

Ruch pod wpływem sił zachowawczych

Wstęp do Fizyki I (B+C)

Wykład XIV:

- Energia potencjalna
- Siły centralne
- Ruch w polu grawitacyjnym
- Pole odpychające

Energia potencjalna

Równania ruchu

Znajomość energii potencjalnej jest równoważna znajomości siły (zachowawczej):

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

Czy znając $E_p(\vec{r})$ możemy rozwiązać równania ruchu ciała ?

- Możemy wyznaczyć zależność $\vec{F}(\vec{r})$ i skorzystać z II zasady dynamiki...
albo

- Możemy wykorzystać zasadę zachowania energii:

$$E = E_k(\dot{\vec{r}}) + E_p(\vec{r}) = \text{const}$$

W zależności od zagadnienia jeden albo drugi sposób może być bardziej użyteczny...

Energia potencjalna

Ruch prostoliniowy

Dla ruchu prostoliniowego pod działaniem siły zachowawczej $\vec{F}(x)$, energia potencjalna $E_p = E_p(x)$

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + E_p(x) = \text{const}$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p(x))}$$

Rozdzielając zmienne i całkując otrzymujemy:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p(x))}}$$
$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p(x'))}}$$

\Rightarrow Znając $E_p(x)$ możemy zawsze znaleźć związek między x i t .

Energia potencjalna

Ruch prostoliniowy

Przykład: $\vec{F} = F \vec{i}_x = \text{const} \Rightarrow E_p(x) = -F x \quad F_x = \frac{dE_p}{dx}$

Przyjmując, że $x = 0$ w chwili $t = 0$ mamy:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{E + F x'}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{m}} t = \frac{2}{F} \left[\sqrt{E + F x'} \right]_0^x = \frac{2}{F} \sqrt{E + F x} - \frac{2}{F} \sqrt{E}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{m} \right) \cdot t^2 + \frac{2E}{m} \cdot t$$
$$\frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

v_0 - predkość w chwili $t = 0 \Rightarrow$ energia potencjalna $E_p(0) = \frac{mv_0^2}{2}$

Siła centralna

Rozważmy ruch punktu materialnego o masie m
w polu centralnej siły zachowawczej $\vec{F} = F(r) \cdot \vec{i}_r$

⇒ zasada zachowania energii: $E = \frac{mv^2}{2} + E_p(r) = \text{const}$

⇒ zasada zachowania momentu pędu: $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = \text{const}$

Zachowanie momentu pędu ⇒ ruch płaski

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{i}_r \cdot \frac{dr}{dt} + \vec{i}_\theta \cdot r \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \omega^2$$

Wstawiając do wyrażenia na energię kinetyczną $L = m r^2 \omega$

$$E = E_k + E_p = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} + E_p(r) = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_p^{\text{eff}}(r)$$

⇒ równanie różniczkowe dla składowej radialnej ⇒ problem jednowymiarowy

Siła centralna

Energia efektywna

“Efektywna” energia potencjalna w polu siły centralnej:

$$E_p^{eff}(r) = \frac{L^2}{2m r^2} + E_p(r)$$

“energia odśrodkowa”

Jeśli $L \neq 0$ to zasada **zachowania momentu pędu**

“przeciwstawia się” zbliżeniu ciała do źródła siły ($r = 0$).
bariera centryfugalna

“energia dośrodkowa” \Leftrightarrow siła odśrodkowa

$$F_o = -\frac{d}{dr} \left(\frac{L^2}{2m r^2} \right) = \frac{L^2}{m r^3} = m r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Siła centralna

Ruch radialny

Jednowymiarowe zagadnienie ruchu radialnego:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p^{eff}(r))}$$

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p^{eff}(r'))}}$$

$$E_p^{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r)$$

Ruch może się odbywać tylko w obszarze $E - E_p^{eff}(r) \geq 0$

⇒ dla $L \neq 0$ istnieje ograniczenie na odległość najmniejszego zbliżenia: $r \geq r_{min}$
teoretycznie można wymyśleć siłę centralną silniejszą od siły odśrodkowej

⇒ jeśli $E < E_p^{eff}(\infty)$ to ciało nie może dowolnie oddalić się od centrum siły: $r \leq r_{max}$
⇒ ruch w ograniczonym obszarze

Siła centralna

Ruch katowy

Zachowany moment pędu: $L = m r^2 \omega$

$$\Rightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m r^2}$$

$$\theta - \theta_0 = \int_0^t \frac{L}{m r^2} dt'$$

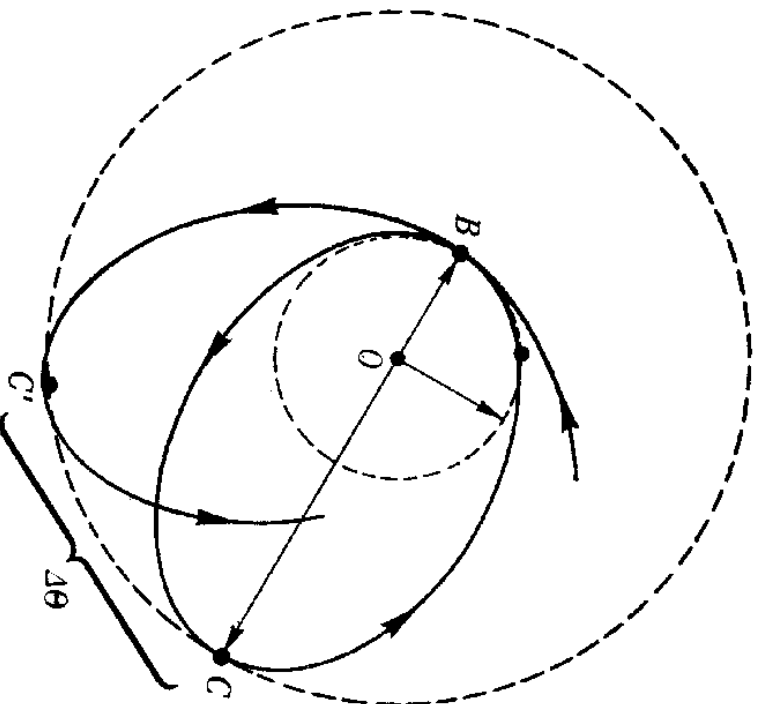
Możemy wyprowadzić równanie na tor ciała porównując zależności od czasu:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p^{eff}(r))}} = \frac{m r^2}{L} d\theta \\ \Rightarrow \theta - \theta_0 &= \int \frac{L dr}{m r^2 \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p^{eff}(r))}} \end{aligned}$$

równanie toru we współrzędnych biegunowych

Siła centralna

Ruch katowy



Zmiana kąta biegunowego przy przejściu ciała od r_{min} do r_{max}

$$\Delta\theta = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L dr}{m r^2 \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p^{eff}(r))}}$$

Tor będzie krzywą zamkniętą, jeśli $\Delta\theta = 2\pi \frac{m}{n}$

m, n - liczby całkowite

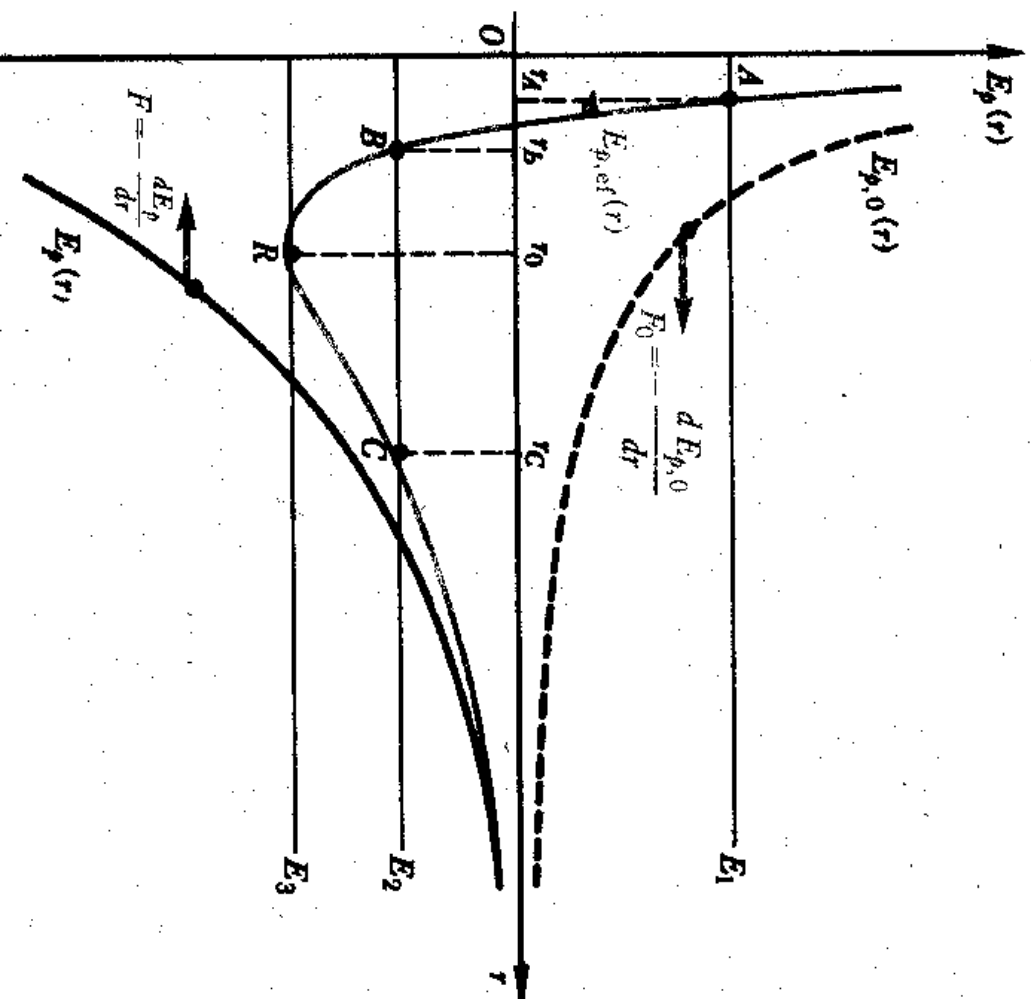
Warunek ten spełniony jest tylko dla dwóch pól:

(niezależnie od warunków początkowych)

- $E_p(r) \sim \frac{1}{r}$ - siła grawitacyjna, siła kulombowska
- $E_p(r) \sim r^2$ - siły sprężystości

Ruch w polu grawitacyjnym

energia efektywna



Pole grawitacyjne

Ogólne wyrażenie na energię potencjalną:

$$E_{p}(r) = -\frac{k}{r}$$

$k > 0 \Rightarrow$ siła przyciągająca
wybieramy $E_p(\infty) = 0$

Charakter ruchu zależy od energii całkowitej:

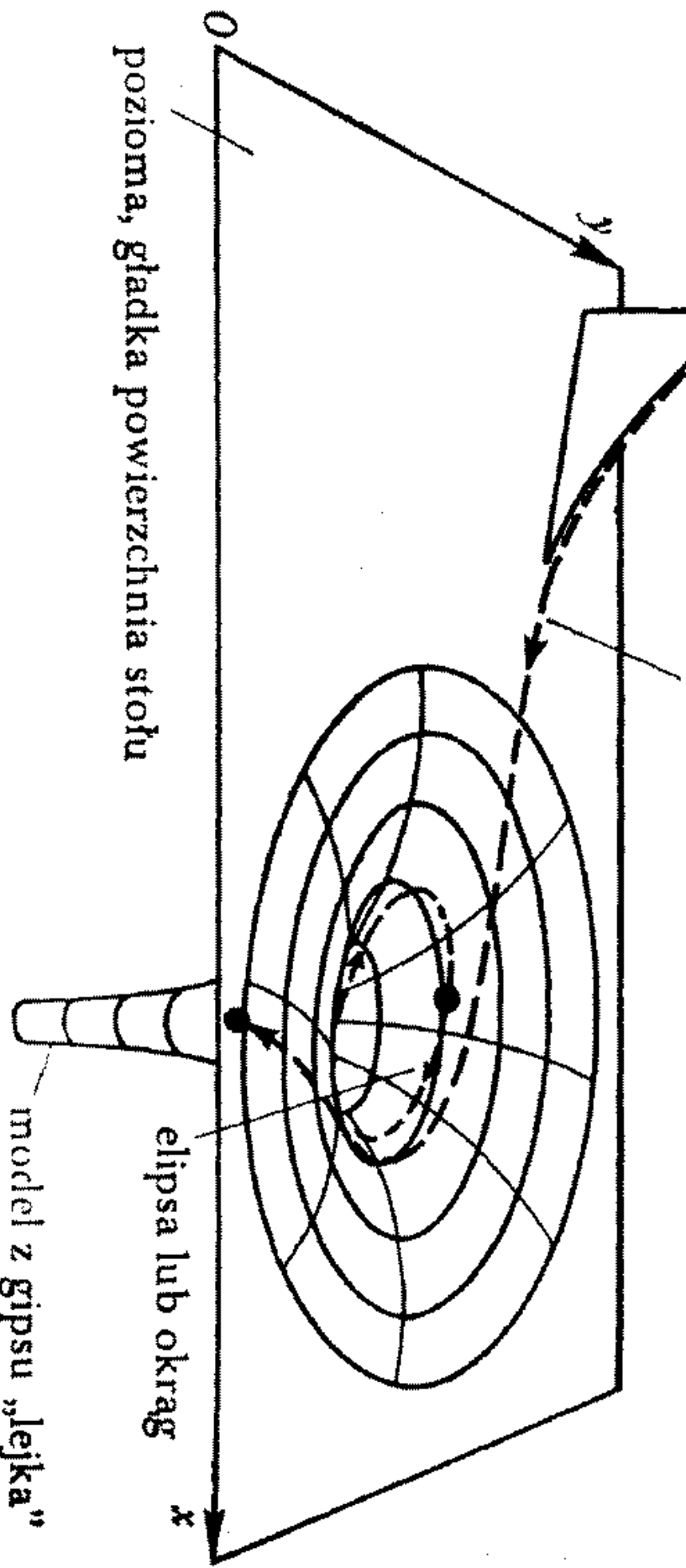
- $E_1 > 0$ - tor otwarty
- $E_2 < 0$ - tor zamknięty
- $E_3 = E_{min}$ - ruch po okręgu

Ruch w polu grawitacyjnym

Model

równia pochyła—
„akcelerator mechaniczny”

gałąź „bliższa” hiperboli



Ruch w polu grawitacyjnym

Równanie toru

Rozwiązujemy:

$$\begin{aligned}\theta - \theta_0 &= \int \frac{L dr}{m r^2 \sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p^{\text{eff}}(r))}} = \int \frac{\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\frac{2m}{L^2} \left(E + \frac{k}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}} \\ &= - \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2mk}{L^2} \left(\frac{1}{r}\right) - \left(\frac{1}{r}\right)^2}} = - \int \frac{d\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)}{\sqrt{\frac{\epsilon^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2}}\end{aligned}$$

Gdzie wprowadziliśmy parametry: $p = \frac{L^2}{mk}$ oraz $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$

Otrzymaliśmy całkę postaci:

$$- \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos(x) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{p}{1 + \epsilon \cdot \cos(\theta - \theta_0)}$$

Ruch w polu grawitacyjnym

Równanie toru

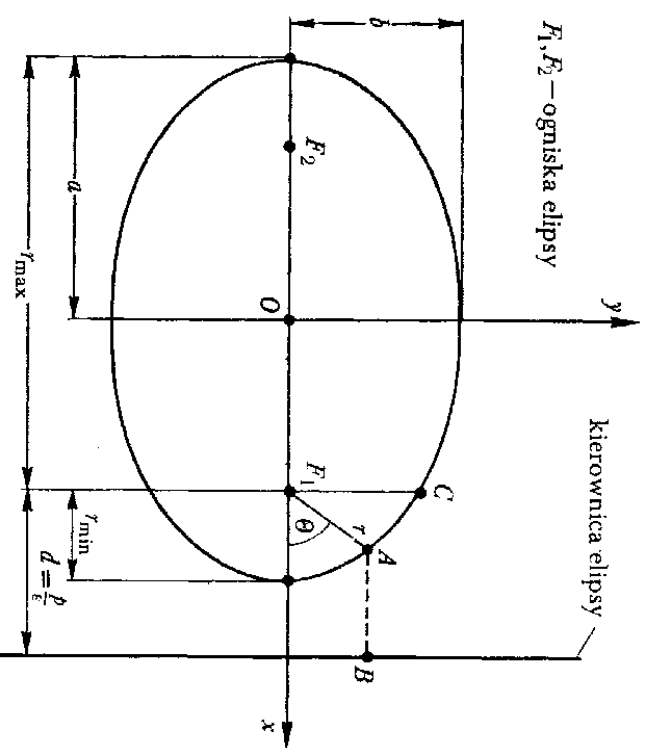
Otrzymałiśmy równanie krzywej stożkowej
(we współrzędnych biegunowych)

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\theta - \theta_0)}$$

ε - mimośród orbity

- $\varepsilon = 0$ - ruch po okręgu o promieniu p
- $\varepsilon < 1$ - ruch po elipsie $E < 0$
- $\varepsilon = 1$ - ruch po paraboli $E = 0$
- $\varepsilon > 1$ - ruch po hiperboli $E > 0$

$$\varepsilon = \frac{r}{AB}$$

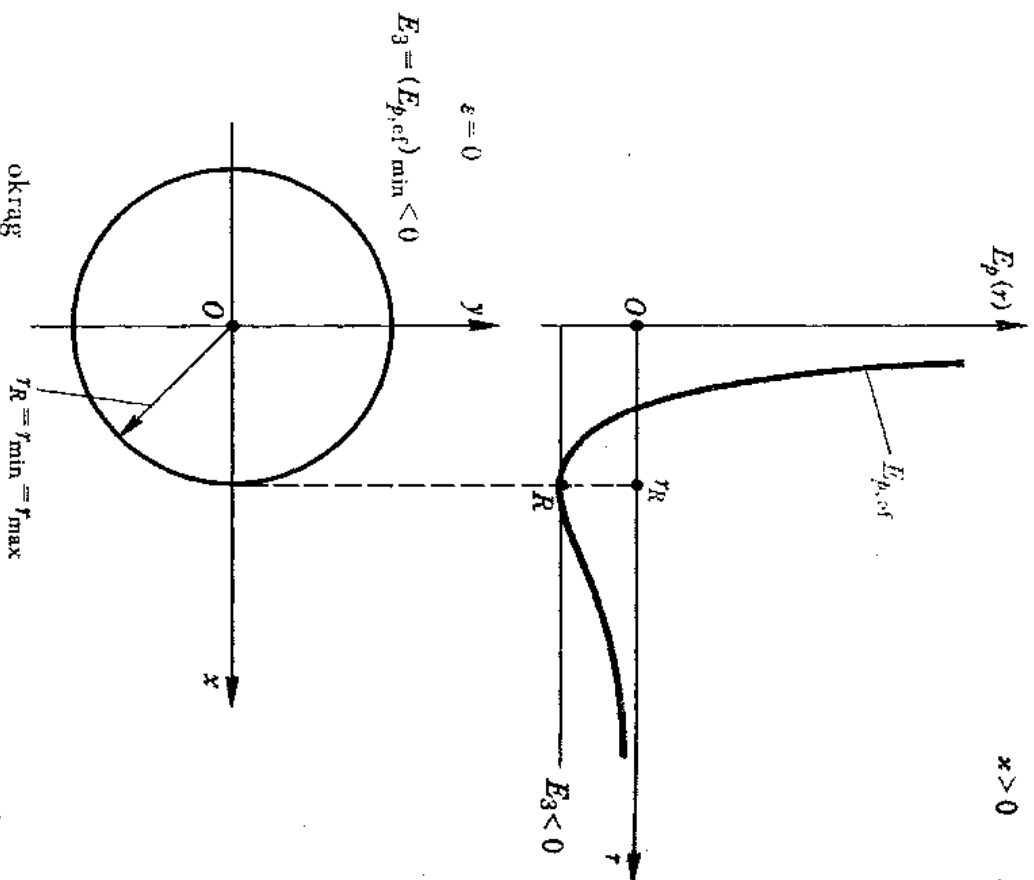


Osie elipsy:

- $2a = \frac{2p}{1-\varepsilon^2} = \frac{k}{2|E|}$
- zależy tylko od energii
- $2b = \frac{2p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$
- zależy także od momentu pędu

Ruch w polu grawitacyjnym

Ruch po okręgu



$\varepsilon > 0$

Przypadek szczególny: $\varepsilon = 0$

$$E = E_{\min} = -\frac{m k^2}{2 L^2}$$

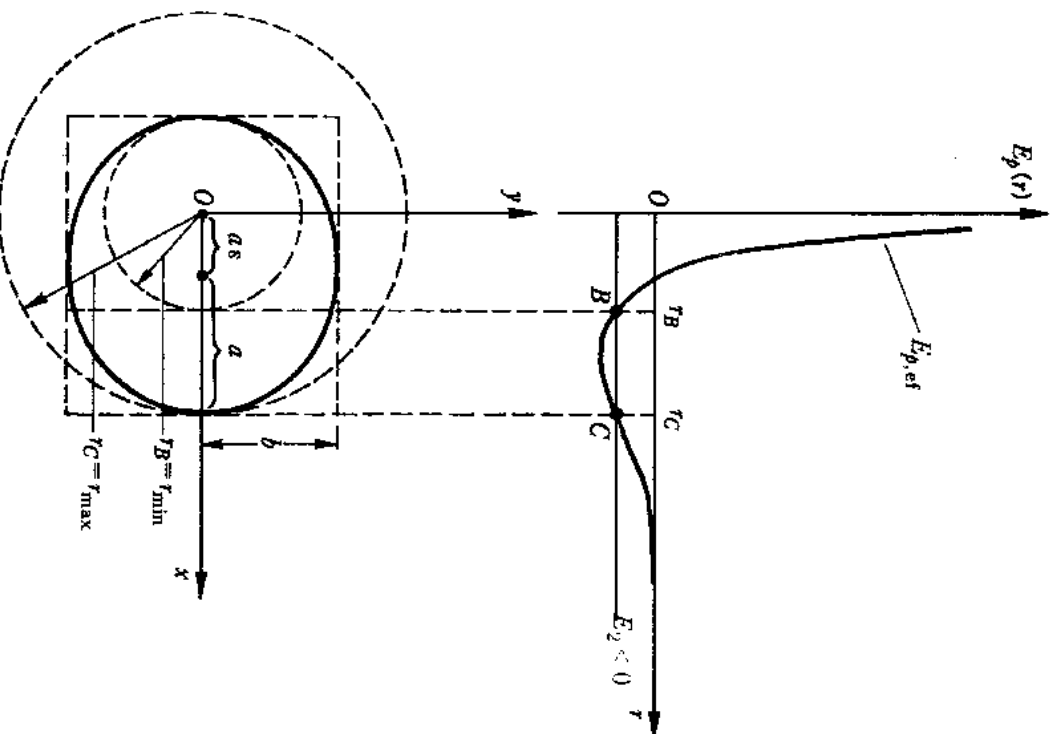
minimalna energia całkowita

przy ustalonym L

W przypadku $L = 0$ mamy ruch po odcinku o długości $2a = \frac{k}{2|E|}$; $b = 0$

Ruch w polu grawitacyjnym

Ruch po elipsie



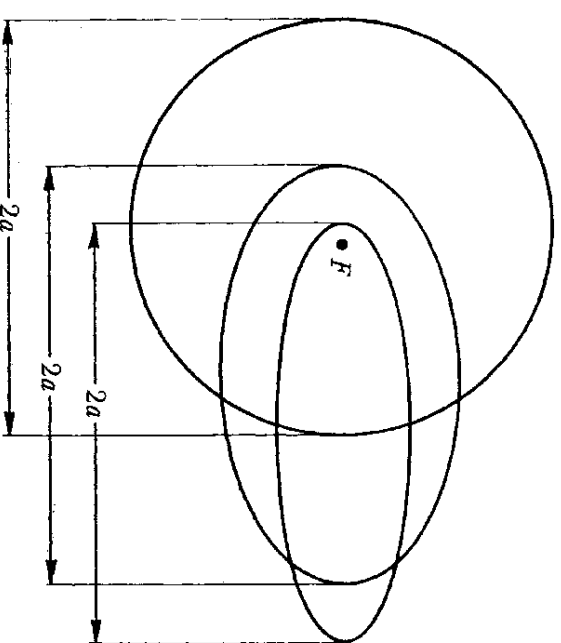
Warunek: $E_{min} < E < 0$

Ruch ograniczony do: $r_{min} < r < r_{max}$

$$E_p^{eff}(r_{min}) = E_p^{eff}(r_{max}) = E$$

Źródło siły znajduje się w jednym z ognisk elipsy.

Długa półoś zależy wyłączenie od energii;
 “spłaszczenie” zależy od momentu pędu



Ruch w polu grawitacyjnym

Prawa Keplera

- I. Każda planeta krąży po elipsie ze Słońcem w jednym z jej ognisk
- II. Promień wodzący każdej planety zakreśla równe pola w równych czasach
- III. Kwadrat okresu obiegu każdej planety wokół Słońca jest proporcjonalny do sześciannu półosi wielkiej elipsy

Okres obiegu możemy wyznaczyć z prędkości polowej

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}, \quad 2a = \frac{k}{2|E|}, \quad 2b = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$$

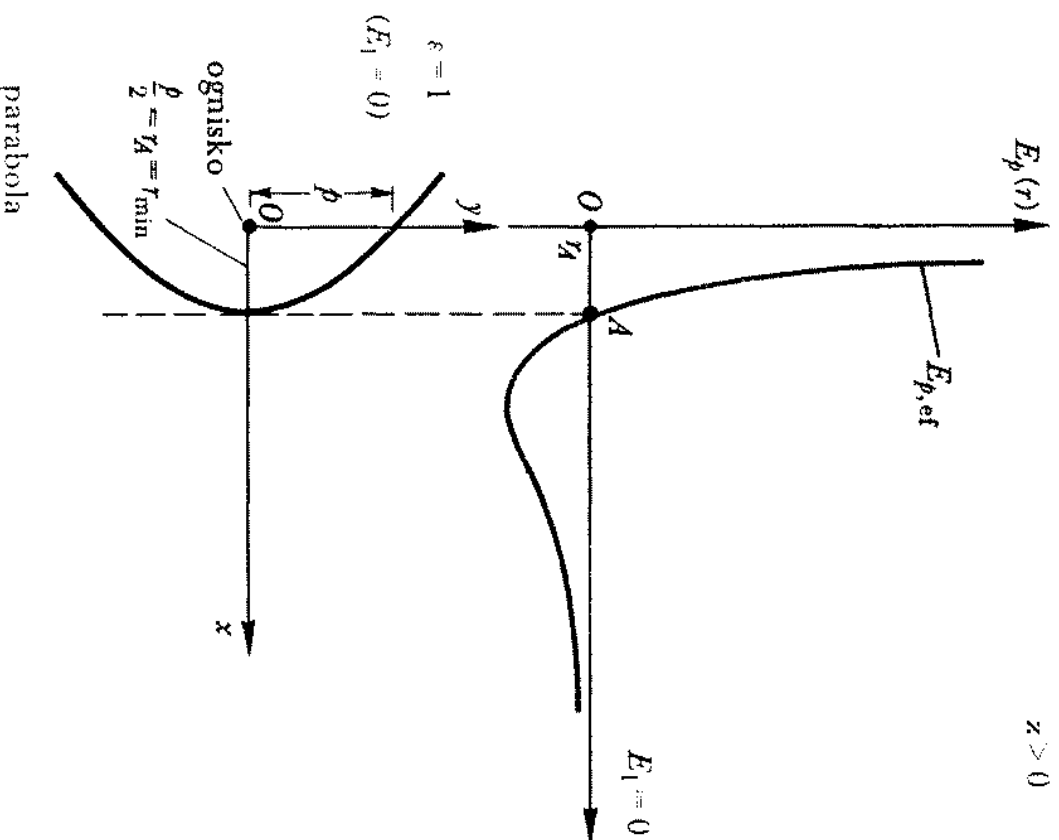
$$T = \frac{S}{\left(\frac{dS}{dt}\right)} = \frac{\pi a b}{\frac{L}{2m}} = \pi k \sqrt{\frac{m}{2|E|3}}$$

Podnosząc do kwadratu

$$T^2 = \frac{\pi^2 k^2 m}{2|E|3} = \frac{4\pi^2 m}{k} \cdot a^3$$

Ruch w polu grawitacyjnym

Ruch po paraboli



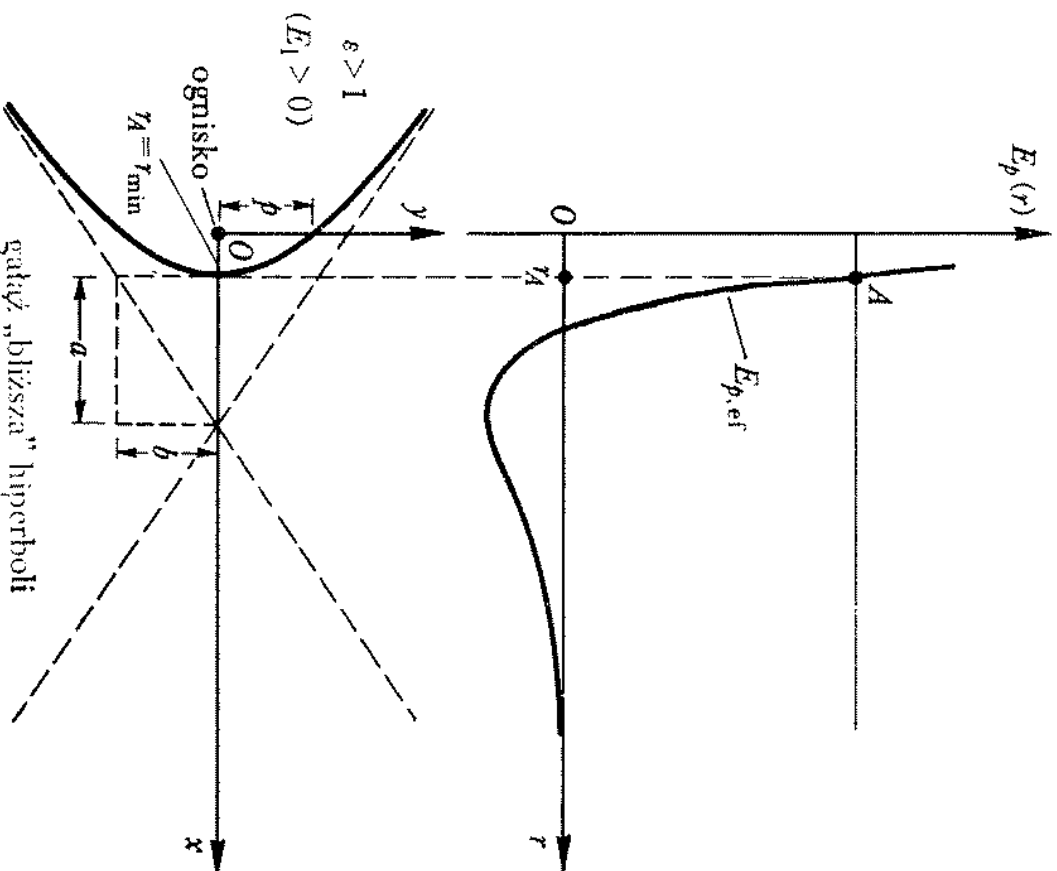
Przypadek szczególny: $E = 0$

Ruch jest nieskończony,
ciało nie jest związane przez centrum siły.

Jednak oddalając się do nieskończoności
ciało będzie poruszać się coraz wolniej.
Asymptotycznie zatrzyma się.

Ruch w polu grawitacyjnym

Ruch po hiperboli



Dla $E > 0$

Ruch jest nieskończony.

Asymptotycznie prędkość ciała dąży do

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{2E}{m}} > 0$$

orbity komet nieperiodycznych

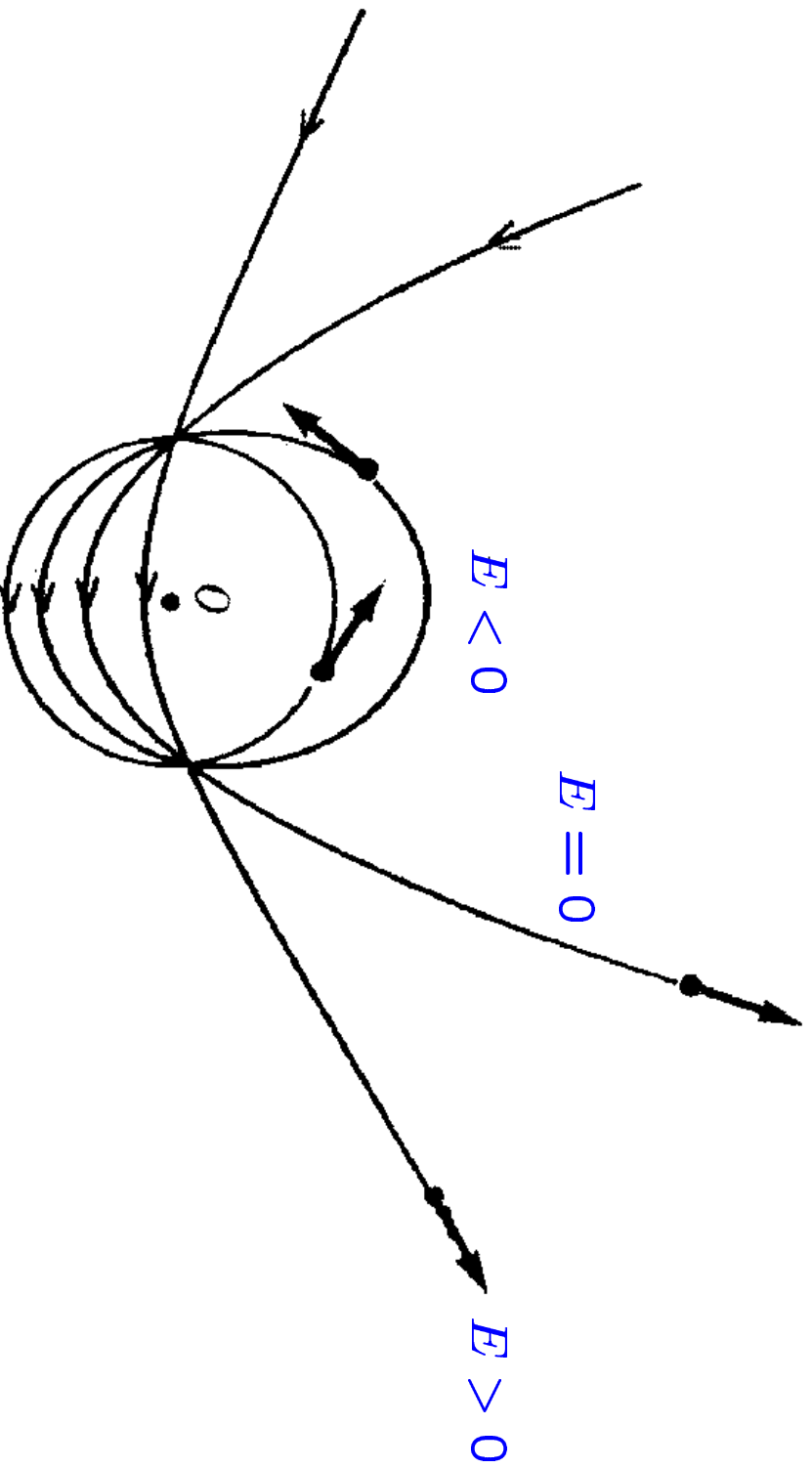
Im mniejsze L

tym mniejsza odległość zbliżenia r_{min}

Ruch w polu grawitacyjnym

Rodzaje orbit

Kształt orbity zależy od energii całkowitej E i momentu pędu ciała L $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$



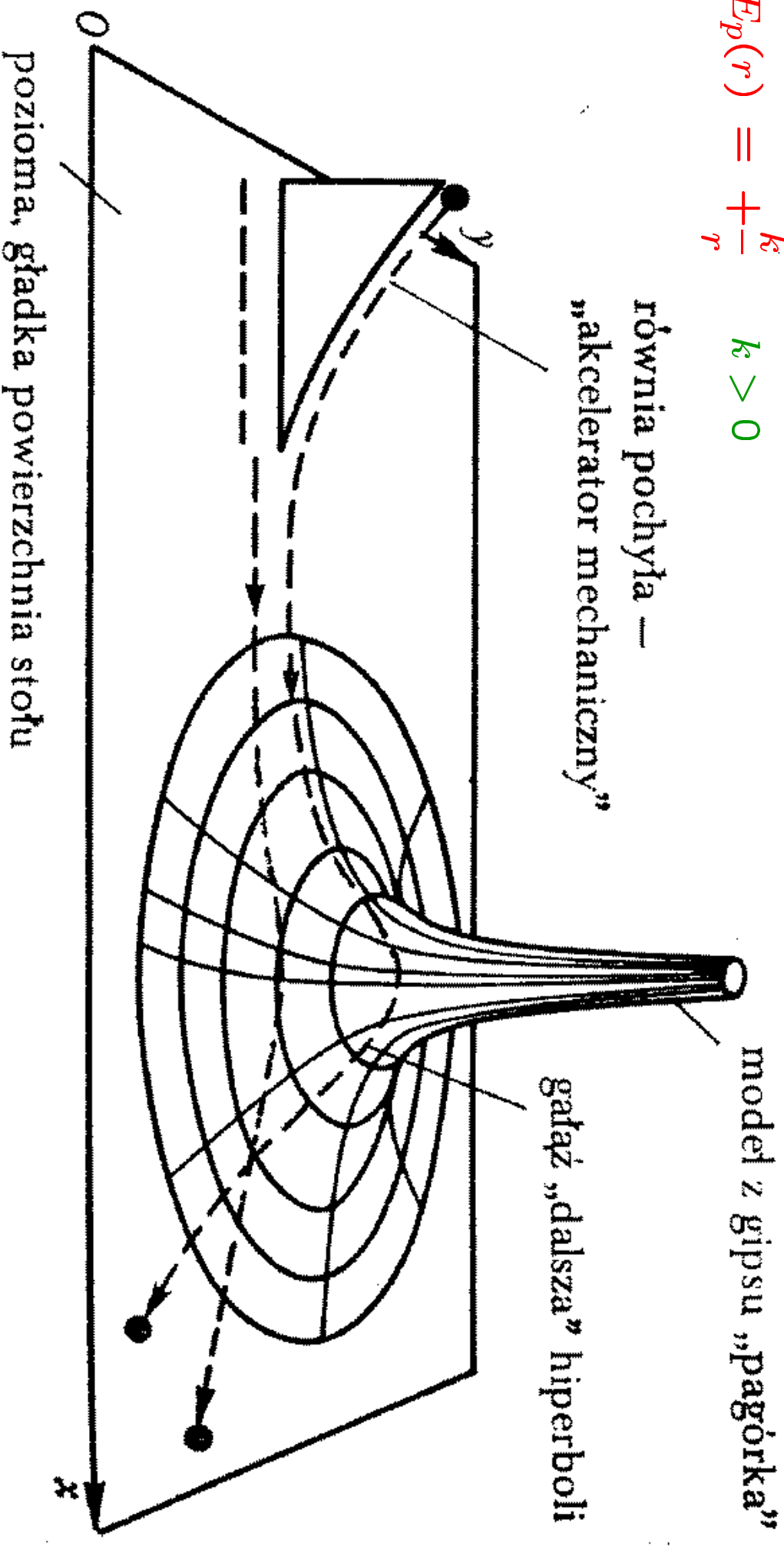
Orbity o tej samej wartości L , lecz o różnych wartościach E

Ruch w polu sił

Potencjał odpychający

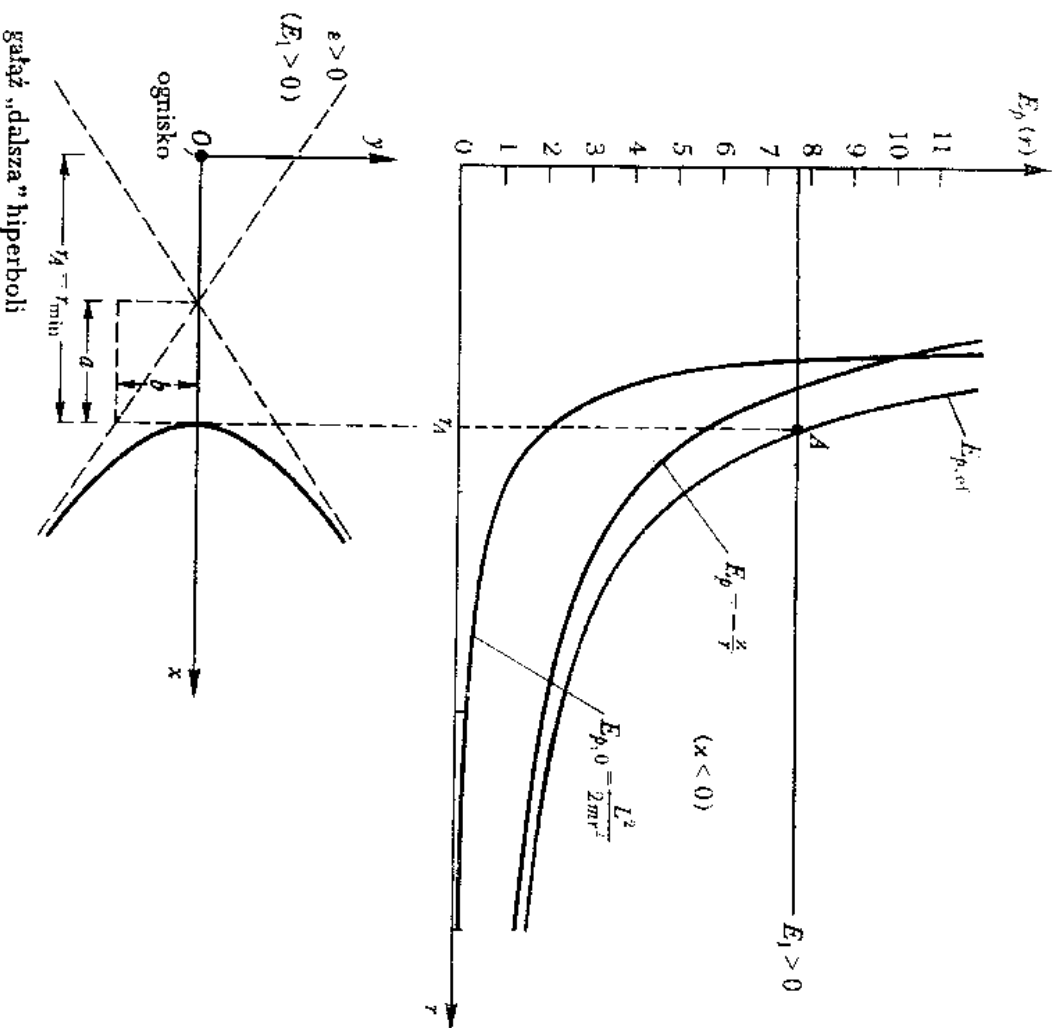
$$E_p(r) = +\frac{k}{r} \quad k > 0$$

równia pochyła —
„akcelerator mechaniczny”



Ruch w polu sił

Potencjał odpychający



Uzyskane rozwiązanie pozostaje słuszne, z dokładnością do zmiany znaku k \Rightarrow zmiana znaku p

$$r(\theta) = \frac{p}{\epsilon \cdot \cos(\theta - \theta_0) - 1}$$

Jak poprzednio $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$

Teraz jednak zawsze $E > 0$

Im większe ϵ , tym większy kąt rozwarcia hiperboli