

Zderzenia

Wstęp do Fizyki I (B+C)

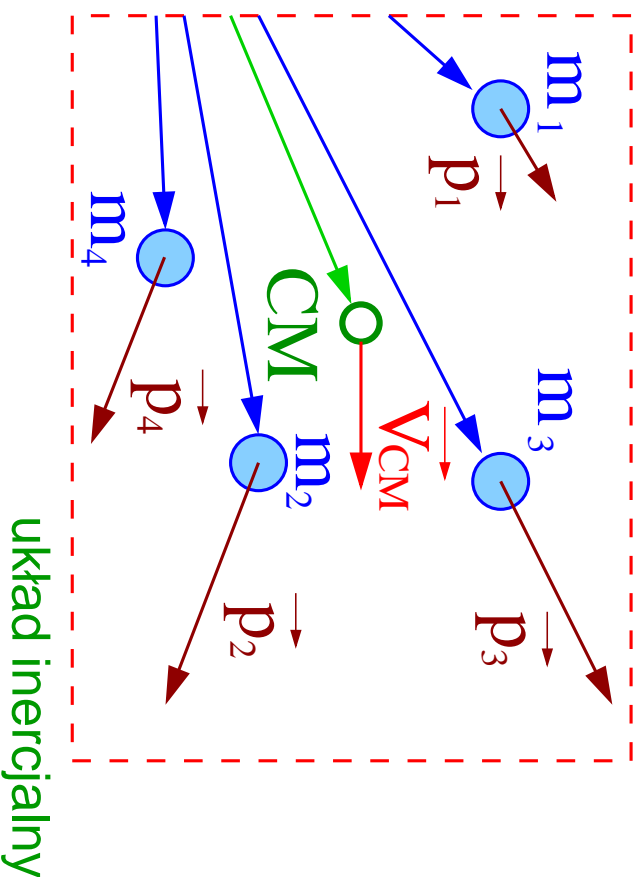
Wykład XV:

- Układ środka masy
- Oddziaływanie dwóch ciał
- Zderzenia
- Doświadczenie Rutherforda

Układ środka masy

Układ izolowany

Izolowany układ wielu ciał:



Zasada zachowania pędu:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{const}$$

Środek masy

Klasyczna definicja położenia środka masy:

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

⇒ średnia ważona z \vec{r}_i (z wagami $w_i = m_i$)

Ruch środka masy: $m_i = \text{const}$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d}{dt} \vec{R} = \frac{\sum_i m_i \frac{d}{dt} \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_i m_i \right) \vec{V}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\Rightarrow \vec{P} = M \vec{V}_{CM} = \sum_i \vec{p}_i$$

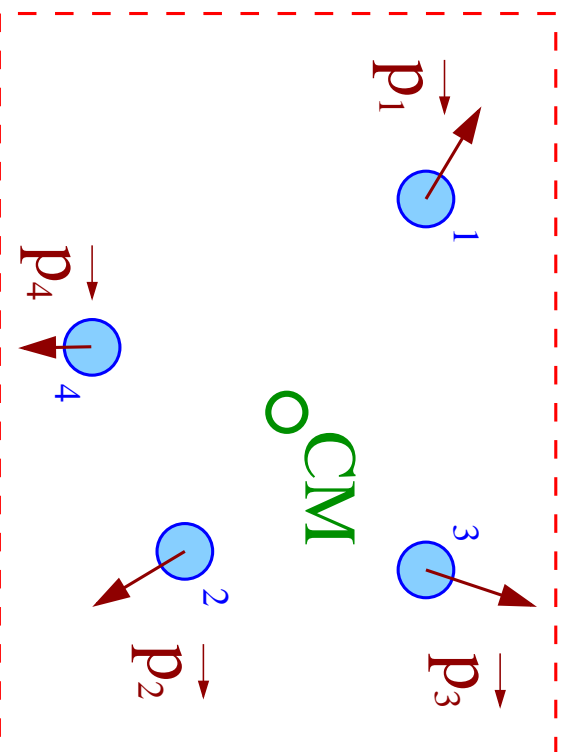
pęd układu możemy związać z ruchem środka masy

Układ środka masy

Prędkość środka masy: (klasycznie)

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{M}$$

Zawsze możemy tak zmienić układ odniesienia, żeby **środek masy spoczywał**



⇒ układ środka masy (CMS)

Układ środka masy

Układ środka masy jest w wielu przypadkach najwygodniejszym układem odniesienia

⇒ szereg relacji bardzo się upraszcza

Zasada zachowania pędu w CMS:
(zmienne w CMS oznaczamy *)

$$\vec{P}^* = \sum_i \vec{p}_i^* = 0$$

ogólna definicja układu środka masy
stosowana także w przypadku $v \sim c$

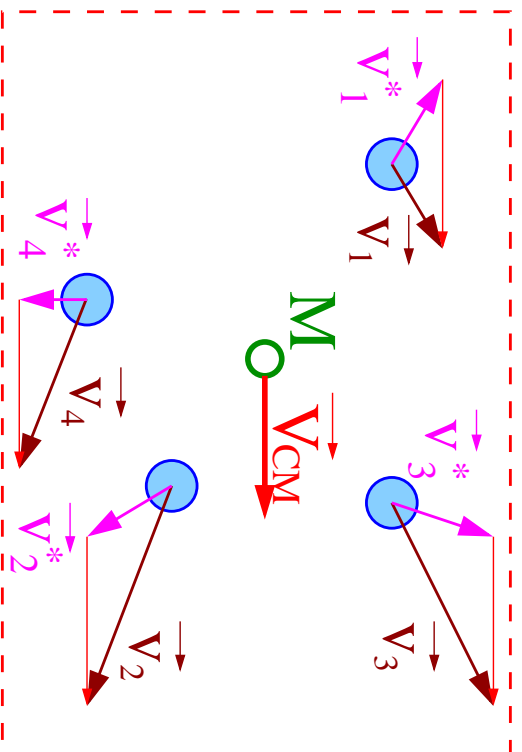
Układ środka masy

Energia układu

Energia kinetyczna układu:

Transformacja galileusza:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{V}_{CM}$$



$$\begin{aligned} E_k &= \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i |\vec{v}_i^* + \vec{V}_{CM}|^2}{2} \\ &= \sum_i \left(\frac{m_i (v_i^*)^2}{2} + 2 \frac{m_i \vec{v}_i^* \vec{V}_{CM}}{2} + \frac{m_i V_{CM}^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Z zasady zachowania pędu:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i^* \vec{V}_{CM} = \vec{V}_{CM} \sum_i m_i \vec{v}_i^* = \vec{V}_{CM} \vec{P}^* = 0$$

Ostatecznie:

$$E_k = E_k^* + \frac{M V_{CM}^2}{2}$$

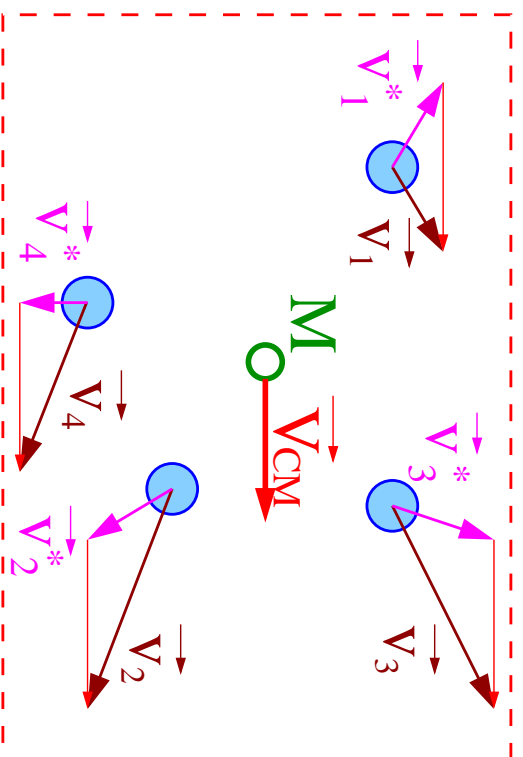
Energia kinetyczna układu jest sumą energii “wewnętrznej” (E_k^*) i energii kinetycznej układu jako całości.

Układ środka masy

Moment pędu układu

Transformacja galileusza:

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{r}_i^{*\star} + \vec{R}_{CM} \\ \vec{v}_i &= \vec{v}_i^{*\star} + \vec{V}_{CM}\end{aligned}$$



Całkowity moment pędu względem początku układu

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} + \vec{r}_i^{*\star}) \times (\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i^{*\star}) \\ &= \left[\sum_i m_i \right] \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{v}_i^{*\star} \\ &\quad + \sum_i m_i \vec{r}_i^{*\star} \times \vec{V}_{CM} + \sum_i m_i \vec{r}_i^{*\star} \times \vec{v}_i^{*\star}\end{aligned}$$

Z definicji CMS: $\sum m_i \vec{v}_i^{*\star} = \sum m_i \vec{r}_i^{*\star} = 0$
 \Rightarrow otrzymujemy:

$$\vec{L} = M \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{L}_{CM}^{*\star}$$

Moment pędu układu jest sumą “wewnętrznego” momentu pędu ($\vec{L}_{CM}^{*\star}$) (względem CM) i momentu pędu układu jako całości.

Układ środka masy

Ruch środka masy

Dla układu izolowanego

$$\vec{P} = \text{const}$$

środek masy pozostaje w spoczynku
lub porusza się ruchem jednostajnym
prostoliniowym | Zasada Dynamiki

Pod działaniem sił zewnętrznych:

$$\vec{F}^{zew} = \sum_i \vec{F}_i^{zew}$$

zmiana pędu układu:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ &= \sum_i \vec{F}_i^{zew} + \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} = \vec{F}^{zew} \end{aligned}$$

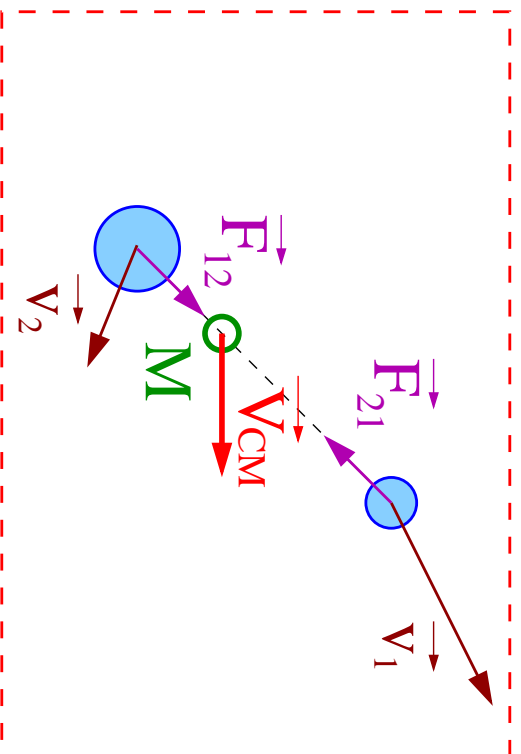
II Zasada Dynamiki

W oparciu o pojęcie **środka masy** możemy opisać ruch układu jako całości
stosując równania ruchu punktu materialnego.

Oddziaływanie dwóch ciał

Ruch względny

Dla układu dwóch ciał zagadnienie ruchu “wewnętrznego” daje się bardzo uprościć.



Względne położenie (np. ciała 2 względem 1):

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Względna prędkość:

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_{12}}{dt}$$

III zasada dynamiki:

Przyspieszenie:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

$$\vec{a}_{12} = \frac{d\vec{v}_{12}}{dt} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \frac{m_2}{m_1}\vec{a}_2$$

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2$$

Układ izolowany !

Oddziaływanie dwóch ciał

Masa zredukowana

Przyspieszenie w ruchu względnym:

$$\vec{a}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{a}_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \frac{\vec{F}_{12}}{m_2}$$

Możemy sprowadzić równania ruchu do postaci:

$$\mu \vec{a}_{12} = \vec{F}_{12}(\vec{r}_{12})$$

$$\text{gdzie } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} - \text{masa zredukowana} \quad \left(\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

Problem względnego ruchu dwóch oddziaływujących ciał możemy sprowadzić do problemu ruchu jednego ciała o masie μ w polu siły $\vec{F}_{12}(\vec{r}_{12})$

Ścisłe w przypadku klasycznym (nierelatywistycznym) dla układu izolowanego.

Obowiązuje też w przypadku sił zewnętrznych nadających ciałom to samo przyspieszenie

Oddziaływanie dwóch ciał

Przykład



Układ Ziemia-Księżyc

$$m_K : m_Z \approx 1 : 81$$

$$\mu \approx 0.988 m_K$$

Ziemia i Księżyc krążą wokół wspólnego środka masy, który znajduje się ok. 4700 km od środka Ziemi.

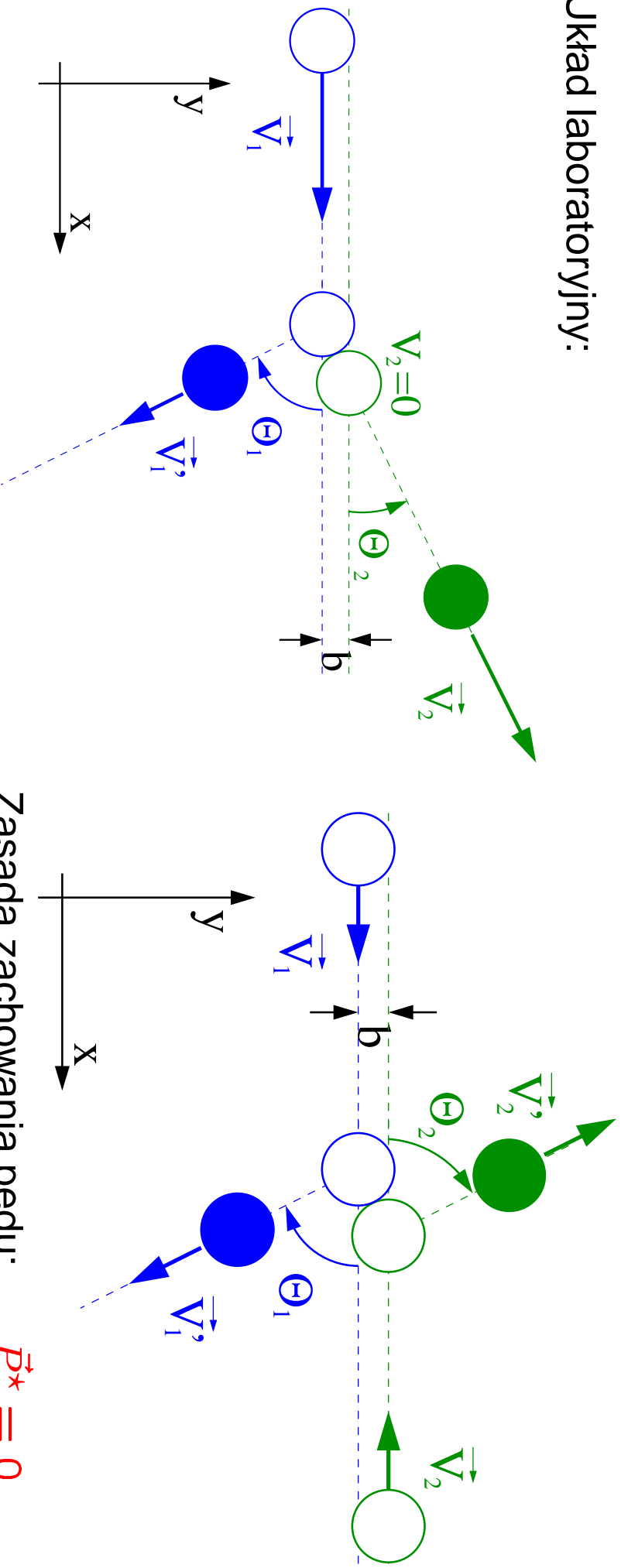
Częstość obiegu jest $\sqrt{\frac{m_K}{\mu}}$ raza większa niż gdyby Ziemia była “nieruchoma” (0.6%)
(przy danych masach i odległości Ziemia-Księżyc; $\mu \omega^2 r_{12} = F(r_{12})$)

Przyjmując, że pole grawitacyjne Słońca jest jednorodne na odległościach Ziemia-Księżyc problem ruchu trzech ciał możemy zredukować do dwóch problemów jednociatowych (ruch względny w układzie Ziemia-Księżyc i w układzie Słońce-[Ziemia+Księżyc])
($R_{SZ} \approx 150\,000$ tys. km. $\gg R_{ZK} \approx 385$ tys. km.; $m_Z : m_S \approx 1 : 335\,000$)

Zderzenia

Zderzenia nie centralne

Układ środka masy:



Układ laboratoryjny:

Skomplikowane wyrażenia na prędkości

końcowe w funkcji np. kąta rozproszenia θ_1 .

Łatwiej jeśli $m_1 = m_2$

Zasada zachowania pędu: $\vec{P}^* = 0$

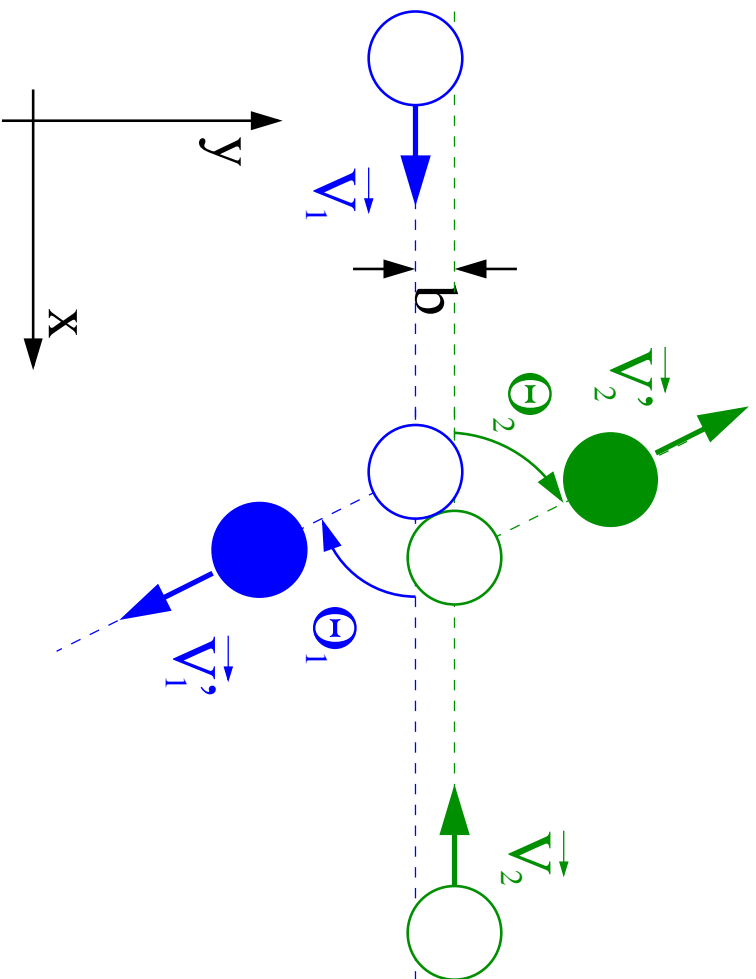
$$\theta_1 = \theta_2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1'}{V_2'} = \frac{m_2}{m_1}$$

Zderzenia

Zderzenia sprężyste

Układ środka masy:



Zasada zachowania energii: $V_2 = \frac{m_1}{m_2} V_1$

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2}$$

$$\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) V_1^2 = \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) V_1'^2$$

$$\Rightarrow V_1' = V_1 \quad V_2' = V_2$$

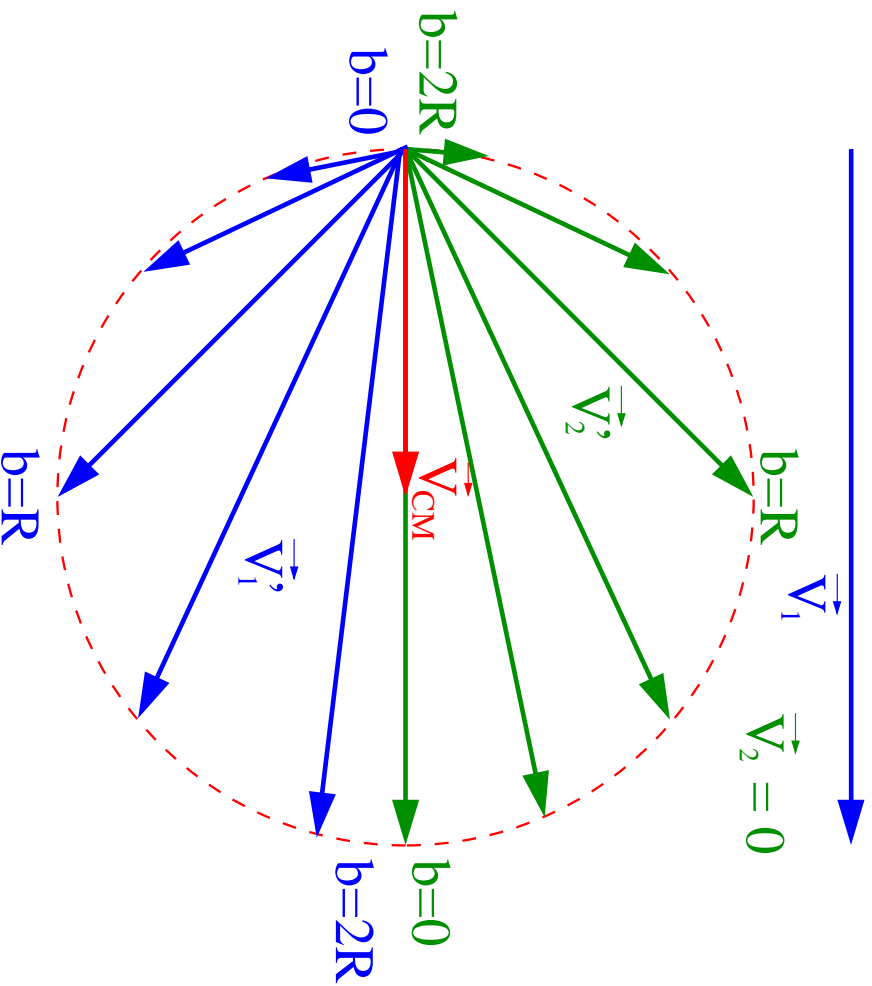
Niezależnie od mas zderzających się ciał, wartości ich prędkości przed i po zderzeniu sprężystym są takie same.

W układzie środka masy !

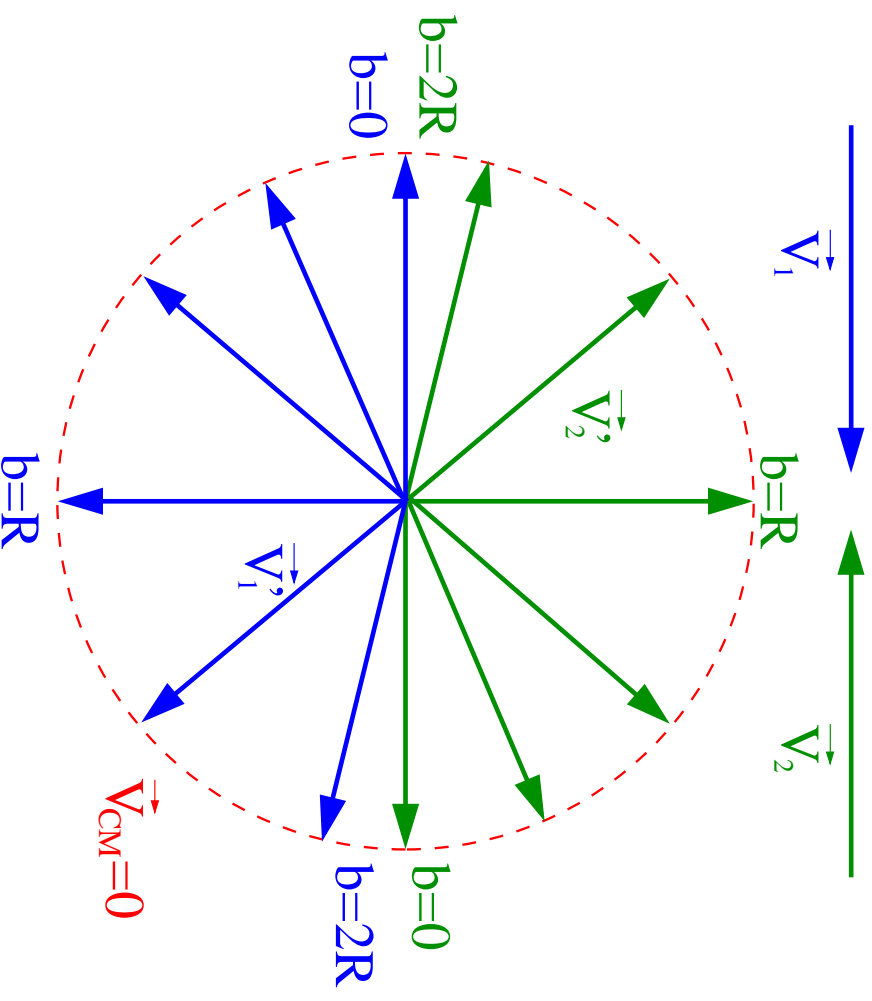
Zderzenia

$$m_1 = m_2$$

Układ laboratoryjny:



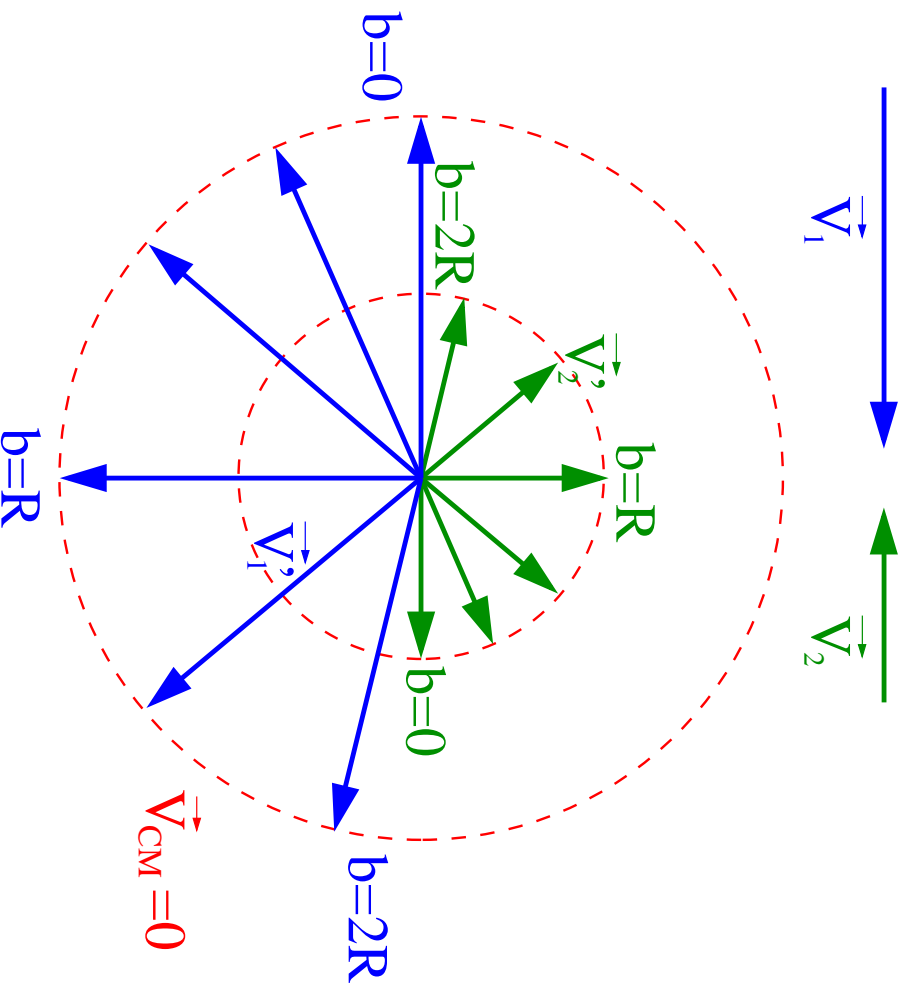
Układ środka masy:



Zderzenia

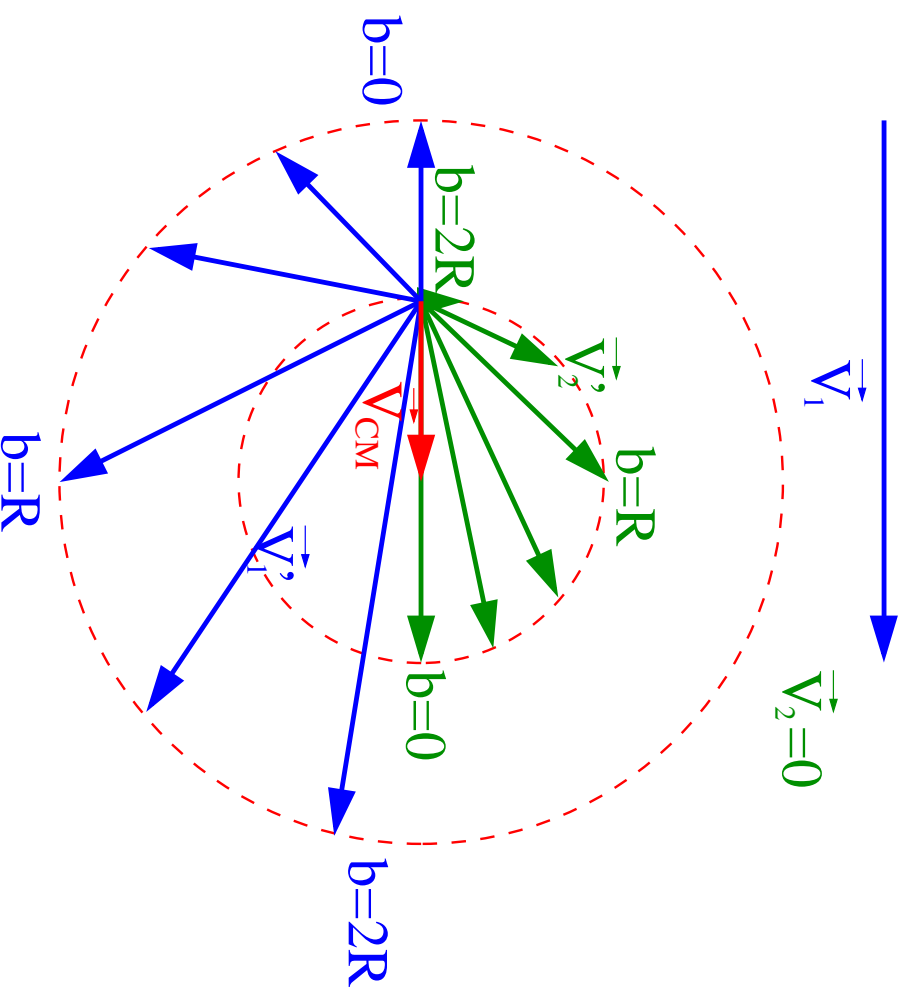
$$m_1 < m_2$$

Układ środka masy:



Dla $m_1 = \frac{1}{2}m_2 \Rightarrow v_1 = 2v_2$

Układ laboratoryjny

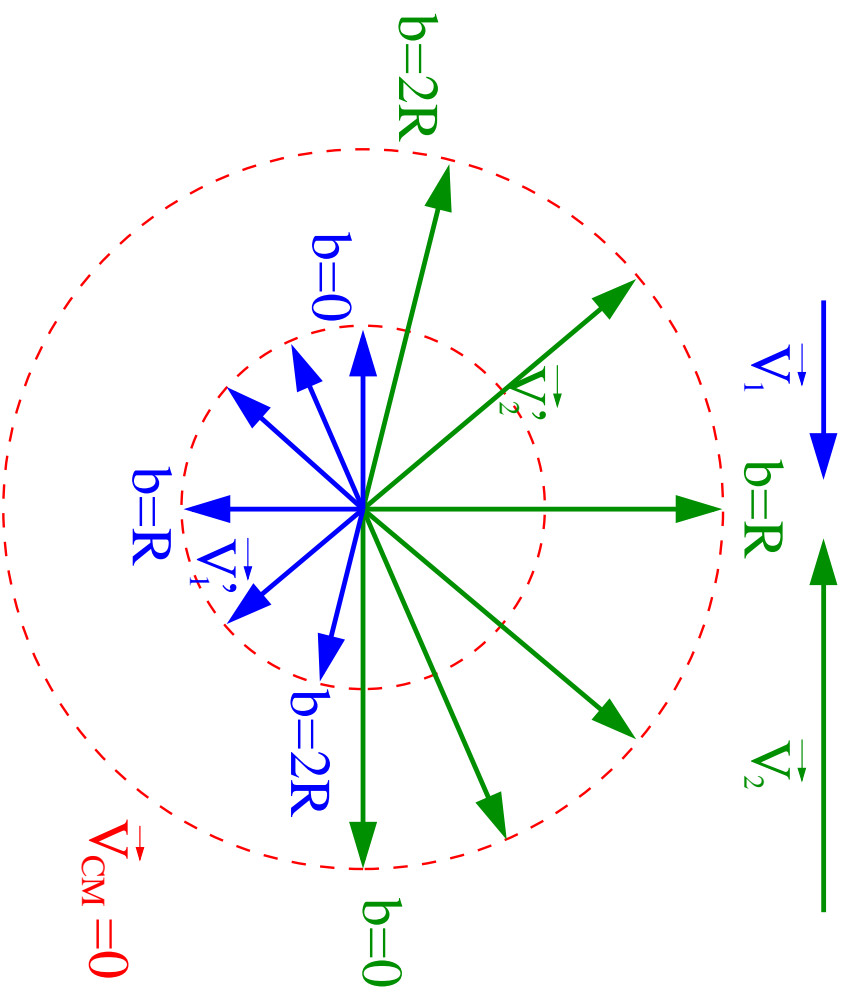


$$V_{CM} = \frac{1}{3}V_1$$

Zderzenia

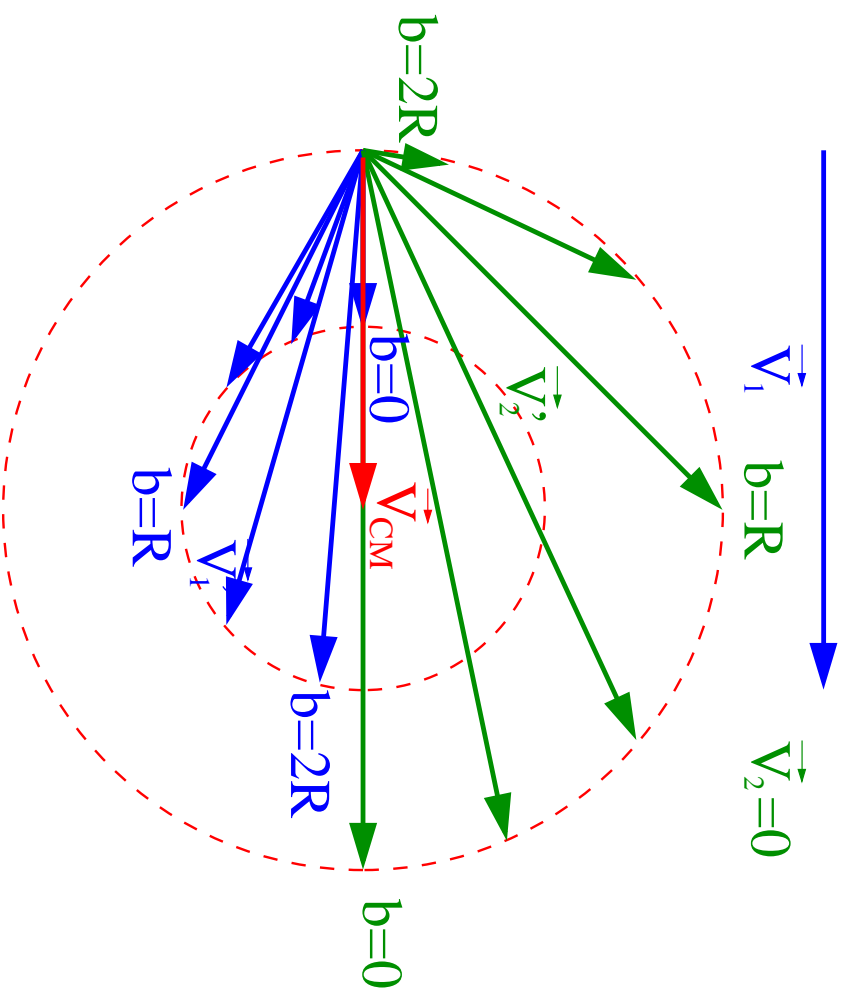
$$m_1 > m_2$$

Układ środka masy:



Dla $m_1 = 2 m_2 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{2} v_2$

Układ laboratoryjny:

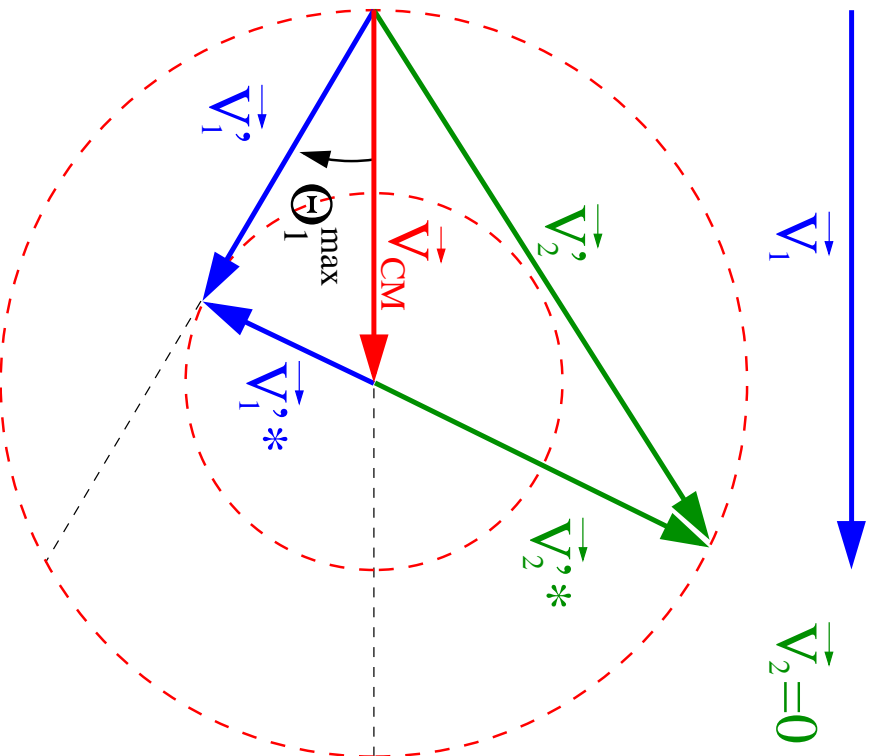


$V_{CM} = \frac{2}{3} V_1$

Zderzenia

$$m_1 > m_2$$

Układ laboratoryjny:



Związek między prędkościami:

$$V_{CM} = v_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1$$

$$v_1^* = \frac{m_2}{m_1} v_2^* = \frac{m_2}{m_1 + m_2} V_1$$

Maksymalny kąt rozproszenia “pocisku”:

$$\sin \theta_1^{max} = \frac{v_1^*}{V_{CM}} = \frac{m_2}{m_1}$$

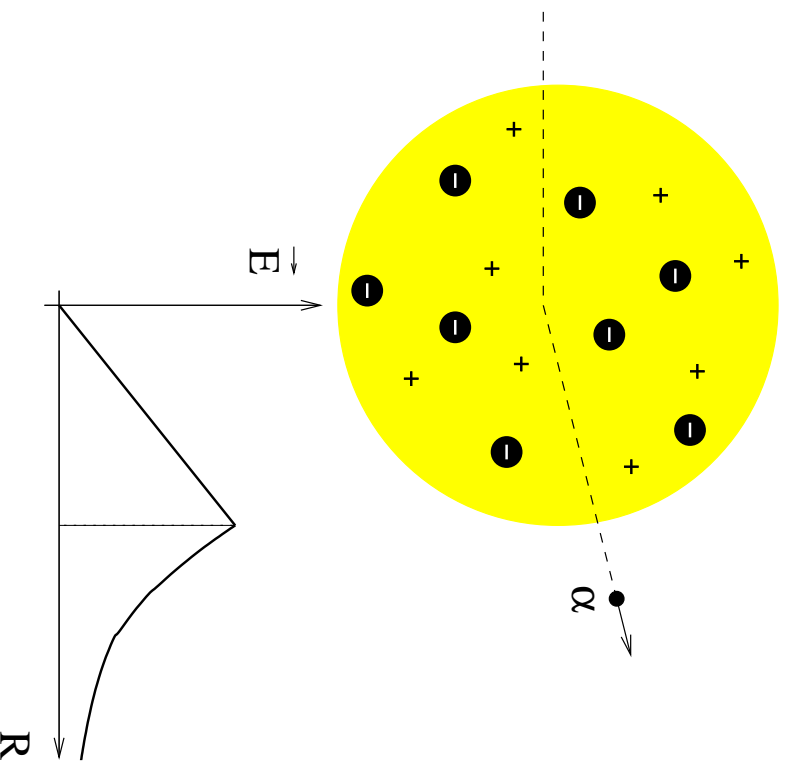
Dla “tarczy” ograniczenie nie zależy od stosunku mas:

$$0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$$

Doświadczenie Rutherforda

Model Thomson

Po odkryciu elektronu (1897), J.J. Thomson zaproponował model atomu w postaci "ciastka z rodzynkami".



Cała **objętość** atomu była jednorodnie **naładowana dodatnio** ("ciastko"), a wewnątrz "pływały" **elektrony** ("rodzynki").

Ponieważ ładunek był rozłożony **równomiernie** w dużej objętości, nie powinien silnie zakłócać ruchu przechodzący cząstek α .

Oczekujemy jedynie niewielkich odchylen toru...

Wpływ elektronów można zaniedbać ze względu na małą masę.

Doświadczenie Rutherforda

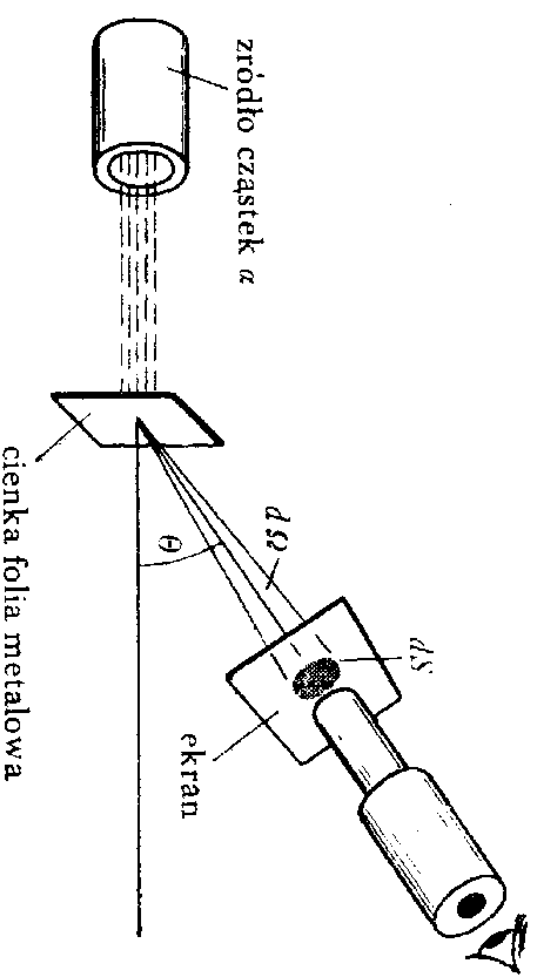
W modelu Thomsona można było oszacować maksymalny kąt rozproszenia cząstki α i był on mały $\theta^{max} \ll \pi$.

Odpowiada to sytuacji rozproszenia “pocisku” na dużo lżejszej “tarczy”.

Masa przypadająca na jednostkę “rozmytego” ładunku atomu wynosiła ok. $\frac{1}{8}$ masy cząstki α .

Doświadczenie Rutherforda

Rozpraszanie cząstek α na cienkiej złotej folii



Obserwowano błyski wywoływane przez padające cząstki na ekranie scyntylacyjnym

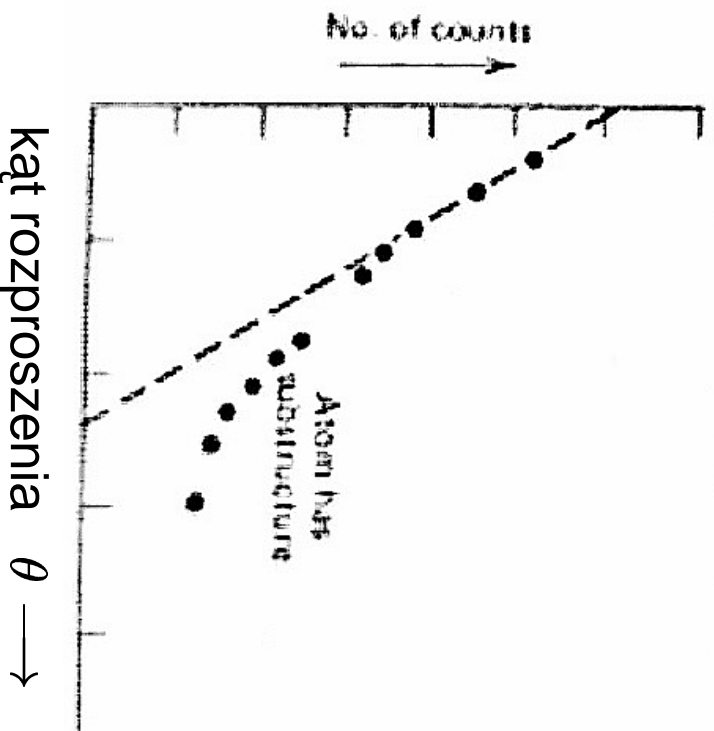
Doświadczenie Rutherforda

Wyniki pomiarów

Przeprawdzonych przez

H.Geigera i E.Marsdena:

Au target *Phil. Mag.* xci, 669 (1911)



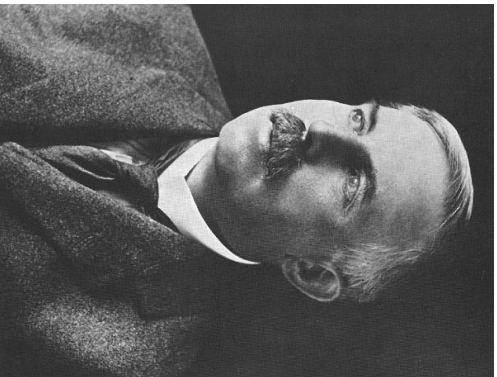
Zaobserwowano rozproszenia cząstek α pod bardzo dużymi kątami, $\theta \gg \theta_{Th}^{max}$, czego nie można było wyjaśnić w modelu Thomsona

“To było tak jakbyście wystrzelili piętnastocalowy pocisk w kierunku kawałka bibułki, a on odbił się i was uderzył.”

E. Rutherford

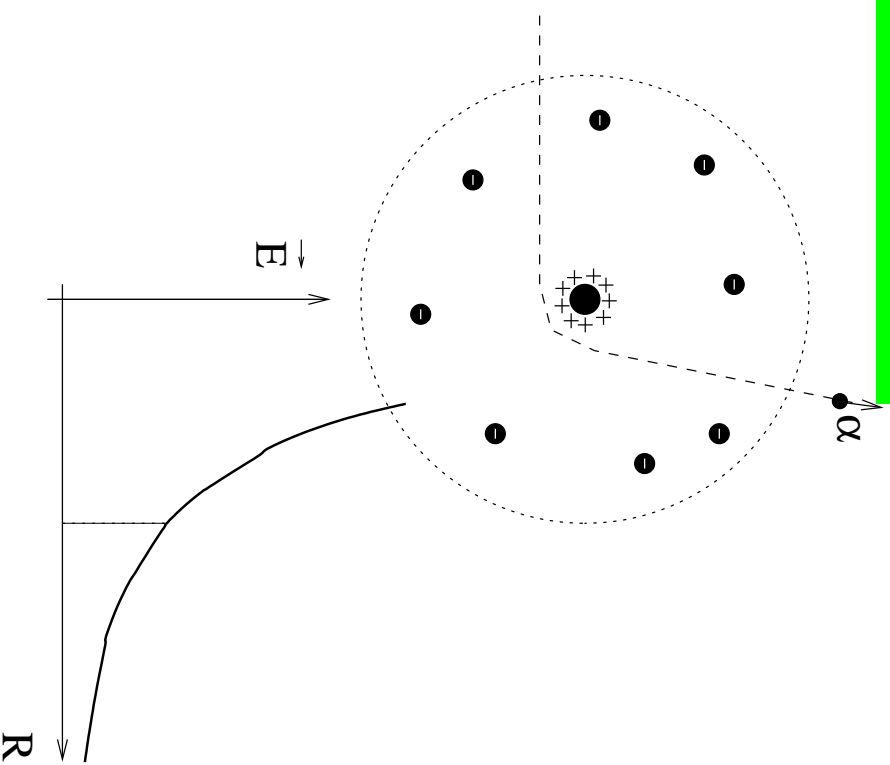
Doświadczenie Rutherforda

Model Rutherforda



Rutherford zaproponował jądroowy model atomu.

Cały dodatni ładunek atomu (10^{-10} m) skupiony jest w praktycznie **punktowym** (10^{-14} m) **jądrze**



Przechodząca cząstka zawsze czuje cały ładunek dodatni \Rightarrow kąty rozproszenia są dużo większe.

Doświadczenie Rutherforda

Model Rutherforda

Ponieważ cząstka α rozprasa się na jądrze jako całości, a masa jądra $M_{Au} \gg M_\alpha$

⇒ brak ograniczeń na kąt rozproszenia cząstki α

możliwe nawet (choć mało prawdopodobne) rozproszenie o $\theta > \pi/2$.

Rozkład kątowy

Obserwowany rozkład kątowy rozproszonych cząstek α

proporcjonalna do tzw. różniczkowego przekroju czynnego

$$N(\theta) \sim \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Wzór Rutherforda

Skończone prawdopodobieństwo rozproszenia $\theta = \pi$!

