

Zasada zachowania energii

Wstęp do Fizyki I (B+C)

Wykład XIII:

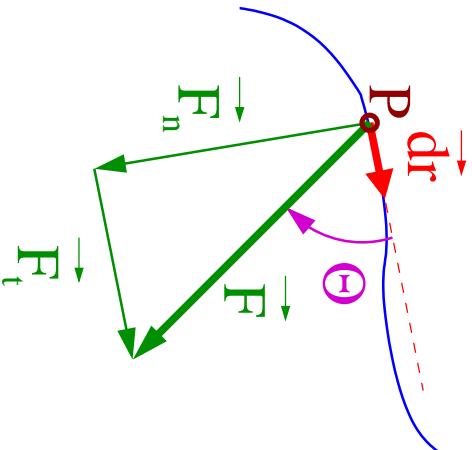
- Praca, siły zachowawcze i energia potencjalna
- Energia kinetyczna i zasada zachowania energii
- Zderzenia elastyczne
- Ogłoszenie

Praca i energia

Praca

Siła \vec{F} działa na punkt materialny P

Praca jaką wykonuje siła przy przesunięciu P o $d\vec{r}$

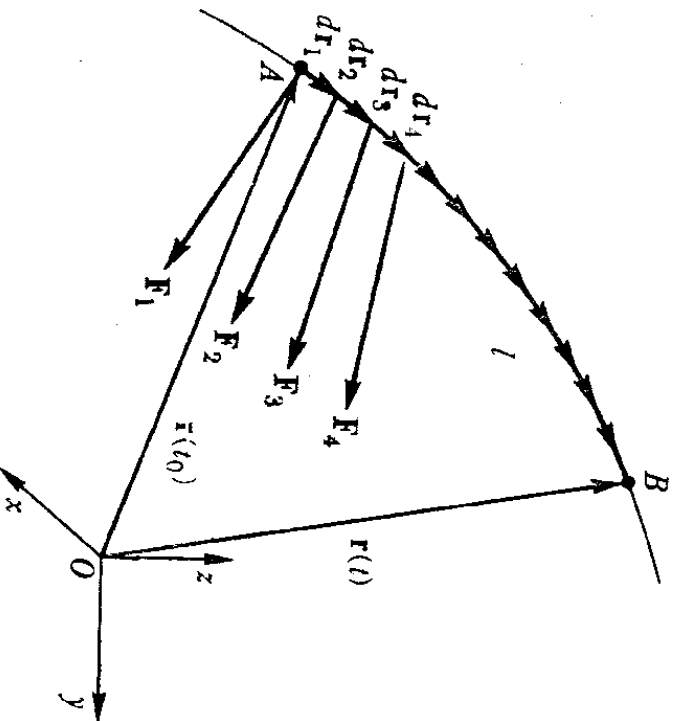


$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \theta ds = F_t ds$$

Siły prostopadłe do przesunięcia nie wykonują pracy!
siła Lorentza, siła Coriolisa, siły reakcji więzów...

Praca siły $\vec{F}(\vec{r})$ na drodze między A i B

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

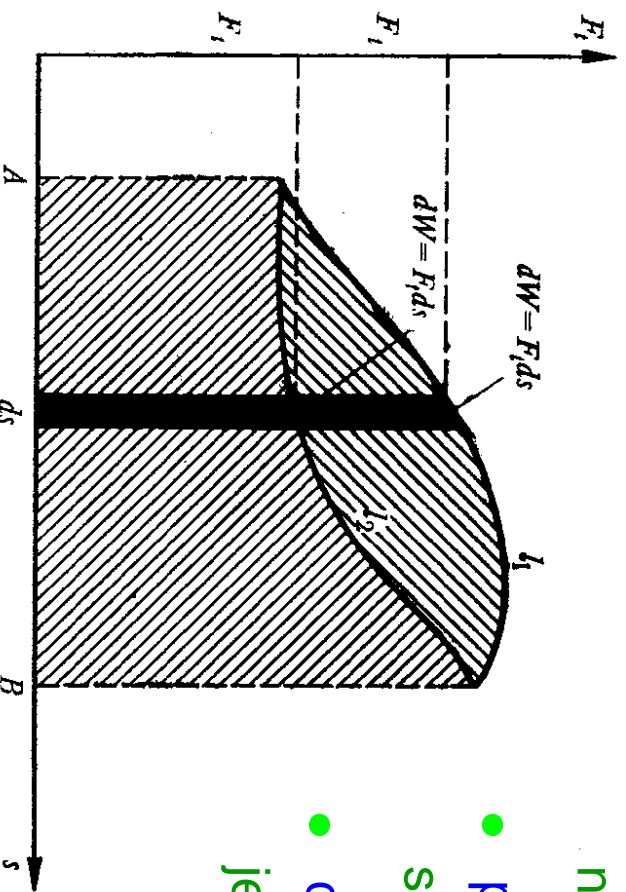
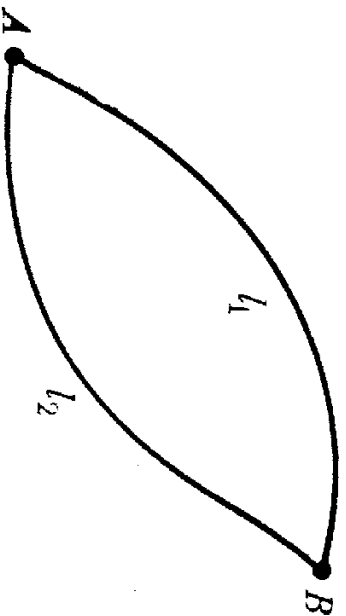


Praca i energia

Praca

W ogólnym przypadku praca W_{AB} jaką wykonujemy podczas ruchu punktu z **A** do **B** może zależeć od:

- przebytej drogi l
np. praca sił tarcia będzie proporcjonalna do l
- toru ruchu
np. jeśli siły oporu zależą od wyboru toru
- prędkości
np. jeśli siły oporu zależą od prędkości
- czasu
jeśli działające siły zależą od czasu



Praca i energia

Energia potencjalna

Siła $\vec{F}(\vec{r})$ jest **zachowawcza** (konserwatywna), jeśli praca przez nią wykonana zależy tylko od **położenia** punktów początkowego (A) i końcowego (B)

⇒ można ją wyrazić przez zmianę **energii potencjalnej**

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) = -\Delta E_p$$

Siła zachowawcza nie może zależeć od czasu ani od prędkości.

Jeśli droga jest zamknięta to praca jest równa zeru

$$\int_A^A \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0$$

cyrkulacja (krążenie) \vec{F}

Praca i energia

Przykład:

Ruch w jednorodnym polu grawitacyjnym. Siła ciężkości $\vec{F} = m \vec{g} = m (0, -g, 0)$

$$\int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \vec{F} \int_A^B d\vec{r} = \vec{F} (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = -m \vec{g} (\vec{r}_A - \vec{r}_B) = m g (y_A - y_B)$$

\Rightarrow energia potencjalna dla jednorodnego pola grawitacyjnego

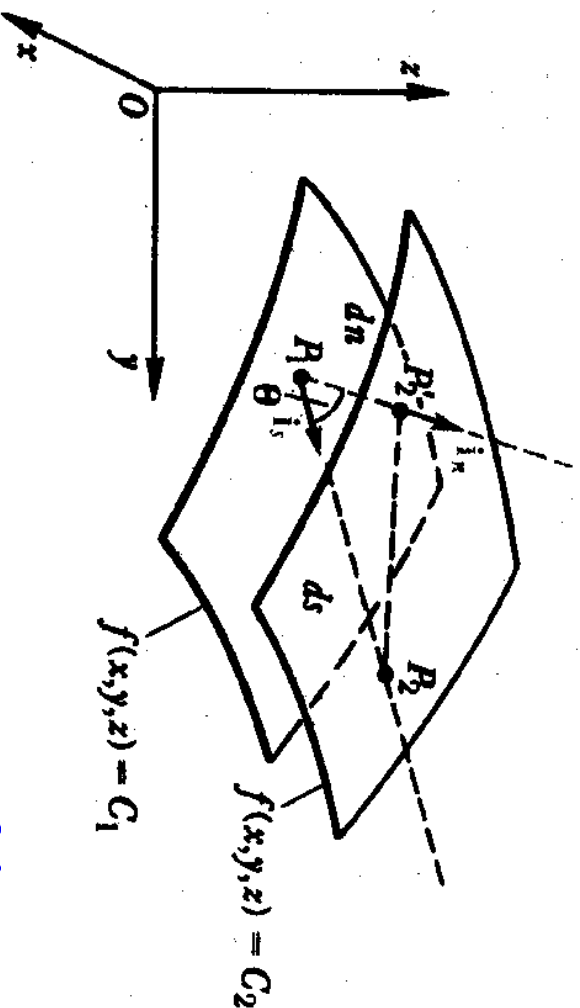
$$E_p(\vec{r}) = -m \vec{g} \vec{r} = m g y$$

Siłami zachowawczymi są też wszystkie siły centralne, zależne tylko od odległości

$\vec{F} = F(r) \cdot \vec{r}$ siła kulombowska, siła grawitacyjna, siły sprężystości...

Praca i energia

Gradient



Gradient wskazuje **kierunek** w którym następuje **największa zmiana** wartości funkcji skalarnej $f(x, y, z)$.

Wartość gradientu odpowiada **wartości pochodnej** funkcji $f(x, y, z)$ wzdłuż tego kierunku.

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \vec{i}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\text{"nabla"} \Rightarrow \vec{\nabla} = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} f = \vec{i}_n \frac{\partial f}{\partial n} \quad \vec{n} - \text{wektor normalny do } f = \text{const}$$

Praca i energia

Siła a energia potencjalna

Praca wykonana przy infitezymalnym przesunięciu $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -dE_p$$

$$\text{zmiana energii potencjalnej} \Rightarrow = -\frac{\partial E_p}{\partial x} dx - \frac{\partial E_p}{\partial y} dy - \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$$

Otrzymujemy:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

Znajomość potencjału siły zachowawczej jest równoważna znajomości samej siły.

Energia potencjalna jest określona z dokładnością do stałej, istotne są tylko jej zmiany

Praca i energia

Energia kinetyczna

Praca jaką wykonuje siła \vec{F} przy przesunięciu P o ds

$$\begin{aligned} dW &= F_t ds = m a_t ds = m \frac{dv}{dt} ds \\ \frac{dv}{dt} ds &= dv \frac{ds}{dt} \Rightarrow = m \frac{ds}{dt} dv = m v dv \end{aligned}$$

Praca siły $\vec{F}(\vec{r})$ na drodze między A i B

$$W_{AB} = \int_A^B F_t(s) \cdot ds = \int_A^B m v dv = \frac{m v_B^2}{2} - \frac{m v_A^2}{2} = E_k^B - E_k^A = \Delta E_k$$

Niezależnie od postaci siły \vec{F} i drogi

na ciało nie działają inne siły, układ inercjalny

praca siły jest równa zmianie energii kinetycznej ciała $E_k = \frac{m v^2}{2}$

Zasada zachowania energii

Zasada zachowania energii

Praca siły zachowawczej $\vec{F}(\vec{r})$ pomiędzy A i B

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_k^B - E_k^A = E_p^A - E_p^B$$

$$\Rightarrow E_k^B + E_p^B = E_k^A + E_p^A$$

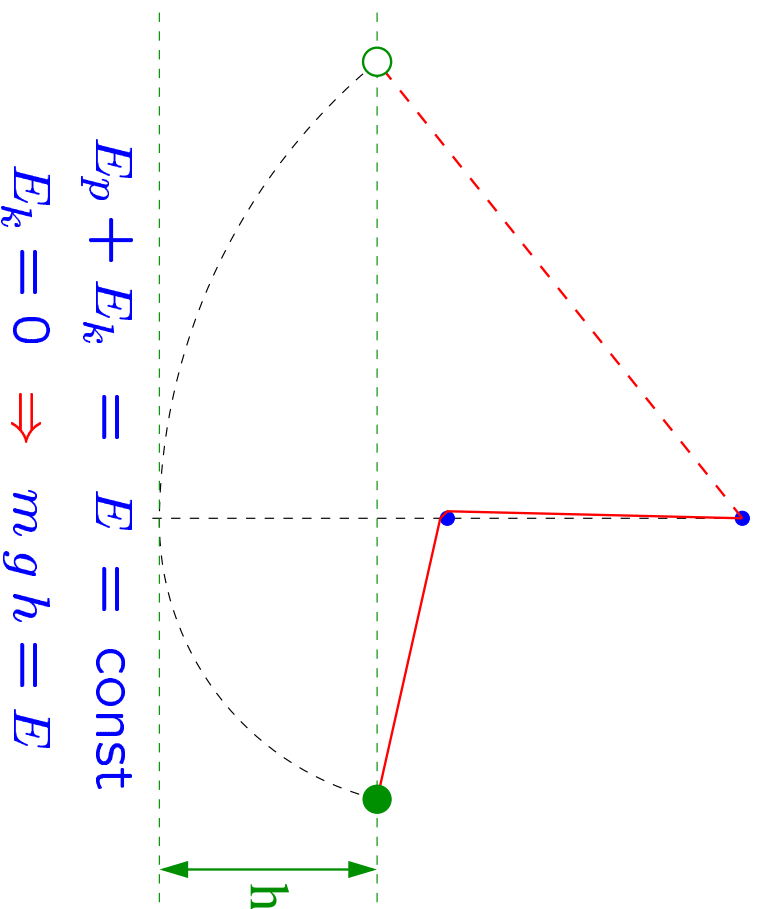
$$\Rightarrow E = E_p + E_k = \text{const}$$

W ruchu pod działaniem sił zachowawczych energia całkowita jest zachowana.

Zasada zachowania energii

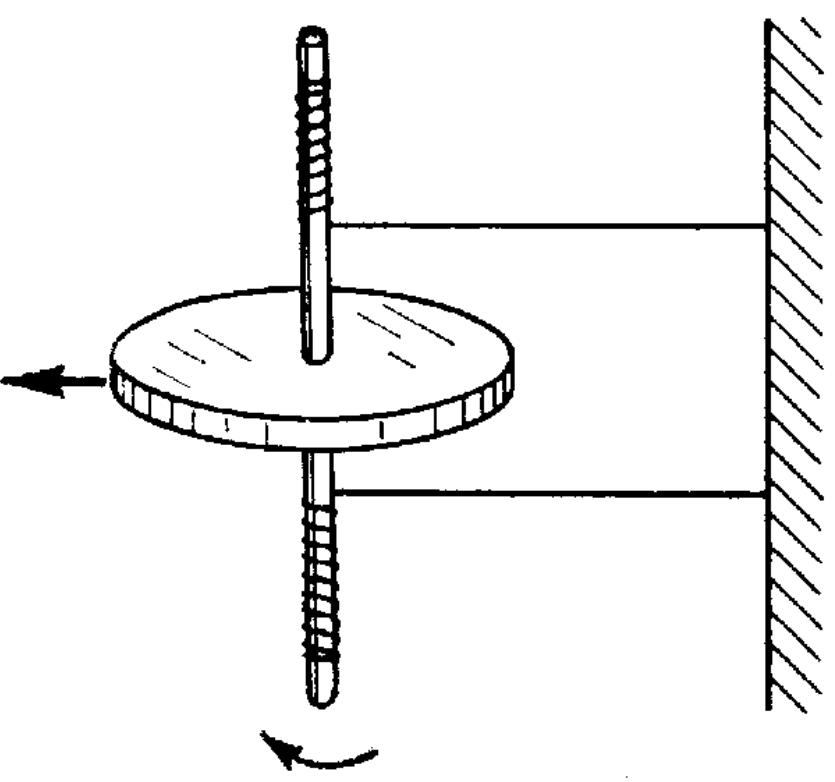
Wahadło Galileusza

Wysokość na jaką wznosi się wahadło nie zmienia się przy zmianie długości nici:



siły reakcji więzów nie wykonują pracy

Koło Maxwella



Przemiana energii potencjalnej w energię kinetyczną ruchu obrotowego.

Zasada zachowania energii

Spadek swobodny

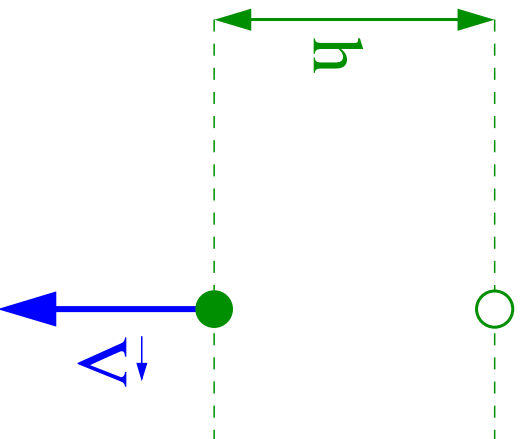
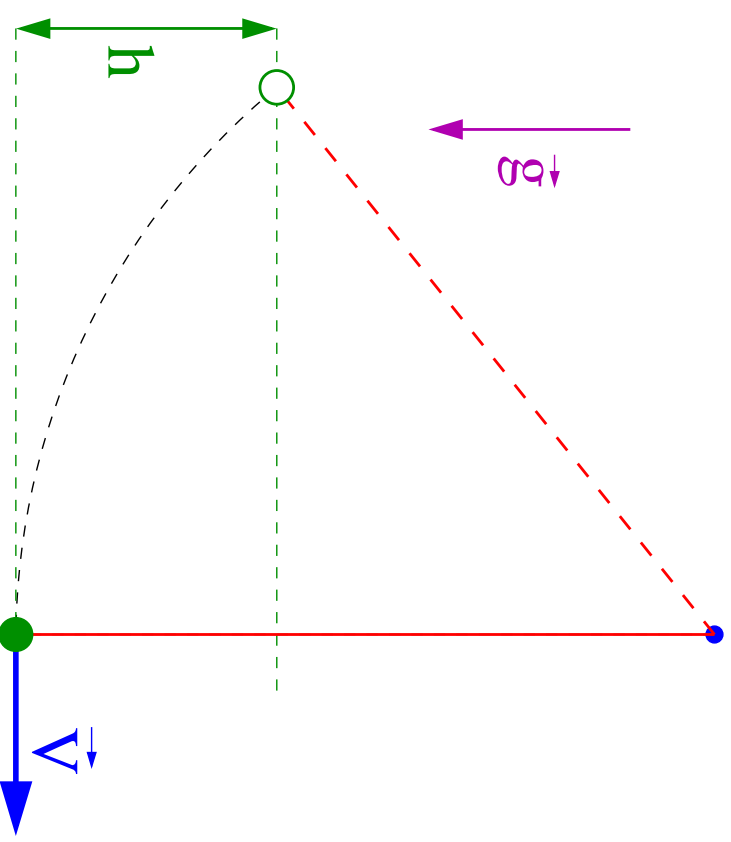


W jednorodnym polu \vec{g} ciało spada swobodnie z wysokości h ($\vec{v}(0) = 0$).

Prędkość końcowa z zasady zachowania energii:

$$\begin{aligned}\Delta E_k &= -\Delta E_p \\ \frac{m v^2}{2} &= m g h \\ v &= \sqrt{2 g h}\end{aligned}$$

Taką samą prędkość uzyska wahadło puszczzone z wysokości h



Zderzenia

Poprzednio rozpatrywaliśmy zderzenia ciał z punktu widzenia **zasady zachowania pędu** (i momentu pędu) **zasada zachowania pędu jest zawsze bezwzględnie spełniona**

Czy zachowana jest energia kinetyczna ?

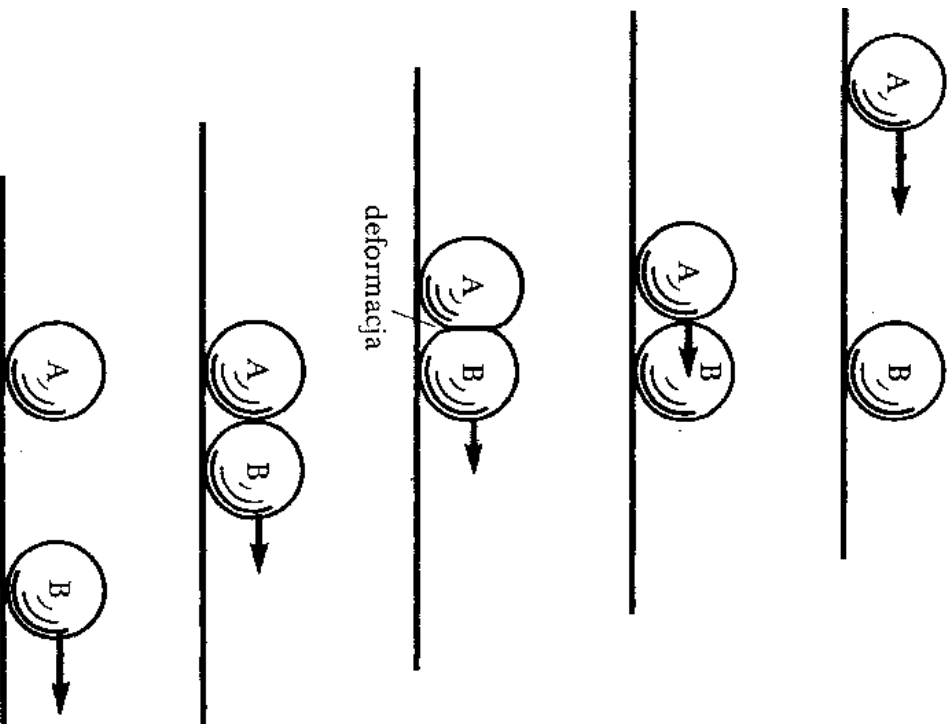
TAK

- jeśli działające siły mają charakter zachowawczy **siły kulombowskie, siły sprężystości**

$$\Delta E_p = 0 \Rightarrow \Delta E_k = 0$$

NIE

- jeśli mamy wkład sił niezachowawczych w wyniku zderzenia następują trwałe zmiany (np. odkształcenia) w zderzających się ciałach



Zderzenia

Zderzenia sprężyste

Z zasad zachowania:

$$p: \quad m_1 V_1' + m_2 V_2' = m_1 V_1 \quad \text{po} \quad \text{przed}$$

$$E: \quad \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2}$$

Przekształcamy:

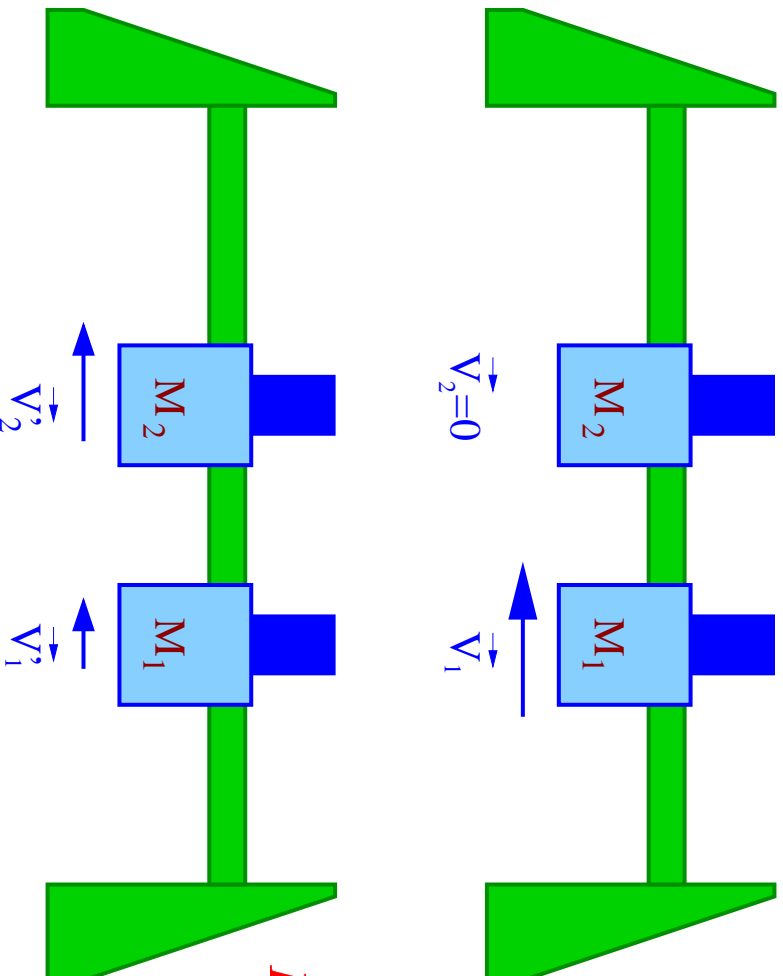
$$p: \quad m_2 V_2' = m_1 (V_1 - V_1')$$

$$E: \quad m_2 V_2'^2 = m_1 (V_1^2 - V_1'^2)$$

$$= m_1 (V_1 - V_1')(V_1 + V_1')$$

$$\Rightarrow V_2' = V_1 + V_1', \text{ albo } V_2' - V_1' = V_1$$

względna prędkość przed i po zderzeniu jest taka sama



Przypadek jednowymiarowy:

Zderzenia

Zderzenia sprężyste

Przekształcając dalej otrzymujemy:

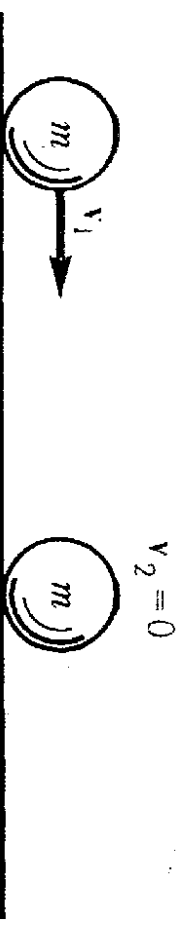
$$m_2 (V_1 + V_1') = m_1 (V_1 - V_1')$$

$$\Rightarrow V_1' (m_1 + m_2) = V_1 (m_1 - m_2)$$

Ostatecznie:

$$V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1$$

$$V_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} V_1$$



Przypadek szczególny: $m_1 = m_2$

$$\Rightarrow V_1' = V_2 = 0$$

$$V_2' = V_1$$

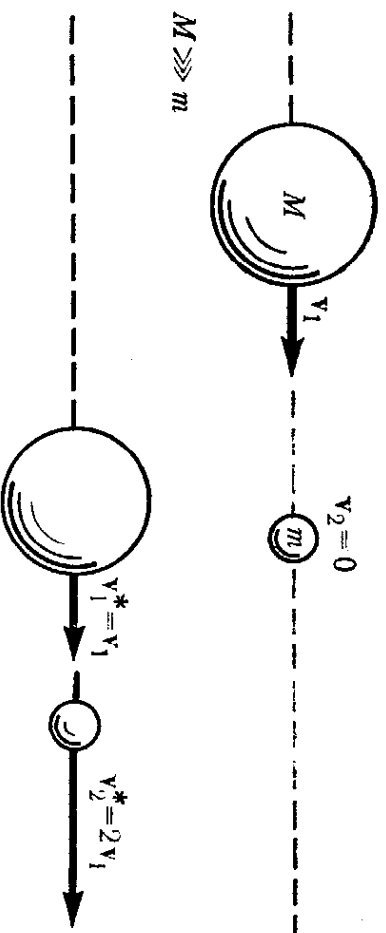
Zderzające się ciała “wymieniają się” prędkościami; rozwiązanie słuszne także w przypadku $\vec{V}_2 \neq 0$

Zderzenia

Zderzenia sprężyste

$$m_1 > m_2$$

Masa "pocisku" większa od masy "tarczy":



Otrzymujemy: $v_2' > v_1' > 0$

Po zderzeniu oba ciała poruszają się w tą samą stronę.

Przypadek graniczny: $m_1 \gg m_2$

$$\Rightarrow v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = v_1$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 2 \cdot v_1$$

"Pocisk" nie zauważa zderzenia

"Tarcza" uzyskuje prędkość $2 \cdot v_1$

Zderzenia

Zderzenia sprężyste

$$m_1 < m_2$$

Masa “pocisku” mniejsza od masy “tarczy”:

Otrzymujemy:

$$V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1 < 0$$

$$V_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_1 > 0$$

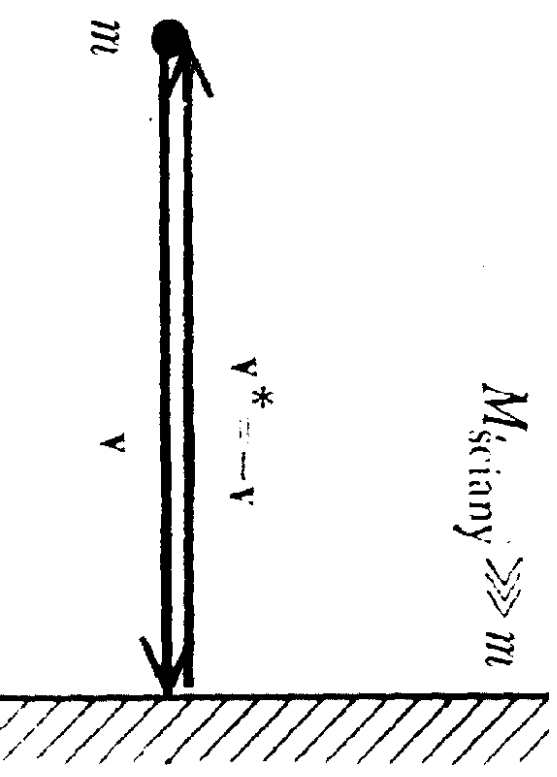
Prędkość “pocisku” zmienia znak

⇒ “pocisk” odbija się od “tarczy”

Przypadek graniczny: $m_1 \ll m_2$

$$\Rightarrow V_1' = -V_1$$

$$V_2' = 0$$

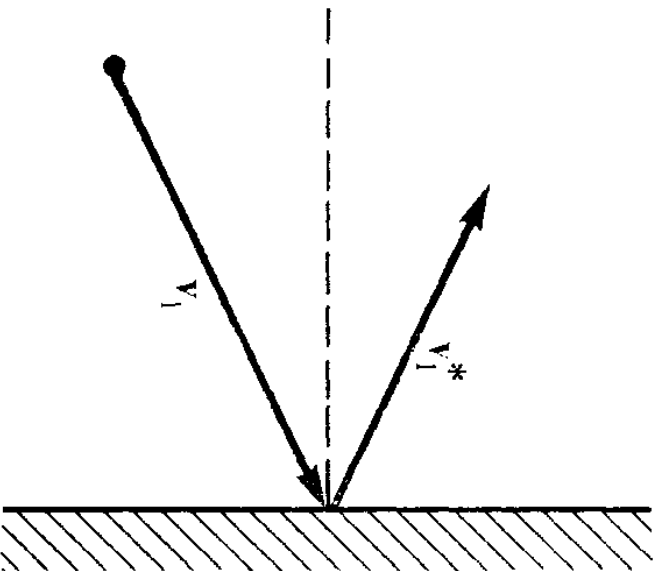


Sprężyste odbicie od
nieruchomej “ściany”

Zderzenia

$$m_1 \ll m_2$$

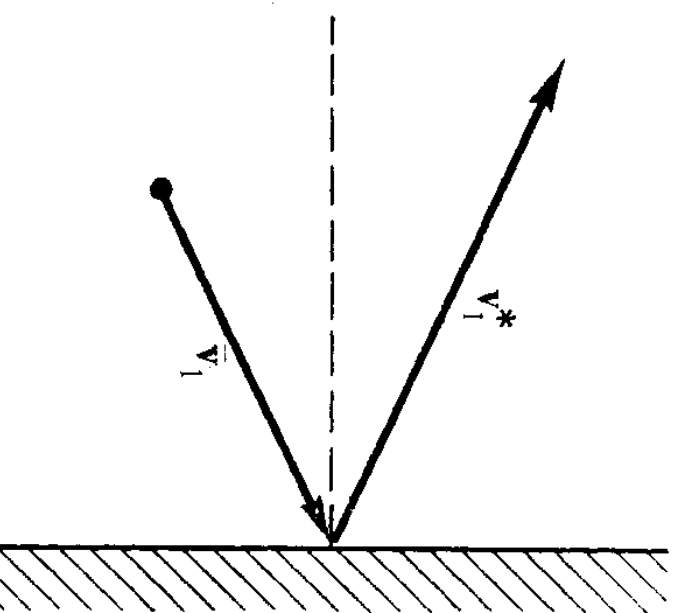
“Tarcza” oddala się od “pocisku”
 (“ściana”)



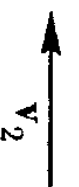
“pocisk” traci energię



“Tarcza” przybliżyła się do “pocisku”
 (“ściana”)



“pocisk” zyskuje energię



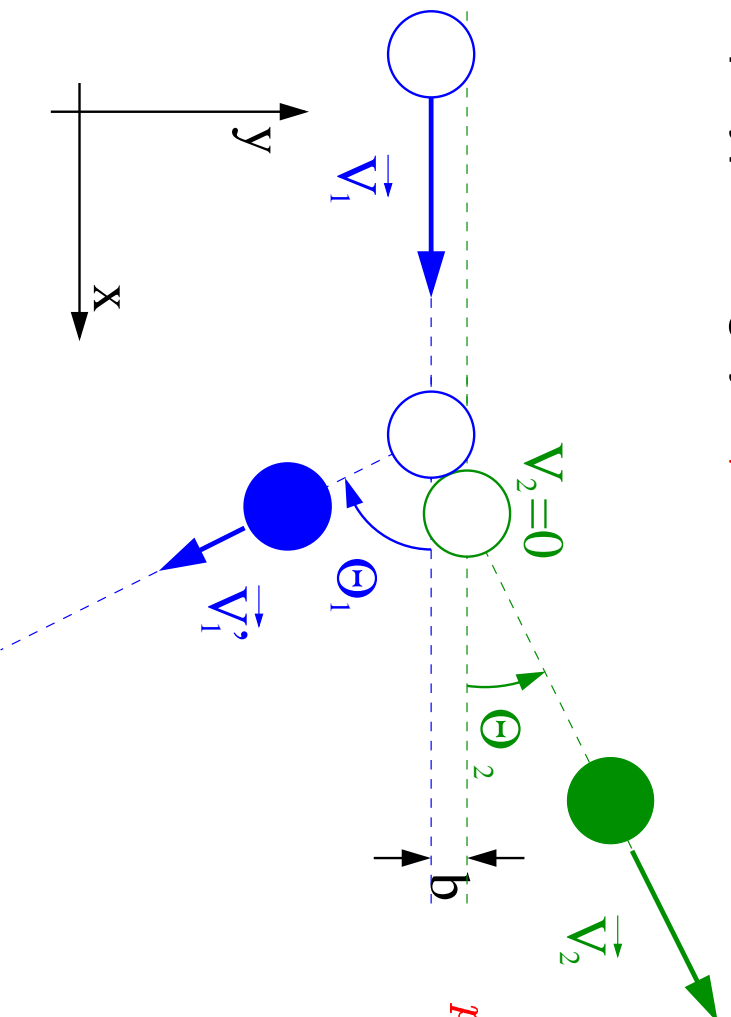
Mikroskopowy obraz ochładzania (ogrzewania) się gazu przy rozprężaniu (sprężaniu)

Zderzenia

Zderzenia nie centralne

Do tej pory rozpatrywaliśmy tzw. **zderzenia centralne**, dla których **parametr zderzenia $b = 0$** “pocisk” trafia w sam środek “tarczy”

W przypadku gdy **$b \neq 0$** zderzenie trzeba rozpatrywać w dwóch wymiarach:



Zasada zachowania pędu:

po zderzeniu

przed

$$p_x : m_2 V_2' \cos \theta_2 + m_1 V_1' \cos \theta_1 = m_1 V_1$$

$$p_y : m_2 V_2' \sin \theta_2 - m_1 V_1' \sin \theta_1 = 0$$

Dla zderzeń spężystych:

$$E_k : \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2}$$

Znajomość m_1 , m_2 i V_1 ($V_2 = 0$) nie wystarcza do wyznaczenia pełnej kinematyki zderzenia (V_1' , V_2' , θ_1 i θ_2) !

⇒ musimy ustalić b albo jeden z parametrów rozproszenia (np. kąt θ_1).

Zderzenia

Zderzenia nie centralne

Jeśli masy zderzających się sprężystości ciał są równe

$m_1 = m_2 \Rightarrow$ zagadnienie bardzo się upraszcza

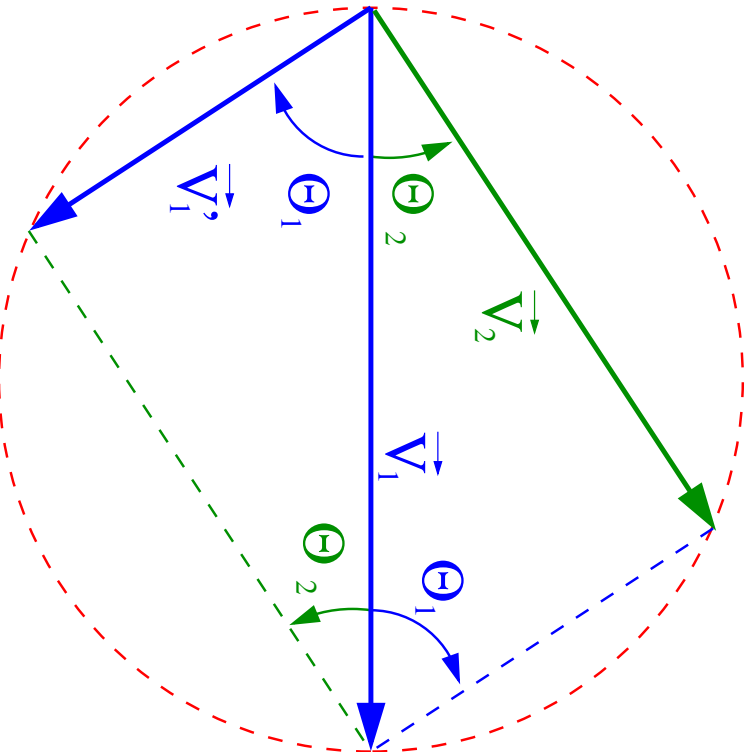
Z zasad zachowania:

$$\vec{V}'_1 + \vec{V}'_2 = \vec{V}_1$$

$$V_1'^2 + V_2'^2 = V_1^2$$

\Rightarrow wektory \vec{V}_1 , \vec{V}'_1 i \vec{V}'_2 tworzą trójkąt prostokątny.

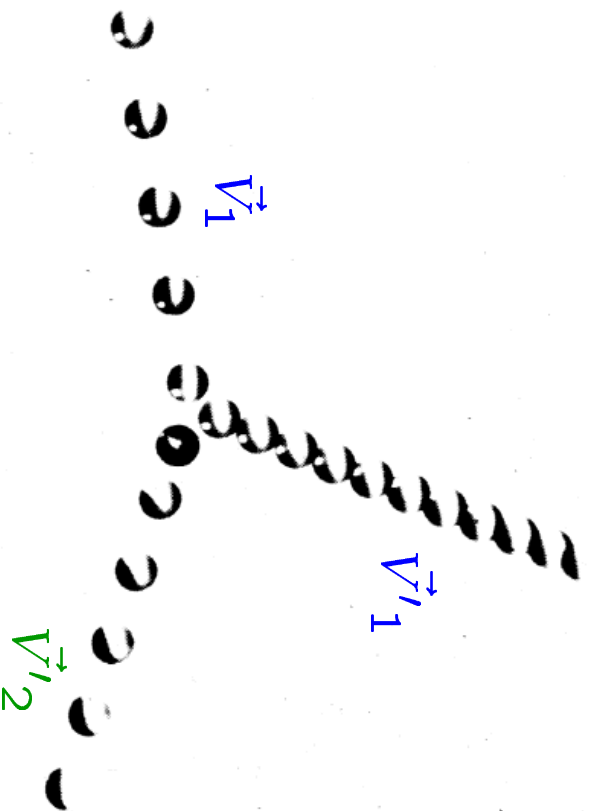
$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$



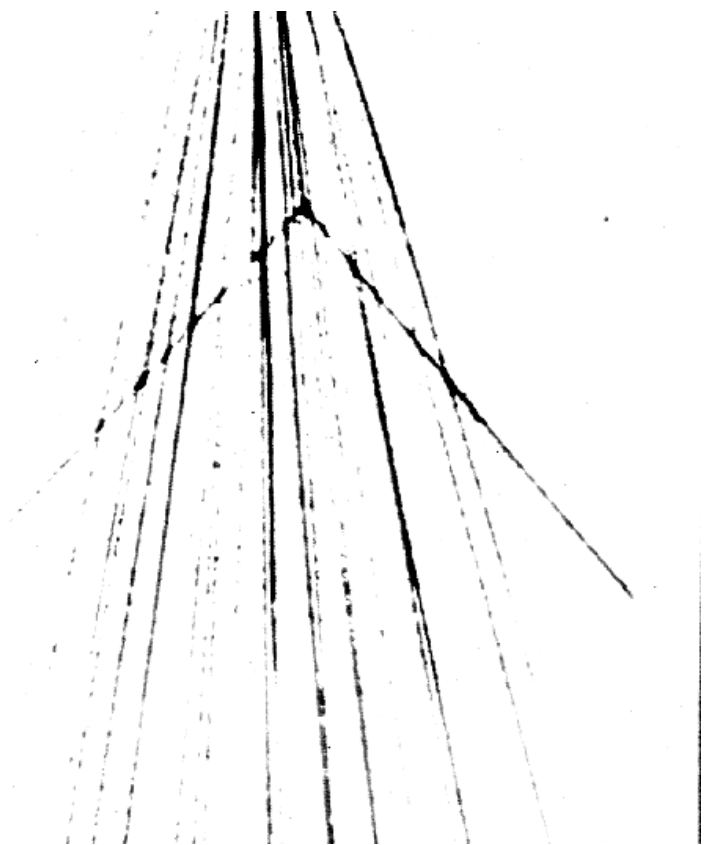
Zderzenia

$$m_1 = m_2$$

Fotografia zderzających się kul:



Zderzenie proton-proton w komorze pęcherzykowej:

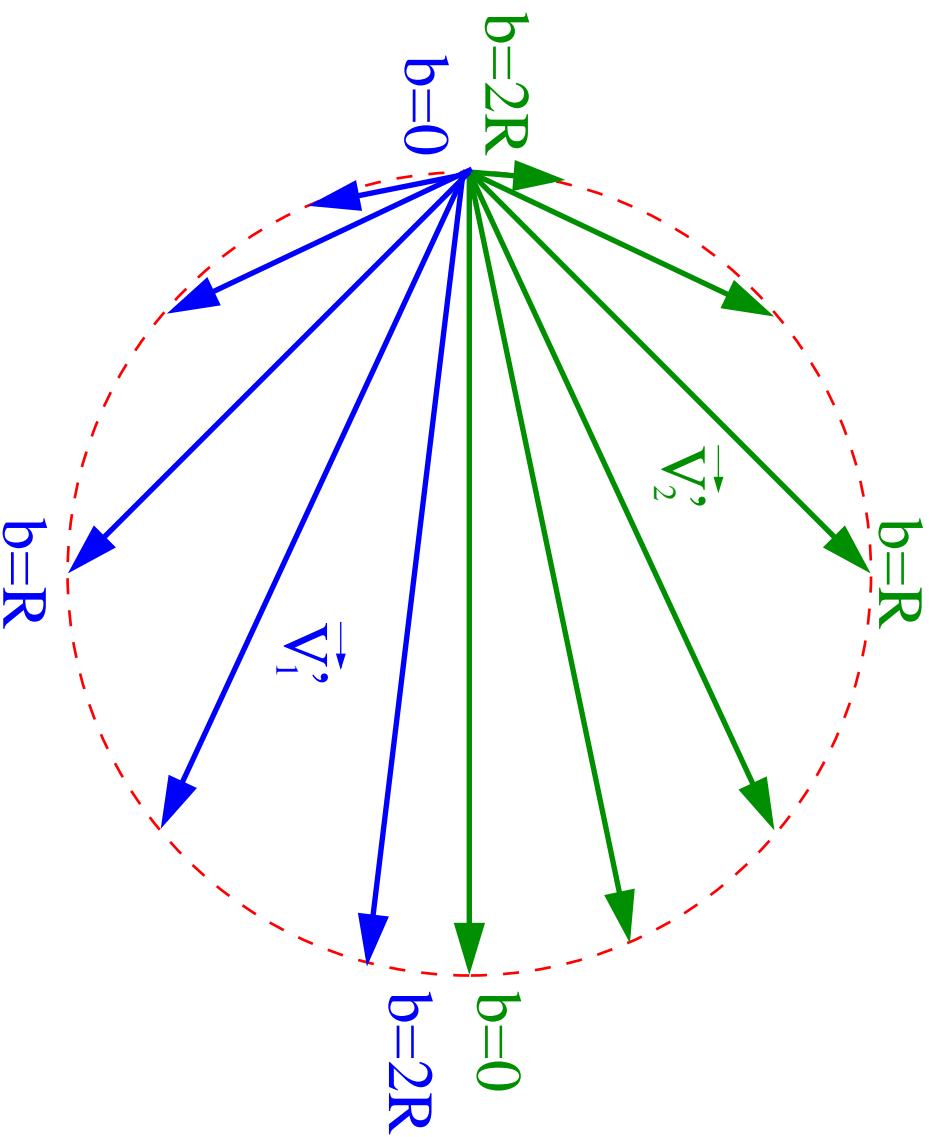


niska energia padającej wiązki

⇒ dynamika nierelatywistyczna

Zderzenia

$$m_1 = m_2$$



Stan końcowy zależy od parametru zderzenia b

- $b = 0 \Rightarrow$ zderzenie centralne

$$\begin{aligned} \vec{V}'_2 &= \vec{V}_1 \\ \vec{V}'_1 &= 0 \end{aligned}$$

- $b \geq 2R \Rightarrow$ brak zderzenia (kule mijają się)

$$\begin{aligned} \vec{V}'_2 &= 0 \\ \vec{V}'_1 &= \vec{V}_1 \end{aligned}$$

Konwersatorium

im. Jerzego Pniiewskiego

Dziś (25 listopada) o godz. 16:30,
w Sali Dużej Doświadczalnej:

Statek kosmiczny - Ziemia

prof. dr hab. A.K Wróblewski

Streszczenie:

Wszyscy jesteśmy pasażerami statku kosmicznego - naszej Ziemi. Istnienie nasze i innych istot żywych jest jednak narażone na wielorakie niebezpieczeństwa. W referacie zostaną przedstawione najnowsze wyniki badań dotyczące zagrożeń o charakterze globalnym dla życia na Ziemi. Poglądy ekspertów na temat kataklizmów kosmicznych uległy w ostatnich latach zasadniczej zmianie. Wiemy już także od niedawna, że katastrofy kosmiczne odegrały ogromną rolę w historii Ziemi, a wyginiecie dinozaurów nie było odosobnionym przypadkiem. Opisane będą obecne działania, mające na celu przygotowanie w niedalekiej przyszłości odpowiednich środków zaradczych, które mogłyby zapobiec zagładzie ludzkości.