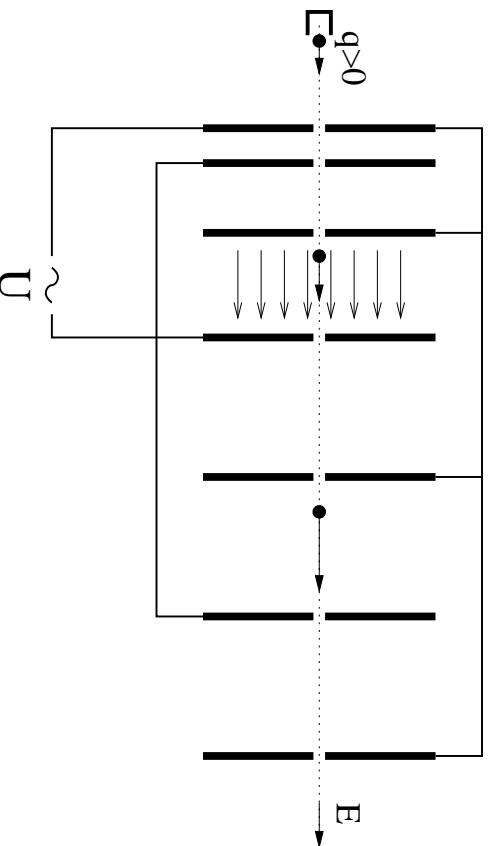
Akseleratory

Akselerator liniowy

Nie jesteśmy w stanie wytwarzać napięć statycznych większych niż ok. 10 MV.

Aby nadać czątkom **większe pędy** musimy przyspieszać je "na raty".

Cząstka przechodząca przez kolejne "kondensatory":



Przy odpowiednim dobraniu **długości** kolejnych elementów i **częstości** napięcia zasilającego, cząstka trafia zawsze na **pole przyspieszające**.

⇒ **zwielokrotnienie** uzyskiwanych pędów

Częstość jest zazwyczaj stała

⇒ długości kolejnych elementów rosną proporcjonalnie do prędkości cząstki.

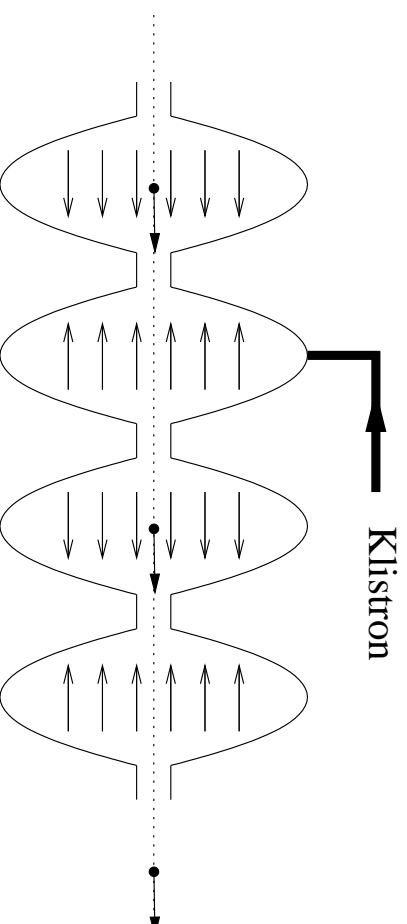
Dla $\beta \rightarrow 1$: $L \rightarrow \text{const}$

⇒ akselerator może składać się z wielu jednakowych elementów

Akseleratory

Wnęka rezonansowa

W praktyce do przyspieszania cząstek wykorzystujemy wnęki rezonansowe:



Wewnątrz wnęki wytwarzana jest stojąca fala elektromagnetyczna.

Częstości rzędu 1 GHz - mikrofale.

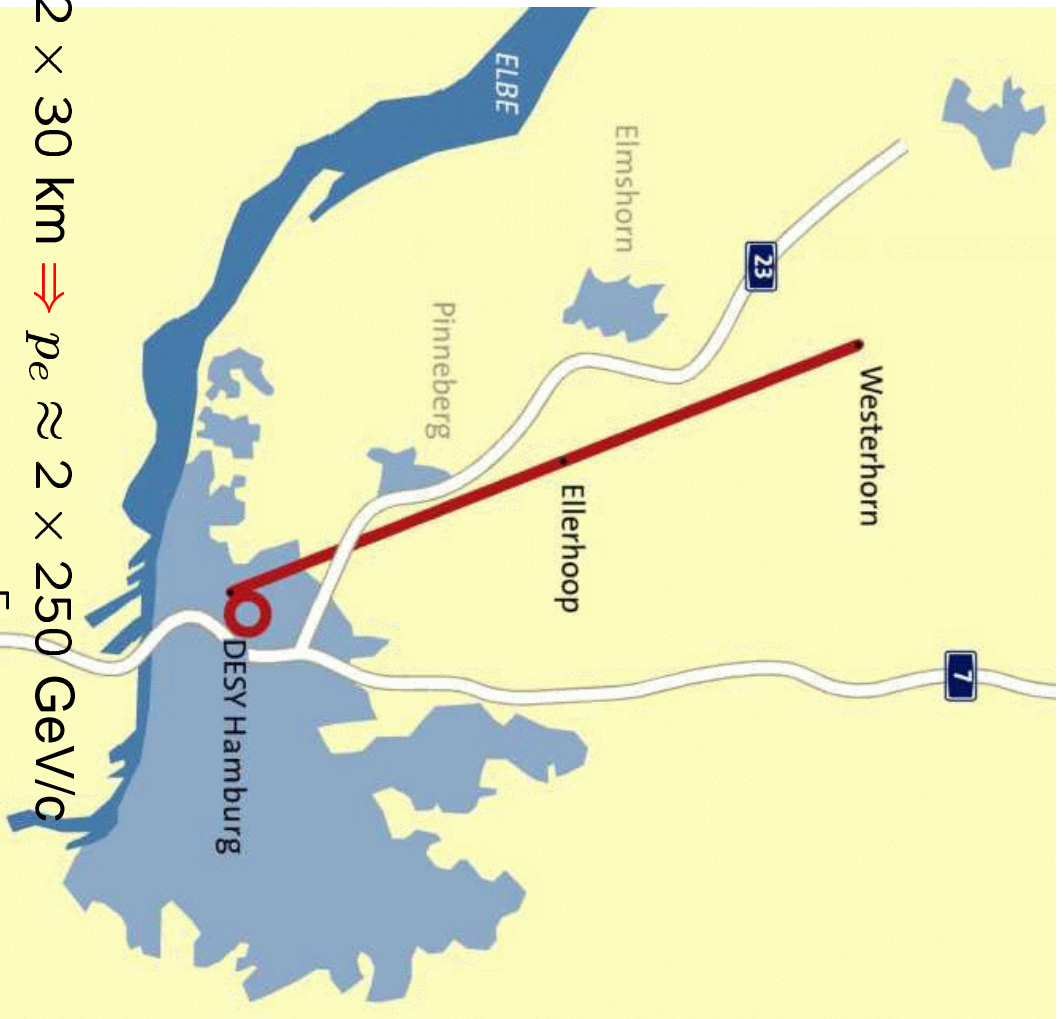
Wnęki rezonansowe pozwalają uzyskiwać natężenia pola rzędu 10 MV/m

⇒ dla uzyskania pędu 1 GeV/c ($\gamma \approx 2000$) potrzebny jest akselerator o długości $\sim 100\text{m}$

Tesla

Nowy projekt realizowany w ośrodku DESY w Hamburgu:

Westerhorn



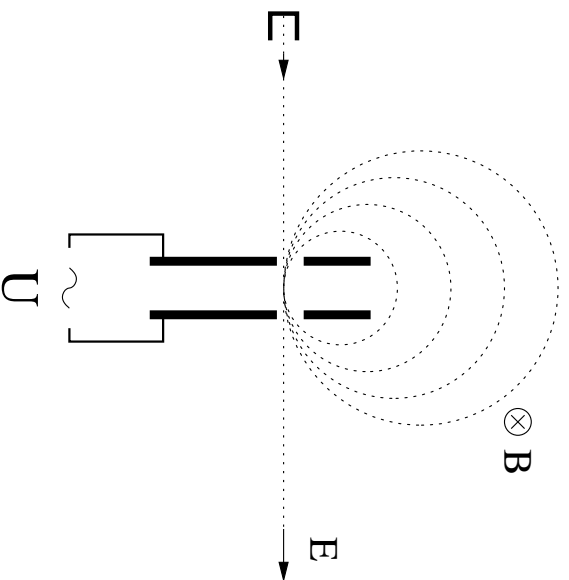
$L = 2 \times 30 \text{ km} \Rightarrow p_e \approx 2 \times 250 \text{ GeV}/c$

$\gamma \sim 5 \cdot 10^5$

Akcelerator

Akcelerator kołowy

Zamiast używać wielu wnęk można też wykorzystać pole magnetyczne do “zapętlenia” cząstki:

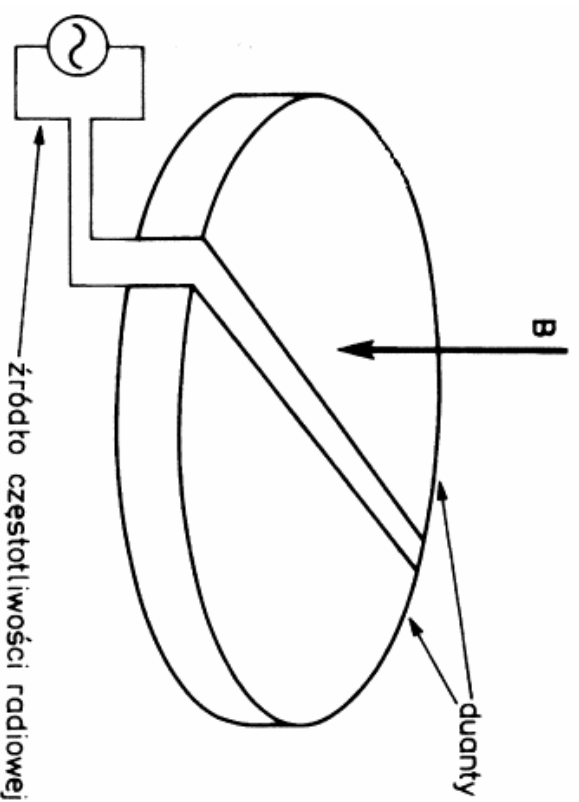


Cząstki przechodzą przez ten sam obszar przyspieszający wiele razy...

Cyklotron

Jeśli $v \ll c$ częstota cyklotronowa w jednorodnym polu magnetycznym

$$\omega = \frac{QBv}{p} = \text{const}$$

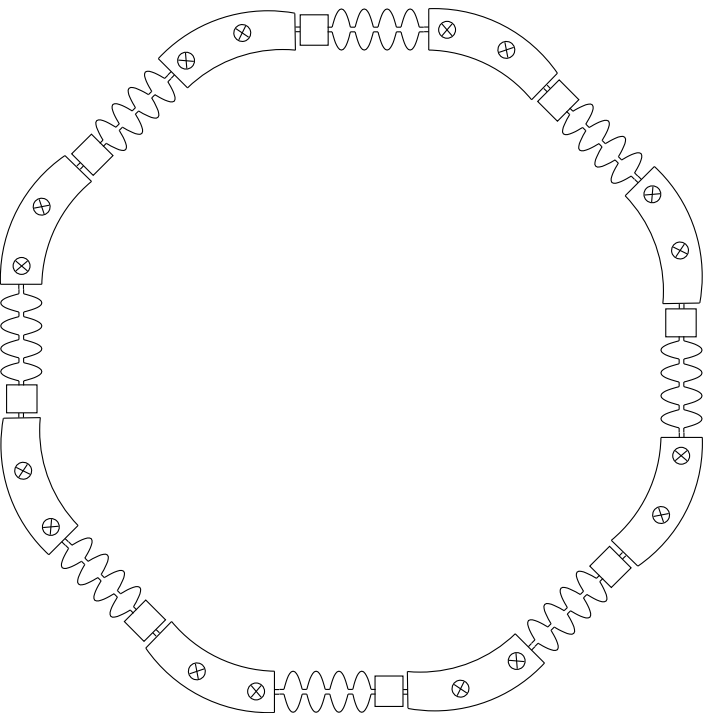


⇒ pierwszy akcelerator: E.O.Lawrence, 1932.

Akseleratory

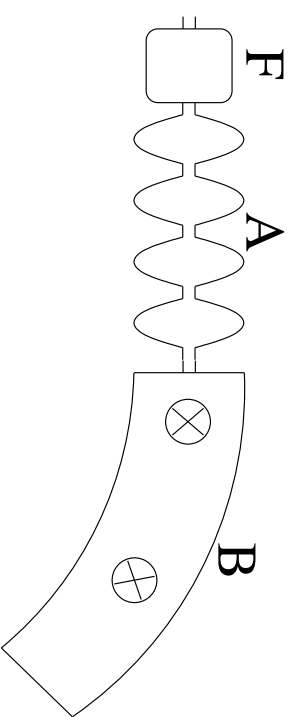
Akselerator kołowy

Wpółczesne akseleratory kołowe zbudowane są z wielu powtarzających się **segmentów**:



Każdy segment składa się z

- wnek przyspieszających (A)
- magnesów zakrzywiających (B)
- układów ogniskujących (F)



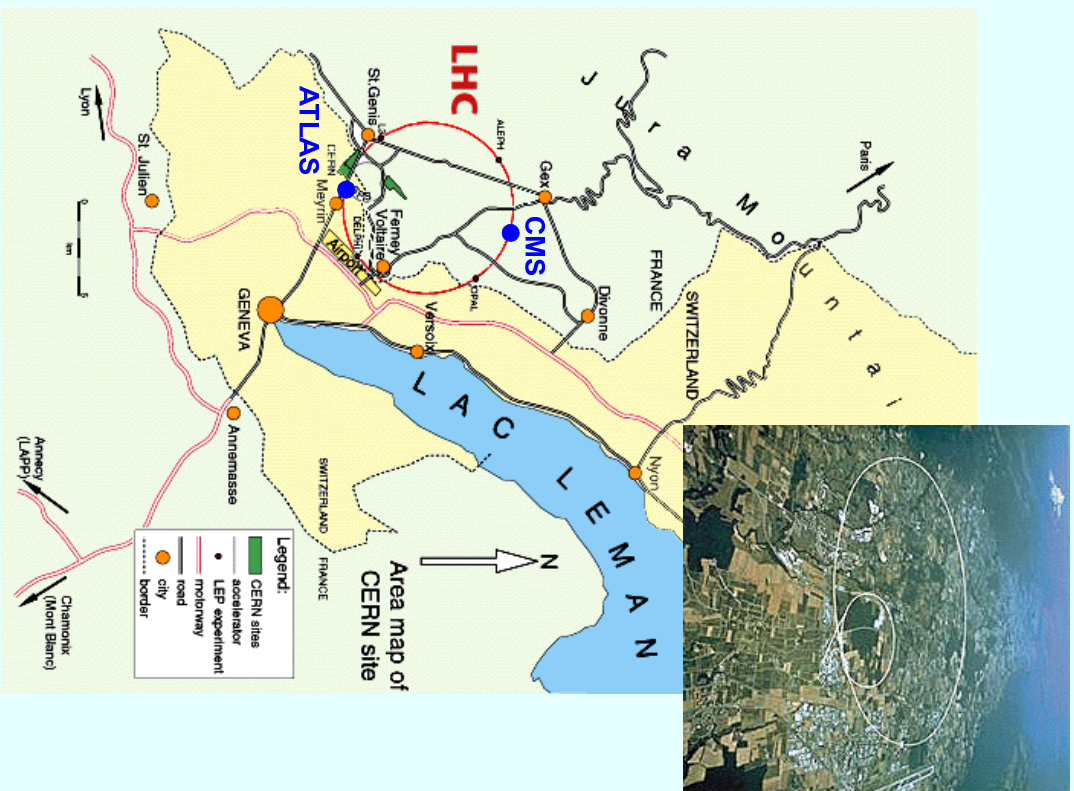
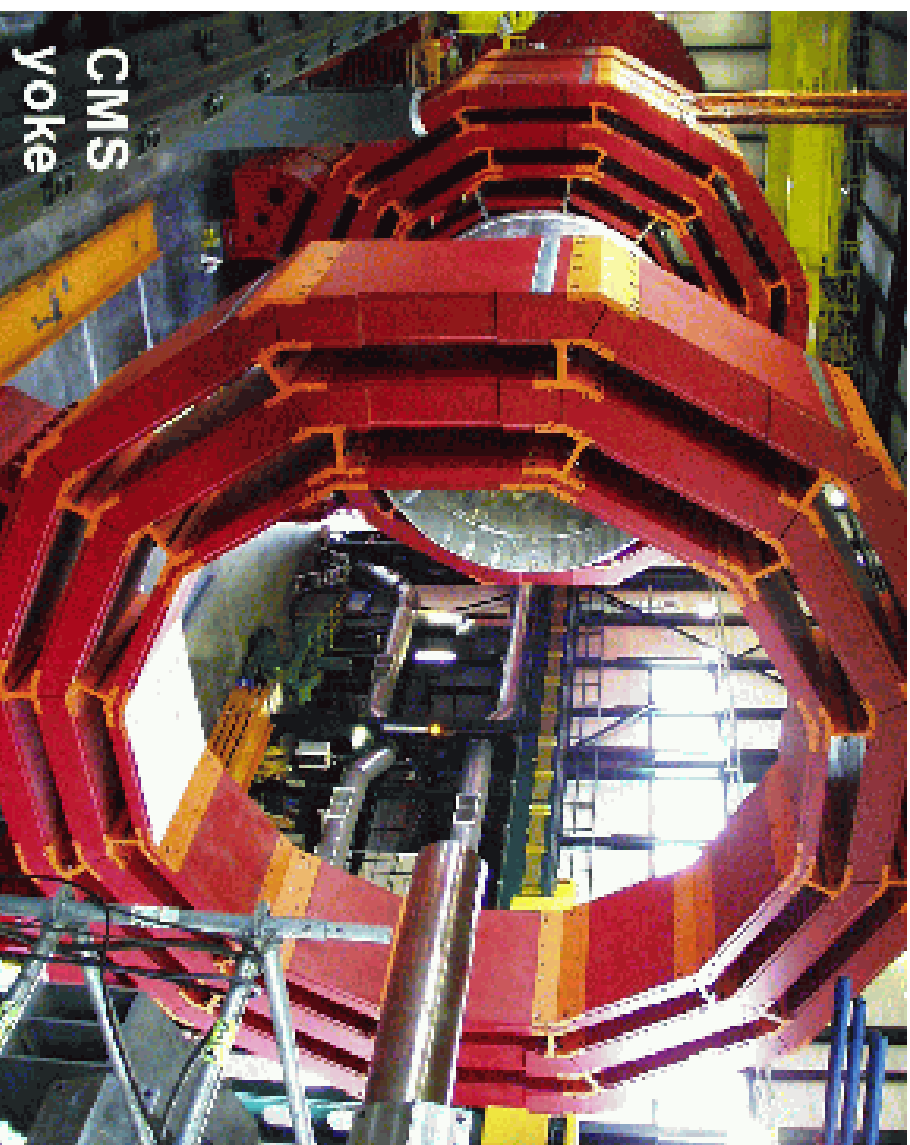
Największym zbudowanym akseleratorem był LEP w CERN pod Genewą (obwód ok. 27 km).

W tym samym tunelu budowany jest obecnie akselerator LHC.

LHC

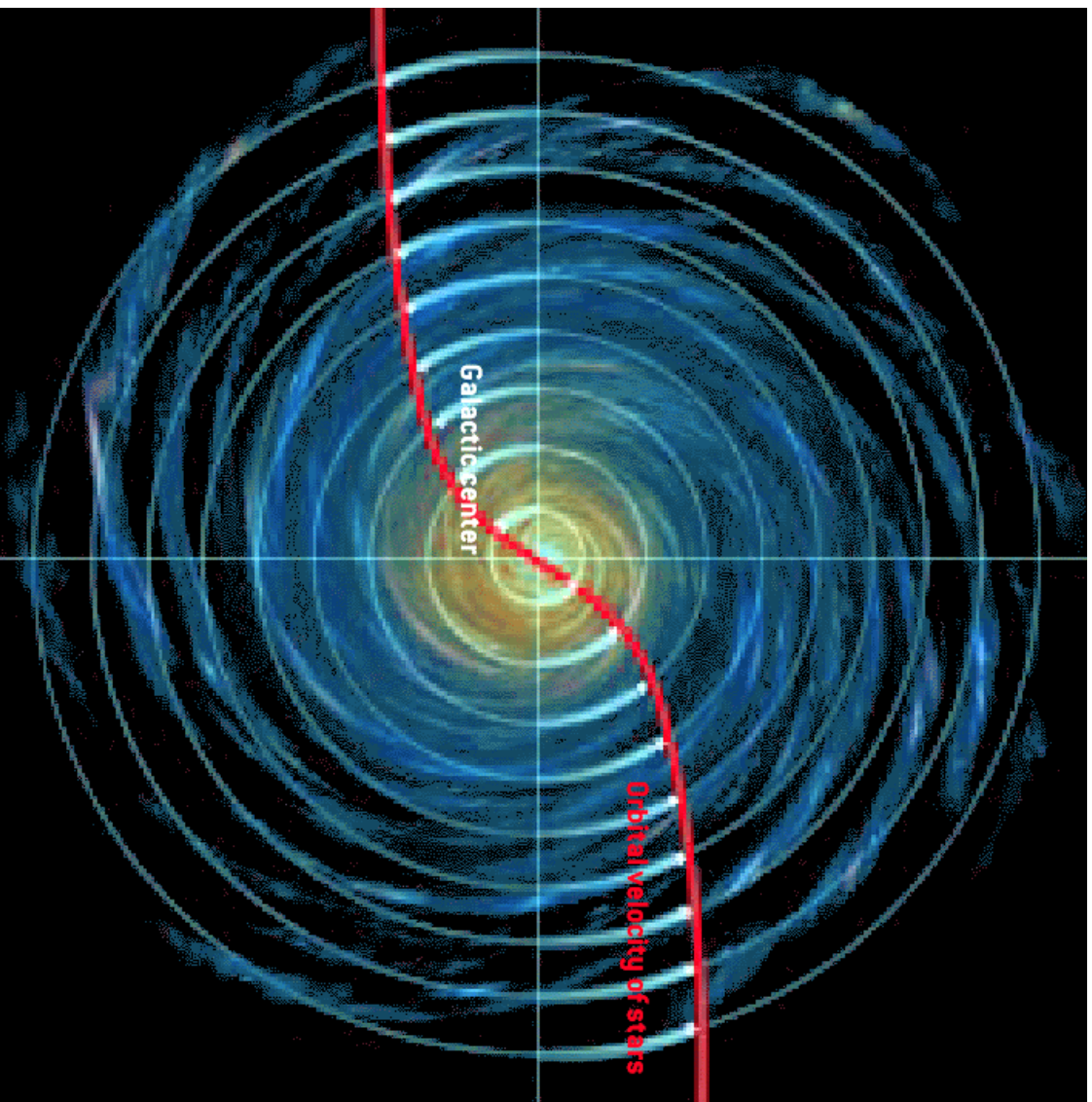
Budowa eksperymentu CMS w LHC

Przewidywane uruchomienie: 2007



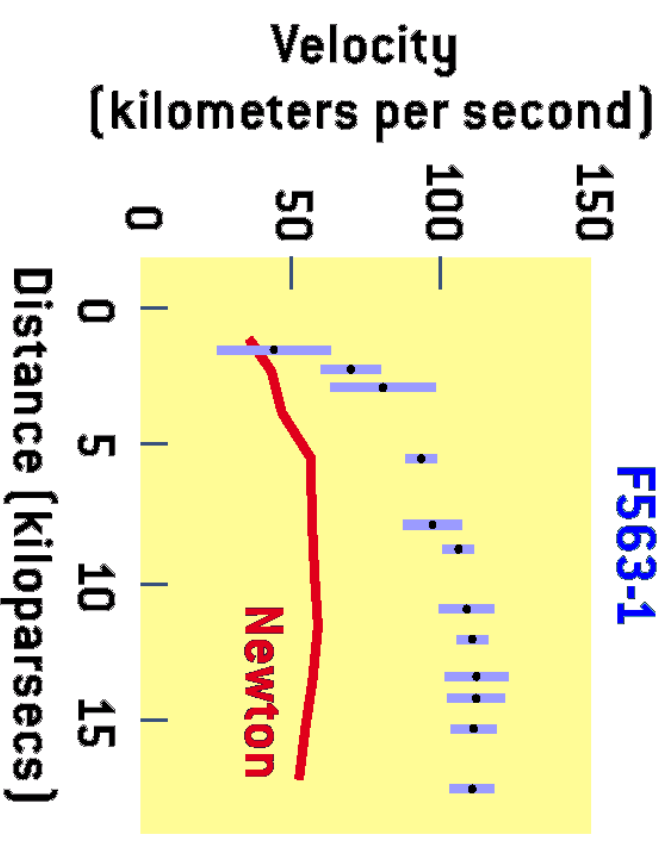
Nowe teorie

Brakująca materia ?



Znane nam prawa dynamiki nie tłumaczą rotacji galaktyk.

F563-1



Ramiona wirują szybciej niż oczekiwaliśmy z praw grawitacji i dynamiki

⇒ **ciemna materia** ?

Nowe teorie

Aby wytłumaczyć ruch galaktyk, a także ewolucję Wszechświata, przyjmujemy, że jest w nim dużo więcej materii niż widzimy (tj. materii świecącej: gwiazd).

⇒ “ciemna materia” (a może i “ciemna energia”?)

Ale możliwe jest też inne podejście:

MOND Modified Newtonian Dynamics

Modyfikujemy II Zasadę Dynamiki dla bardzo małych przyspieszeń:

$$\vec{F} = m \vec{a} \cdot f\left(\frac{a}{a_0}\right)$$

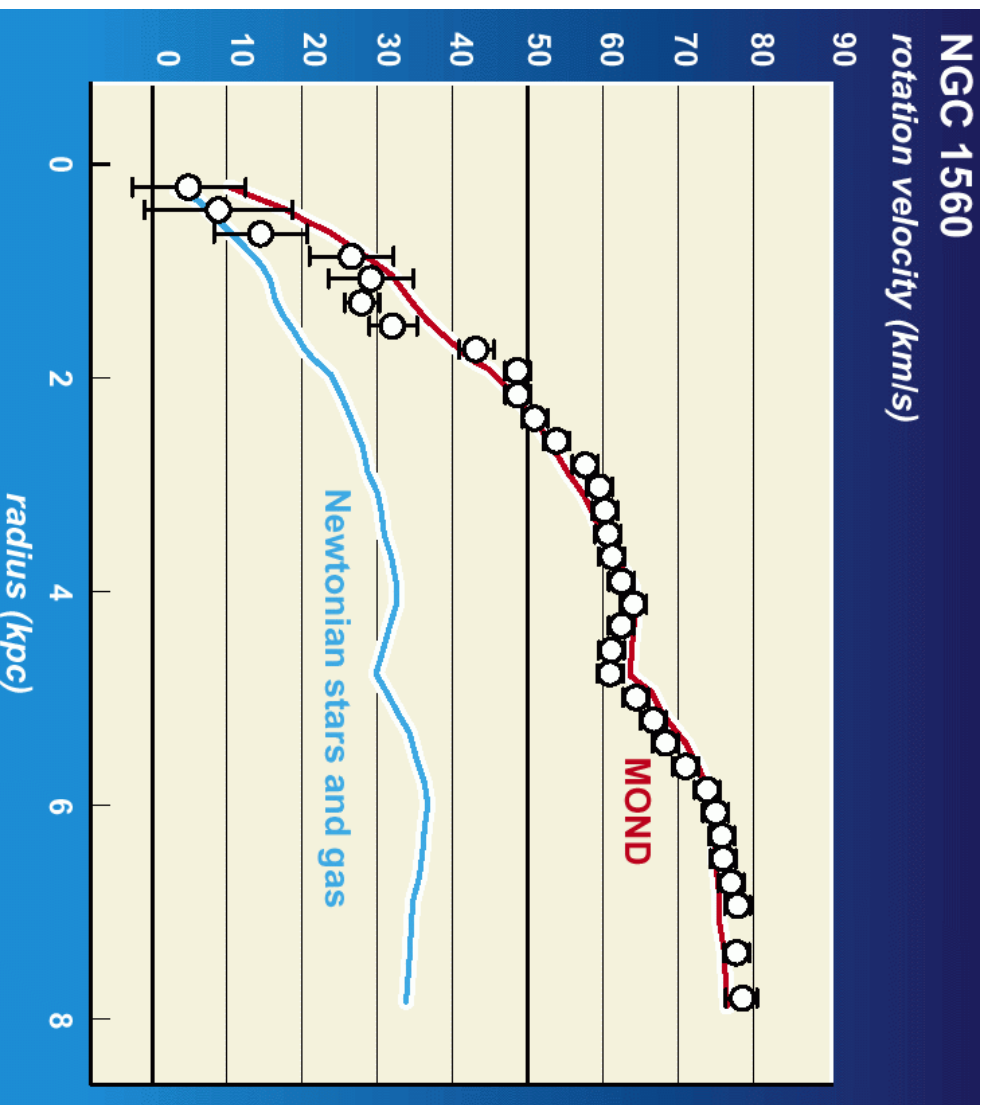
gdzie: $f\left(\frac{a}{a_0}\right) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{dla } a \gg a_0 \\ \frac{a}{a_0} & a \ll a_0 \end{cases}$

Aby wytłumaczyć rotację galaktyk “wystarczy” $a_0 \sim 10^{-10} m/s^2$

⇒ efekty niemierzalne na skalach mniejszych od rozmiarów galaktyk !!!

MOND

Rotacja galaktyk

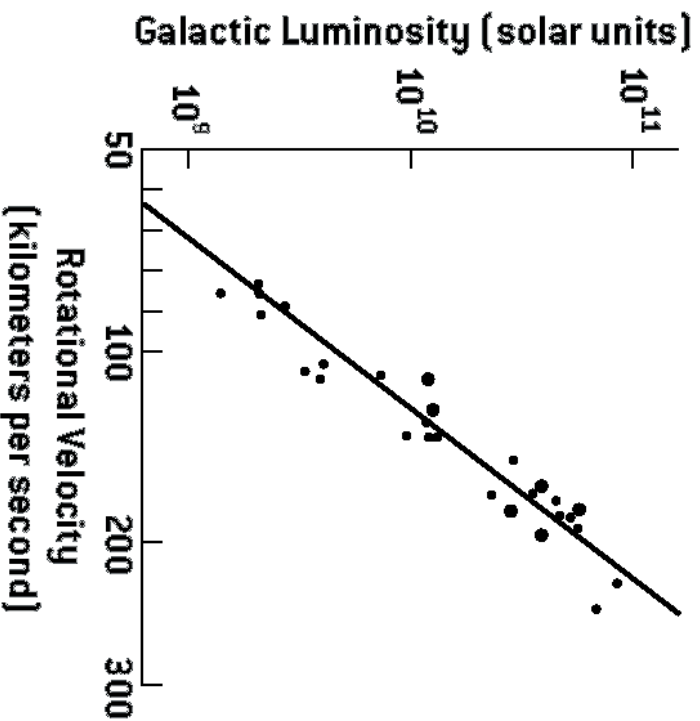


Model **MOND** bardzo dobrze opisuje rotacje wszystkich znanych galaktyk. (dopasowując a_0 + jeden wolny parametr dla każdej galaktyki !)

MOND

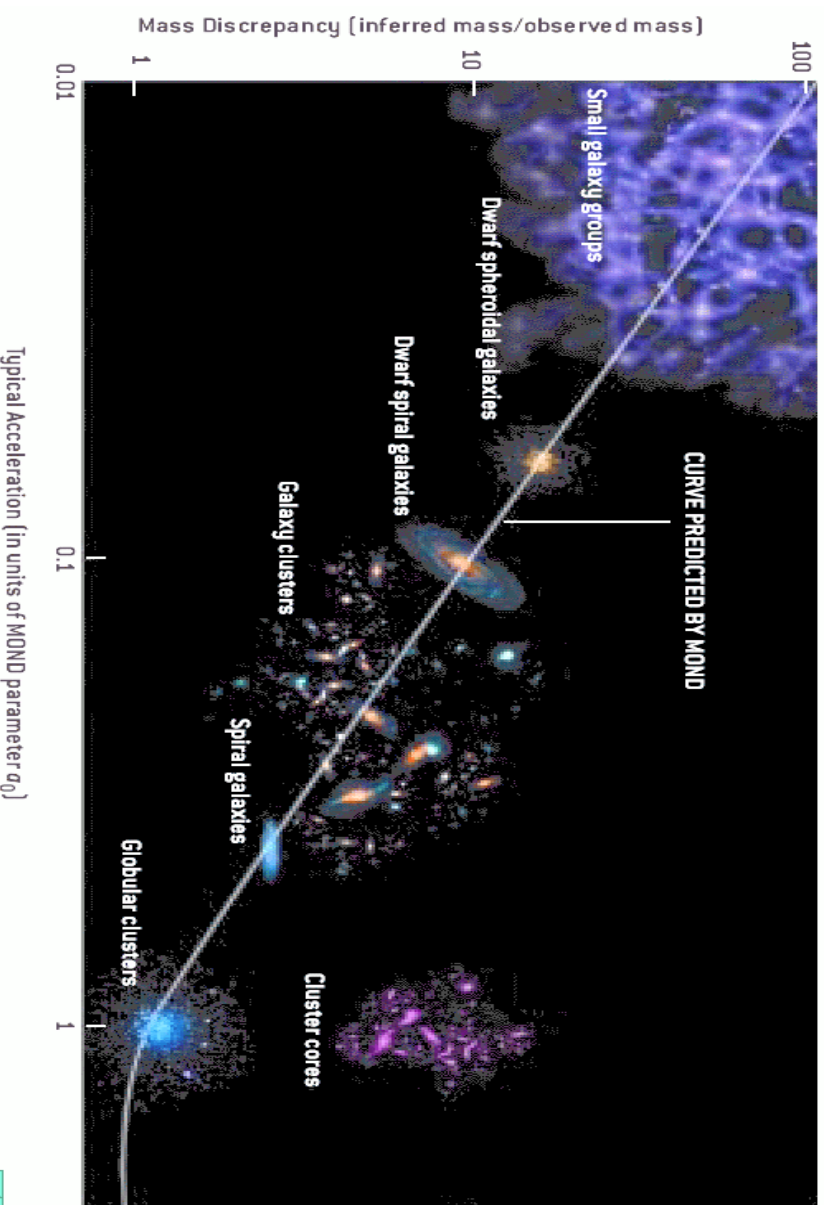
Jasność galaktyk

Tłumaczy też zależność jasności galaktyki i prędkości rotacji



Brakująca masa

Oraz różnicę między masami obiektów wyznaczanymi z obserwacji świecenia i ruchu

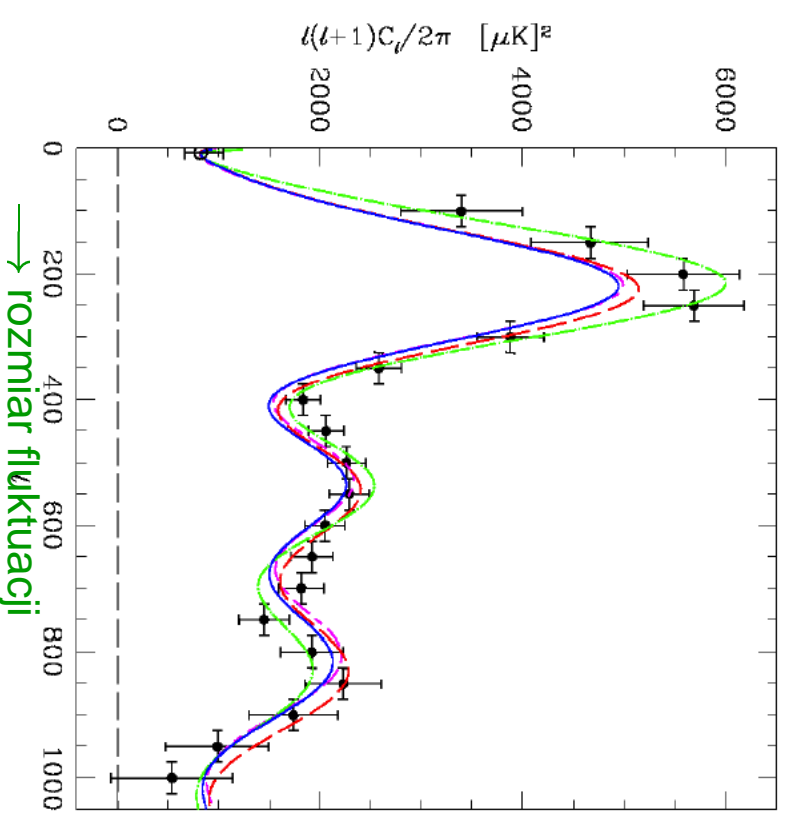
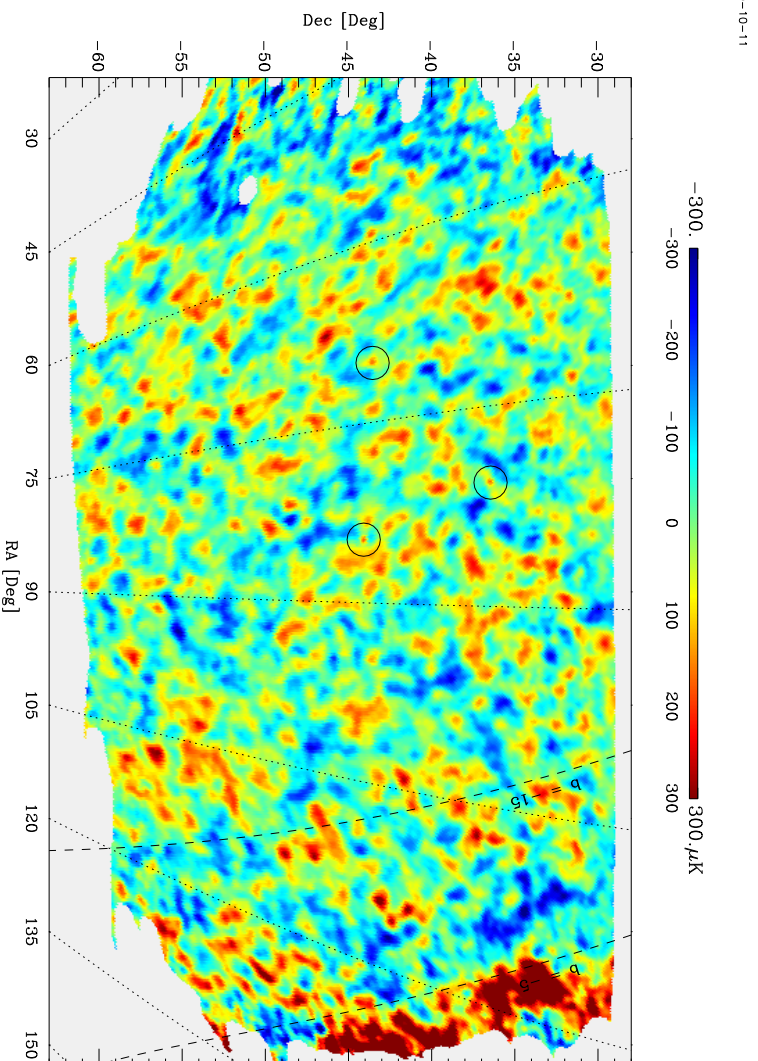


MOND

Promienowanie tła

Fluktuacje obserwowane w rozkładzie mikrotalowego promieniowania tła są “odbicciem” fluktuacji na wczesnym etapie ewolucji Wszechświata.

Wyniki eksperymentu BOOMERANG (2000) były spektakularnym dowodem na poprawność opisu uwzględniającego ciemną materię i ciemną energię



MOND

Promienowanie tła

MOND pozwala opisać fluktuacje bez konieczności wprowadzania

“ciemnych” elementów...

UWAGA !

Mimo sugestywnych wyników model MOND należy traktować jako hipotezę, która opisuje wybrane dane, ale wciąż nie została w pełni potwierdzona doświadczalnie.

Jest to raczej parametryzacja obserwowanych rozbieżności niż spójna teoria fizyczna.

Testowanie MOND może jednak otworzyć “nowe horyzonty” fizyki...

