

# Bryła sztywna

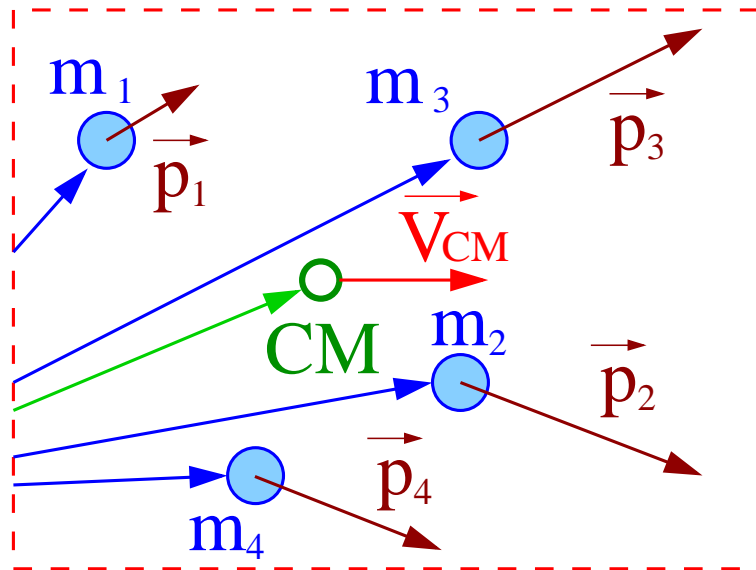
Wstęp do Fizyki I (B+C)

## Wykład XVIII:

- Bryła sztywna
- Opis ruchu
- Statyka

# Bryła sztywna

## Układ wielu ciał



Ruch układu jako całości

Pęd:

$$\vec{P} = M \vec{V}_{CM}$$

Energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{M V_{CM}^2}{2} + E_k^*$$

Moment pędu:

$$\vec{L} = M \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{L}_{CM}^*$$

Masa układu

$$M = \sum_i m_i$$

Położenie środka masy:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

układ inercyjny

$E_k^*$  - energia "wewnętrzna"

$\vec{L}_{CM}^*$  - "wewnętrzny" moment pędu

# Bryła sztywna

## Układ wielu ciał

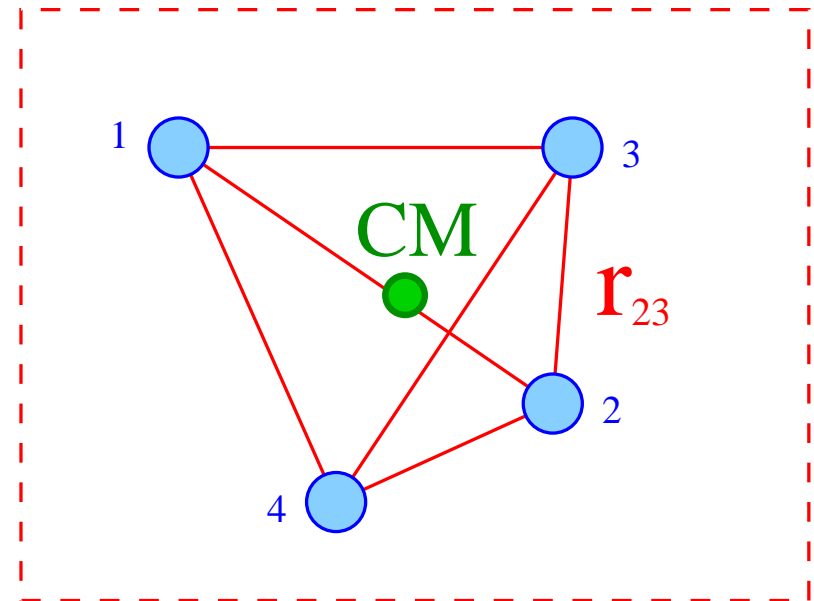
W oparciu o pojęcie **środku masy** możemy opisać **ruch układu** jako całości stosując równania ruchu **punktu materialnego**.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{zw}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{zw}$$

Natomiast **ruch względny** ciał układu może być (w ogólnym przypadku) bardzo skomplikowany...

## Przypadek szczególny



$$r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const}$$

Układ ciał w którym względne odległości są stałe  $\Rightarrow$  **bryła sztywna** (uogólniona)

# Bryła sztywna

Naogół **ciałem sztywnym** nazywamy ciało makroskopowe, które nie podlega deformacjom - **wszystkie punkty mają względem siebie stałe odległości.**

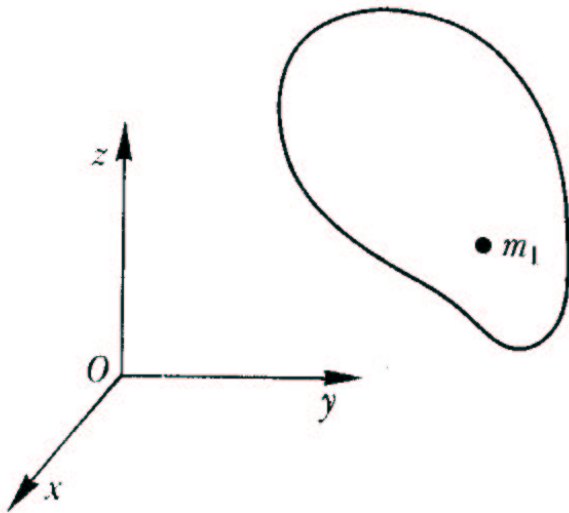
## Położenie

Aby jednoznacznie określić położenie bryły sztywnej w przestrzeni, trzeba określić:

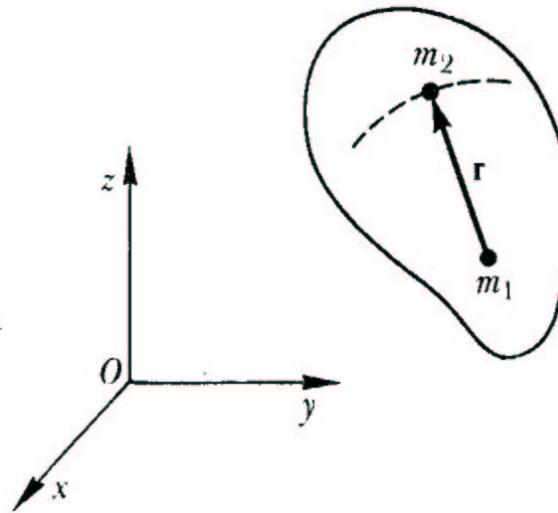
położenie wybranego punktu  
np. środka masy

położenie drugiego punktu

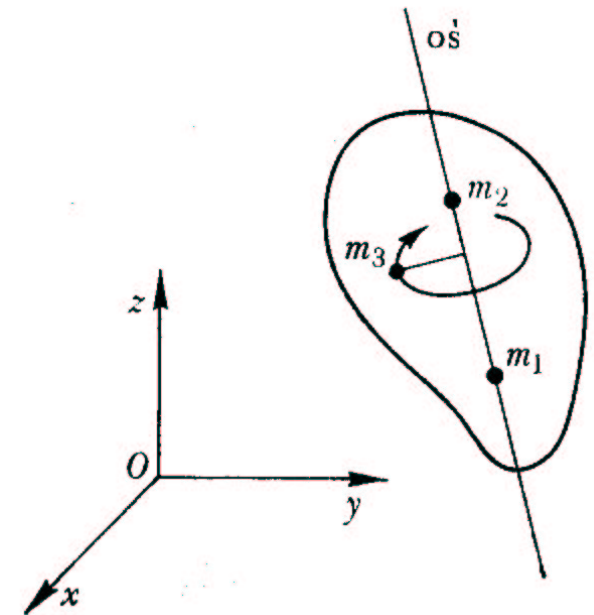
położenie trzeciego punktu



3 parametry  
(stopnie swobody)



2 parametry  
(położenie na sferze)



1 parametr (położenie na okręgu)

⇒ łącznie mamy **6 stopni swobody**

# Opis ruchu

Położenie bryły sztywnej opisują 3 współrzędne i 3 kąty

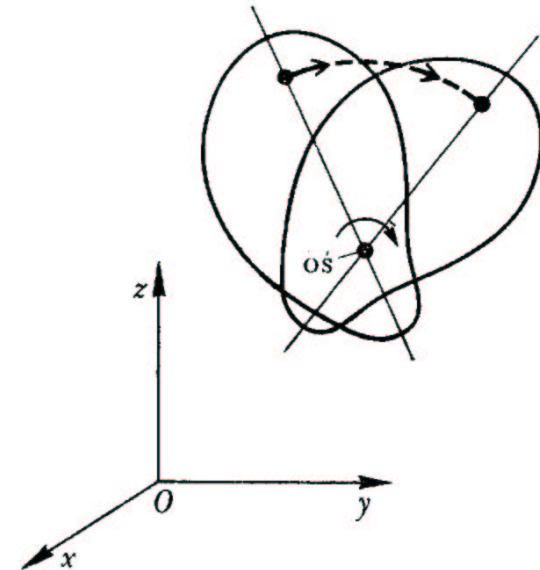
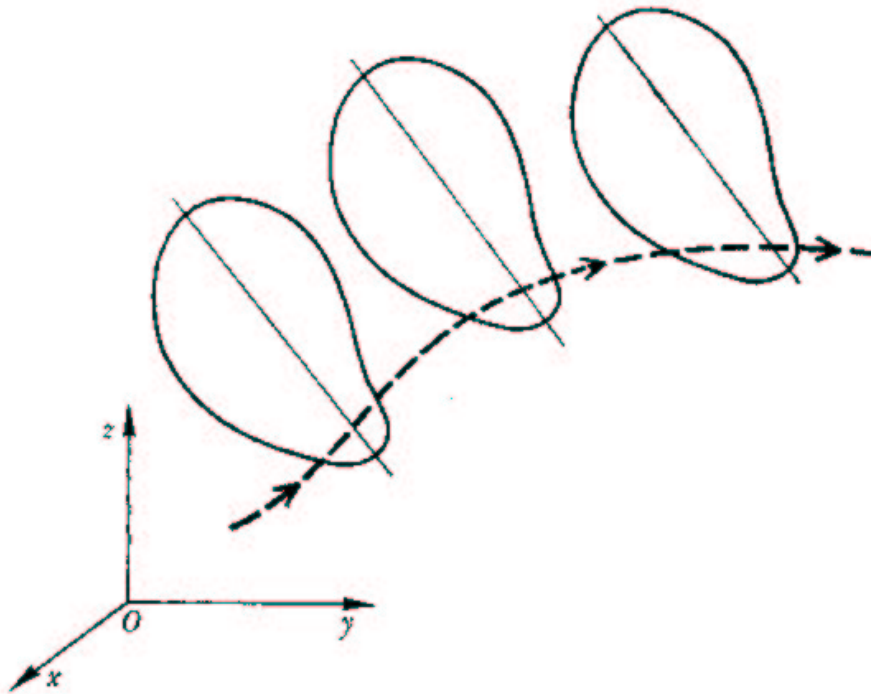
## Złożenie ruchów

Ogólny ruch (zmianę położenia) można przedstawić jako złożenie

ruchu postępowego

oraz

ruchu obrotowego



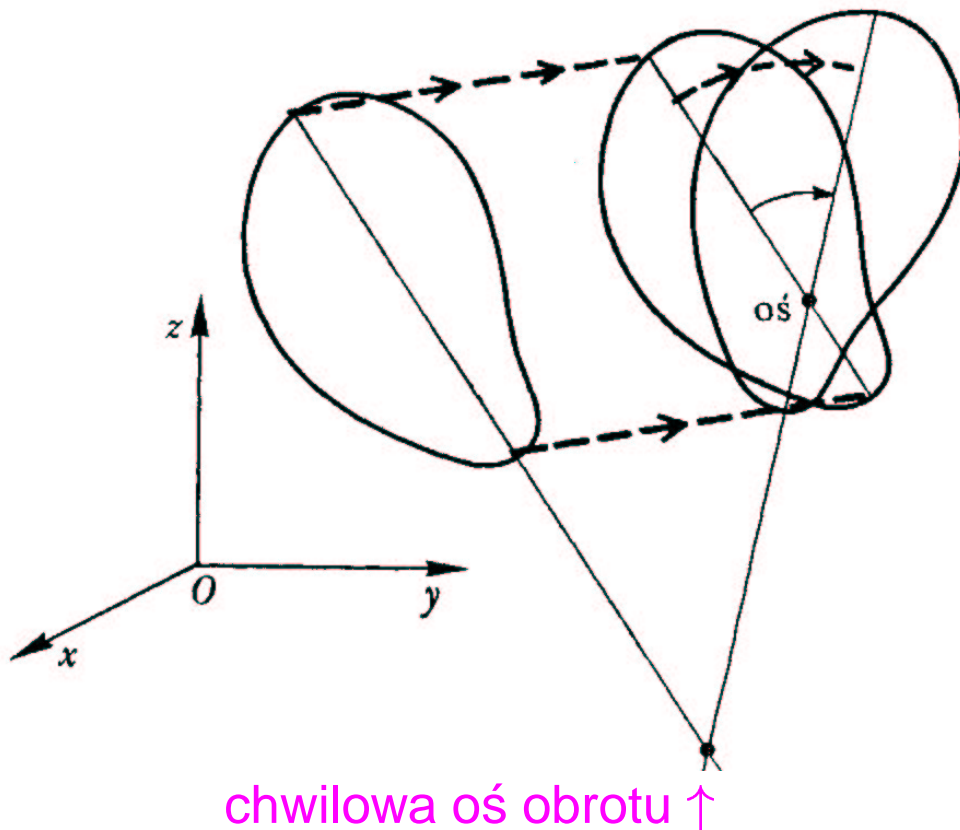
wszystkie punkty poruszają się po okręgach

wektory prędkości są takie same dla wszystkich punktów

# Opis ruchu

## Chwilowa oś obrotu

Czasami złożenie ruchu **postepowego** i **obrotowego** (względem np. środka masy) można przedstawić jako ruch obrotowy względem **chwilowej osi obrotu**



$$\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

Jeśli  $\vec{V}_{CM} \perp \vec{\omega}$  wtedy:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}')$$

$\vec{R}'$  - położenie chwilowej osi obrotu  
(zmiennie w czasie)

# Opis ruchu

## Więzy

Ruch bryły sztywnej w ogólnym przypadku opisuje kolejnych 6 parametrów (np. **prędkość** środka masy i **prędkość kątowa** w układzie środka masy)

W wielu zagadnieniach ruch bryły sztywnej jest jednak ograniczony przez **więzy**:

- koło obracające się na nieruchomej osi  $\Rightarrow$  jeden stopień swobody (kąt obrotu)
- walec toczący się bez poślizgu  $\Rightarrow$  jeden st. swobody (kąt obrotu **lub** przesunięcie)
- walec toczący się z poślizgiem  $\Rightarrow$  dwa stopnie swobody (kąt obrotu **i** przesunięcie)
- kulka toczące się bez poślizgu  $\Rightarrow$  trzy stopnie swobody (trzy składowe  $\vec{\omega}$ )

W rozwiązywaniu zagadnień kluczowe jest zrozumienie jakie są stopnie swobody

Obecność więzów oznacza też obecność **sił reakcji** więzów...

# Statyka

## Warunek równowagi

Bryła sztywna pozostaje nieruchoma, wtedy i tylko wtedy, gdy działające na nią **siły** i **momenty sił** równoważą się:

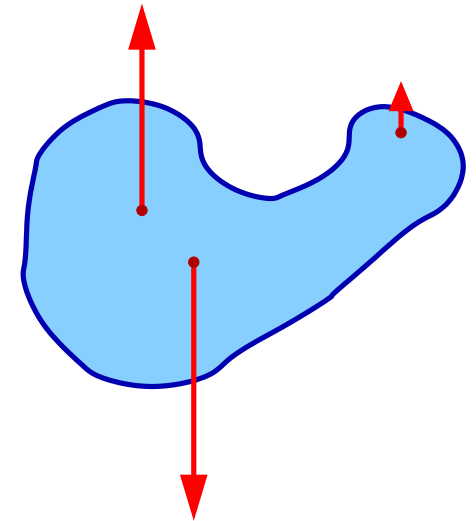
$$\vec{F}^{zw} = \sum_i \vec{F}_i^{zw} = 0 \iff \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

$$\vec{M}^{zw} = \sum_i \vec{M}_i^{zw} = 0 \iff \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

Jeśli  $\vec{F}^{zw} = 0$  to **wypadkowy moment sił** względem każdej osi jest taki sam! (wystarczy sprawdzić raz)

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{R}$$

$$\vec{M}' = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{M}$$



Siłami z którymi naogół będziemy mieli do czynienia są siła ciężkości i siły reakcji więzów

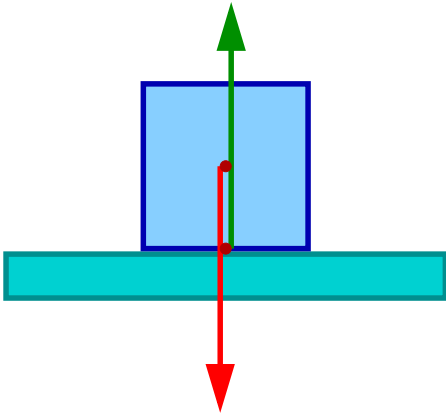


# Statyka

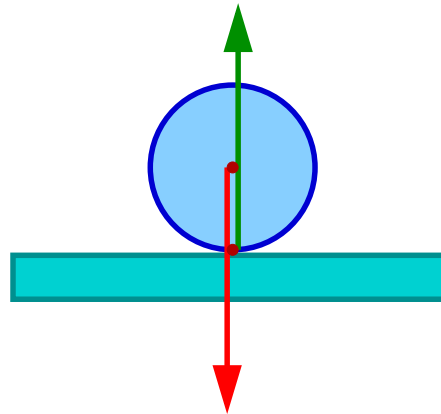
## Równowaga

Nawet jeśli warunek  $\vec{F}^{zw} = \vec{M}^{zw} = 0$  jest spełniony, równowaga może być:

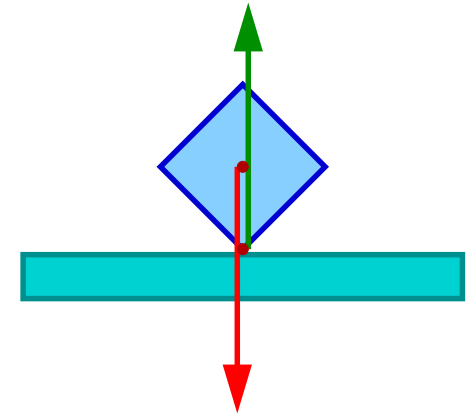
trwała



obojętna



chwiejna



Nieznaczne (infinitesimalne) wychylenie bryły z położenia równowagi powoduje:

pojawienie się siły wypadkowej (momentu siły) przywracającej równowagę

zmianę położenia równowagi

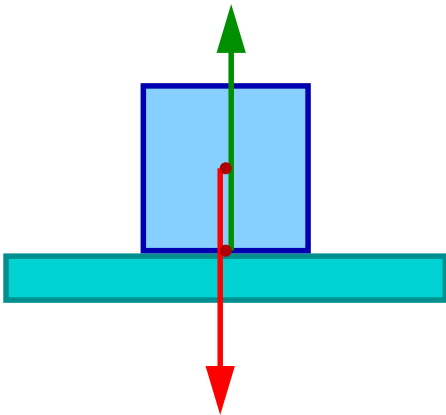
pojawienie się siły wypadkowej zwiększającej wychylenie

# Statyka

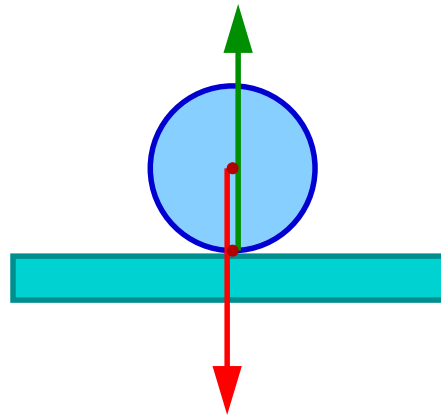
## Równowaga

Równowaga bryły na którą działa siła ciężkości i siły reakcji można sklasyfikować patrząc na położenie środka masy (energię potencjalną):  $(\vec{F} = -\text{grad}E_p)$

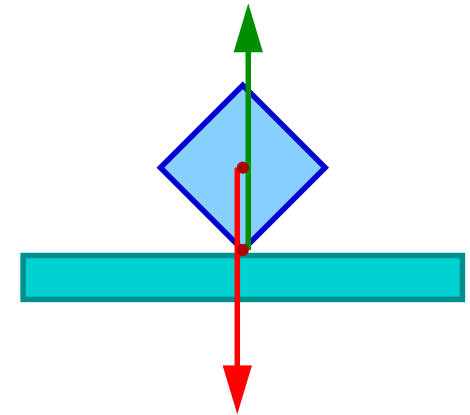
równowaga trwała



obojętna



chwiejna



Nieznaczne (infinitesimalne) wychylenie bryły z położenia równowagi powoduje:

podniesienie środka masy  
wzrost energii potencjalnej

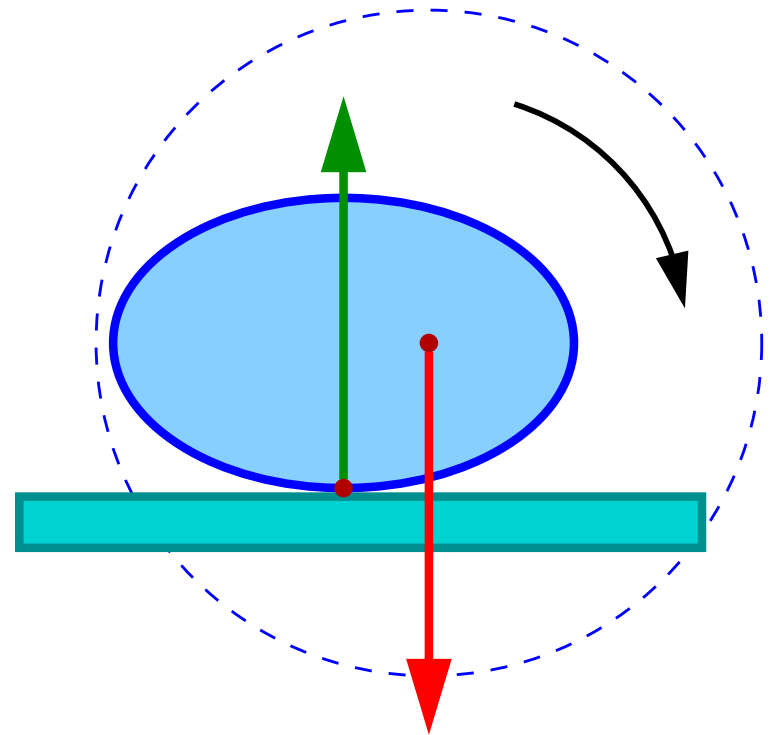
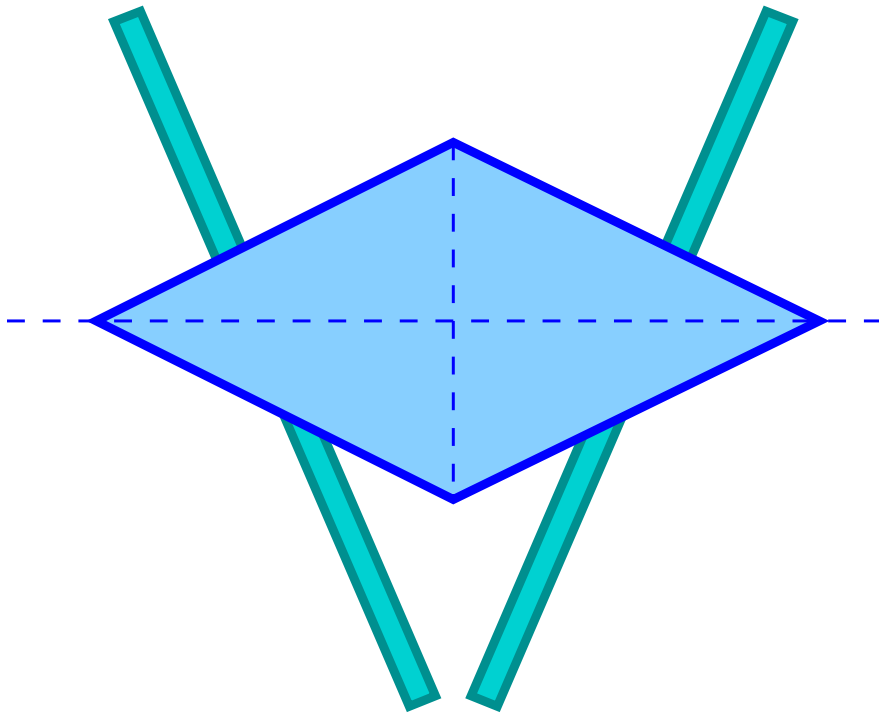
brak zmian położenia  
środka masy

obniżenie środka masy  
zmniejszenie energii potencjalnej

# Statyka

## Przykład

Dwu-stożek położony na nierównoległych szynach:



Gdy szyny są poziome, stożek będzie się poruszał w kierunku szerszego końca.

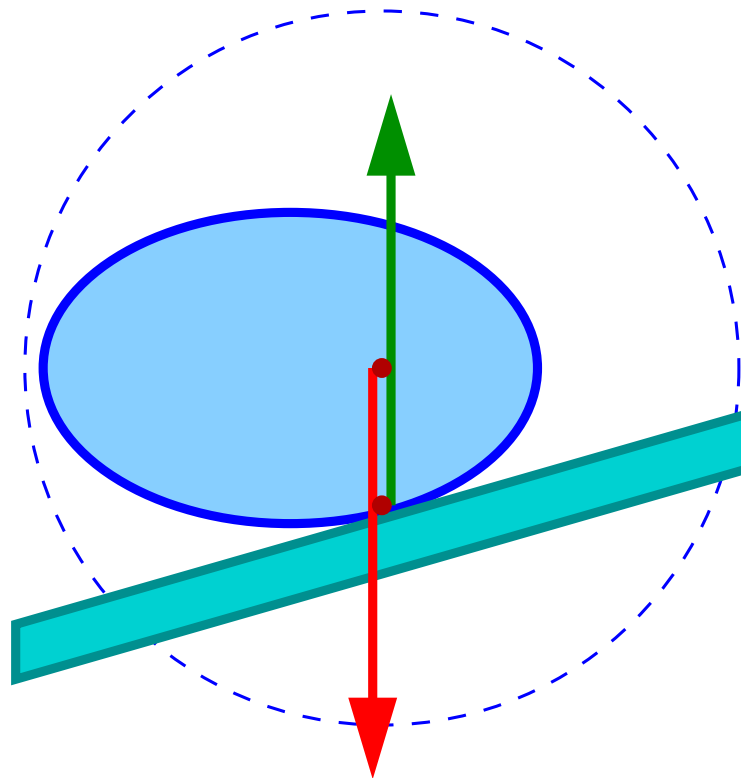
Siła ciężkości i reakcji szyn się równoważą, ale wypadkowy moment sił nie będzie zerowy.

Szyny stykają się ze stożkiem wzdłuż łuku elipsy z osią stożka (środkiem masy) w jednym z ognisk...

# Statyka

## Przykład

Równowagę osiągniemy gdy szyny będą pochylone pod odpowiednim kątem (szerszy koniec wyżej)



Oś stożka pozostaje cały czas na tej samej wysokości ( $E_p = const$ )