Bryła sztywna

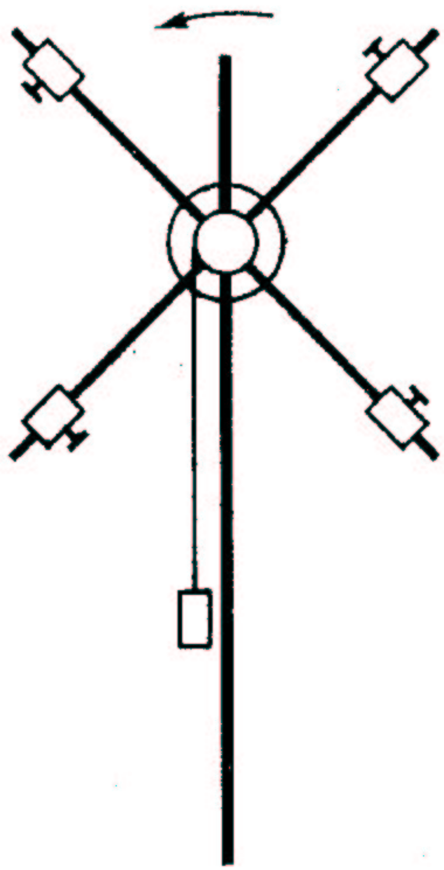
Wstęp do Fizyki I (B+C)

Wykład XIX:

- Prawa ruchu
- Moment bezwładności
- Energia ruchu obrotowego

Prawa ruchu

Obrót wokół ustalonej osi



Dla bryły sztywnej obracającej się wokół ostalonej osi mement pędu (skalarnie):

$$L = \omega \sum_i m_i \, r_{\perp\, i}^2 = \omega \, I \qquad \omega = \frac{d\phi}{dt}$$

$r_{\perp\, i}$ - odległość masy i od osi obrotu,
I - moment bezwładności **względem wybranej osi**.

Pod wpływem stałego momentu siły M:

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \sum_i m_i \, r_{\perp\, i}^2 = \varepsilon \, I$$

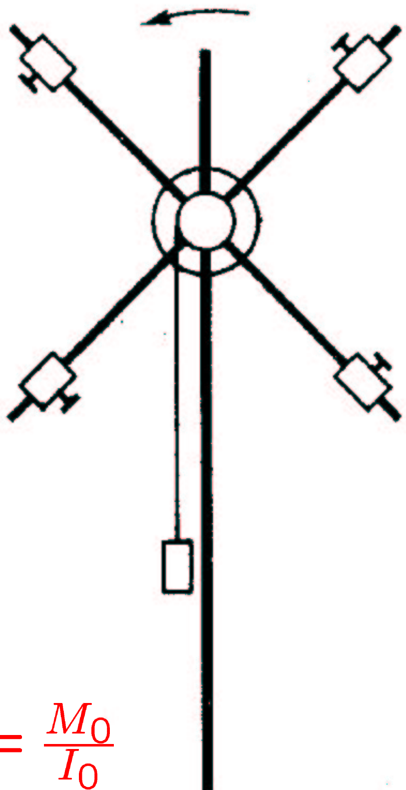
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad - \quad \text{przyspieszenie kątowe}$$

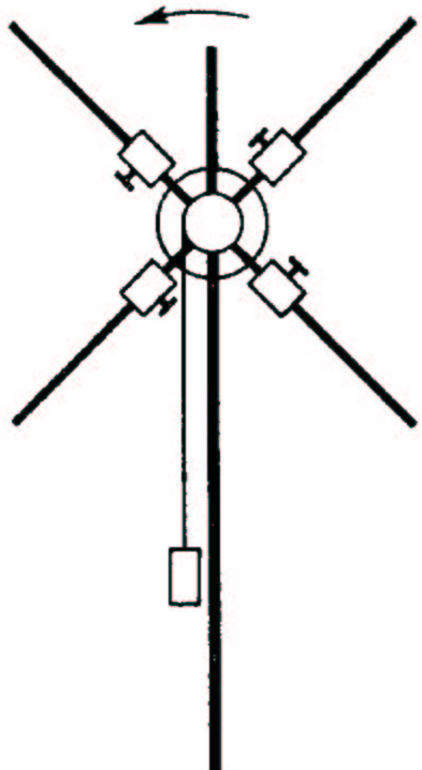
$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{M}{I} = \text{const}$$

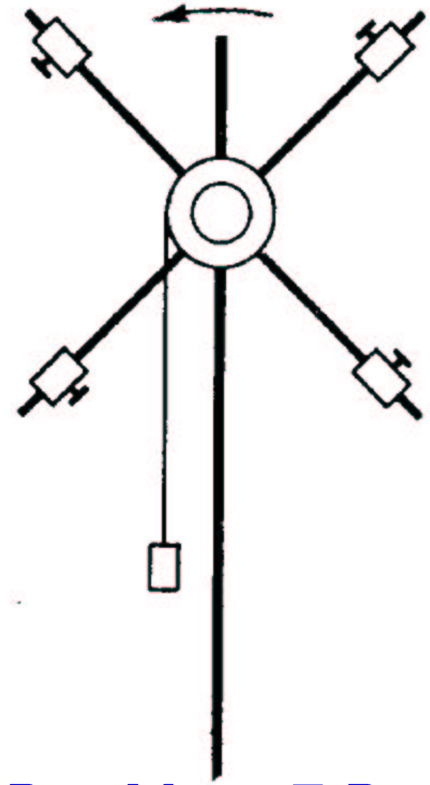
ruch jednostajnie przyspieszony (dla I=const)

Prawa ruchu

Ruch jednostajnie przyspieszony







$\varepsilon_0 = \frac{M_0}{I_0}$

$I_0 \approx 4mr_0^2$

$I \approx 4mr^2 < 4mr_0^2$

$\Rightarrow \varepsilon = \frac{M_0}{I} > \varepsilon_0$

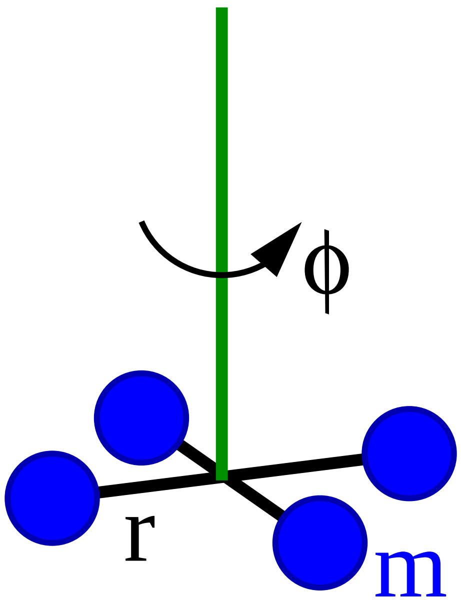
$M = F\,R > M_0 = F\,R_0$

$\Rightarrow \varepsilon = \frac{M}{I_0} > \varepsilon_0$

położenie ciężarka: $h = \phi \cdot R$

Prawa ruchu

Ruch harmoniczny



Moment siły zależy od kąta skręcenia pręta ϕ:

$$M = -\xi\,\phi$$

ξ - współczynnik “sprężystości”
moment siły ma znak przeciwny do skręcenia

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\, I = \frac{d^2\phi}{dt^2}\, I$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{\xi}{I}\,\phi$$

równanie oscylatora harmonicznego.
Częstość drgań:

$$\nu = \sqrt{\frac{\xi}{I}} = \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sum_i m_i\, r_{\perp\, i}^2}} \approx \frac{\sqrt{\xi}}{2r\sqrt{m}}$$

Moment bezwładności

Przyspieszenie kątowe w ruchu bryły sztywnej zależy nie tylko od masy całkowitej, ale także od jej rozłożenia względem osi obrotu.

Rozkład masy względem wybranej osi obrotu
(najczęściej przechodzącej przez środek masy, ale nie koniecznie)
opisuje moment bezwładności

$$I = \sum_i m_i \, r^2_{\perp\, i}$$

w przypadku ciągłego rozkładu masy - całka po objętości:

$$I = \int dV \, \rho \, r^2_{\perp}$$

Dla ciała jednorodnego (ρ = const = $\frac{M}{V}$):

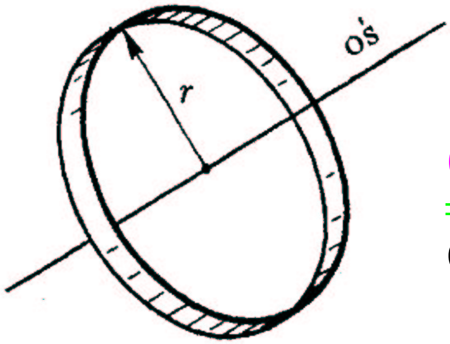
$$I = \frac{M}{V} \int dV \; r^2_{\perp} = M \, \frac{\int dV \; r^2_{\perp}}{\int dV} = M \langle r^2_{\perp} \rangle$$

gdzie $\langle r^2_{\perp} \rangle$ - średni kwadrat odległości od osi obrotu

Moment bezwładności

Stosunek momentu bezwładności do masy zależy od kształtu i rozmiarów ciała:

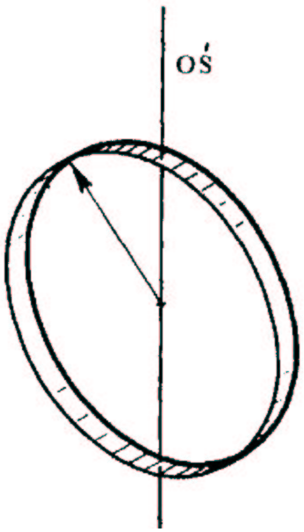
$$\frac{I}{M} = \langle r_{\perp}^2 \rangle$$



Obręcz (pusta w środku)

Obrót **wokół osi symetrii** $\Rightarrow$ wszystkie punkty równoodległe od osi:

$$\langle r_{\perp}^2 \rangle = r^2 \quad \Rightarrow \quad I_{\perp} = M\, r^2$$



Obrót **wokół średnicy**

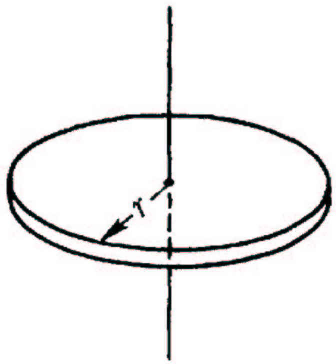
oś obrotu - oś X, średnica prostopadła do osi obrotu - oś Y

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \textbf{i} \quad \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle r_{\perp}^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \frac{1}{2} r^2$$

$$\Rightarrow \quad I_{\parallel} = \frac{1}{2} M\, r^2$$

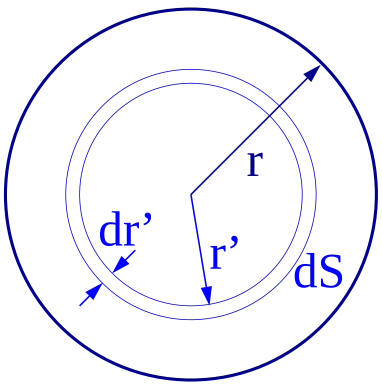
Moment bezwładności



Koło (krążek - masa rozłożona po powierzchni)

Obrót **wokół osi symetrii**

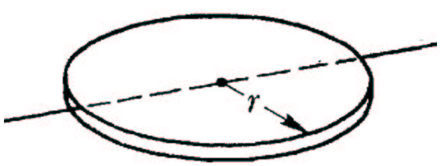
Koło = suma wielu obręczy $\Rightarrow$ śrenia po powierzchni:



$$\langle r_\perp^2 \rangle = \frac{\int r'^2 \cdot dS}{S} = \frac{1}{\pi r^2} \int r'^2 \cdot 2\pi r' dr'$$

$$= \frac{2\pi}{\pi r^2} \frac{1}{4} r^4 = \frac{1}{2} r^2$$

$$\Rightarrow \quad I_\perp = \frac{1}{2} M r^2$$

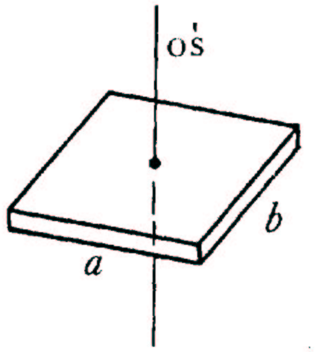


Obrót **wokół średnicy**

Dla każdej obręczy $\langle r'^2_\perp \rangle$ zmniejsza się 2 razy

$$\Rightarrow \quad I_\parallel = \frac{1}{4} M r^2$$

Moment bezwładności



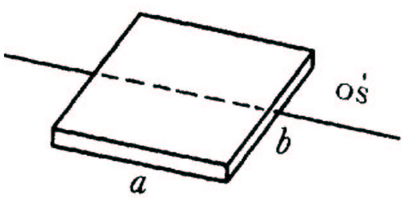
Prostokąt (masa rozłożona po powierzchni)

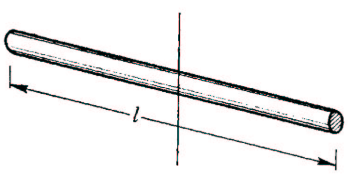
Obrót **wokół osi prostopadłej**, przechodzącej przez środek masy

$$\langle r_{\perp}^{2} \rangle = \frac{\int (x^2 + y^2) \cdot dS}{S} = \frac{1}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \, (x^2 + y^2)$$

$$= \frac{1}{ab} \frac{1}{12} (a^3 b + a b^3) = \frac{1}{12} (a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow \quad I_{\perp} = \frac{1}{12} M \, (a^2 + b^2)$$





Obrót **wokół osi równoległej**, przechodzącej przez środek masy

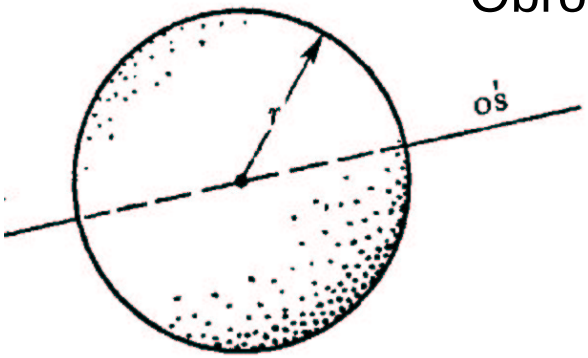
Wymiar wzdłuż osi obrotu przestaje być istotny $\Rightarrow$ pręt

$$\Rightarrow \quad I_{\parallel} = \frac{1}{12} M \, b^2 = \frac{1}{12} M \, l^2$$

Moment bezwładności

Sfera (masa rozłożona na powierzchni kuli)

Obrót **wokół osi symetrii**



$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{i} \quad \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle r_\perp^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle = \frac{2}{3} r^2$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2}{3} M r^2$$

Kula (masa rozłożona objętościowo)

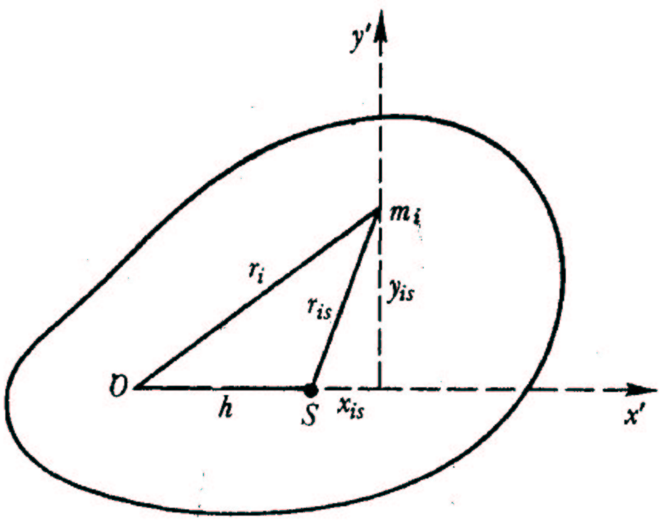
Suma wielu sfer $\Rightarrow$ śrenia po objętości:

$$\langle r_\perp^2 \rangle = \frac{\int \frac{2}{3} r'^2 \cdot dV}{V} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int \frac{2}{3} r'^2 \cdot \pi r'^2 dr'$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\pi}{\frac{4}{3}\pi r^3} \frac{1}{5} r^5 = \frac{2}{5} r^2 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2}{5} M r^2$$

Moment bezwładności

Twierdzenie o osiach równoległych



Zazwyczaj liczymy moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek ciężkości S
(wszystkie podane przykłady)

Bryła może jednak wirować wokół dowolnej osi...

Moment bezwładności względem osi równoległej 0, odległej o h od osi S: (XY: układ środka masy)

$$r_{iO}^2 = (x_i + h)^2 + y_i^2 \;=\; h^2 + 2hx_i + r_{iS}^2$$

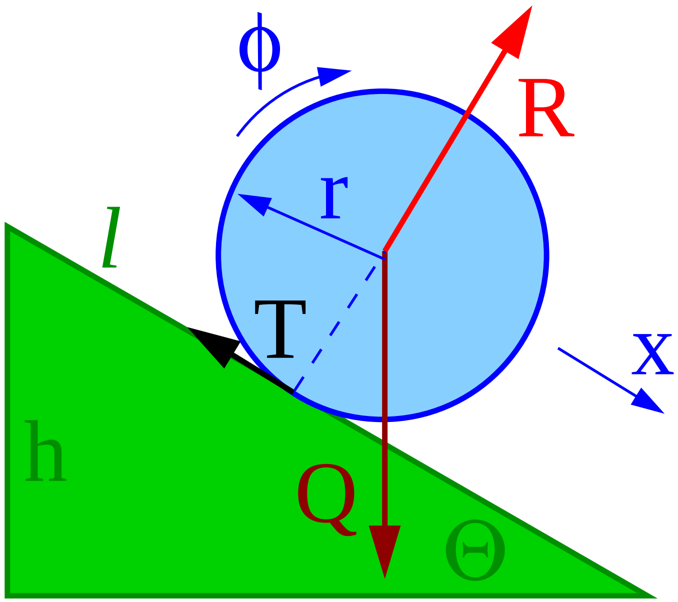
$$I_O = \sum_i m_i r_{iO}^2 = h^2 \sum_i m_i \;+\; 2h \sum_i m_i x_i + \sum_i m_i r_{iS}^2$$

$$\Rightarrow \quad I_O \;=\; I_S \;+\; M\,h^2$$

Twierdzenie Steinera

Prawa ruchu

Równia pochyła



Staczanie po równi pochyłej symetrycznej bryły (obręcz, walec, kula...) bez poślizgu:

$$x = r\,\phi \;\;\Rightarrow\;\; a = r\,\varepsilon$$

Ruch postępowy (wzdłuż równi):

$$ma \;=\; Q\,\sin\theta \;-\; T$$

Ruch obrotowy (względem środka masy):

$$I\,\varepsilon \;=\; T\,r$$

Eliminując siłę tarcia:

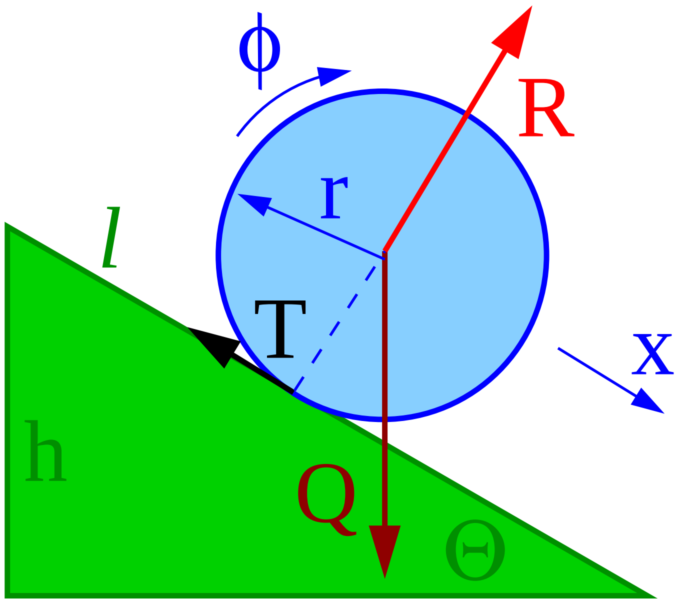
$$ma + \frac{I\varepsilon}{r} \;=\; mg\,\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad a \;=\; \frac{g\,\sin\theta}{1+\frac{I}{mr^2}}$$

Im większy moment bezwładności, tym wolniej stacza się ciało...

Prawa ruchu

Równia pochyła



Zagadnienie można rozwiązać w sposób równoważny korzystając z chwilowej osi obrotu i twierdzenia Steinera

Równanie ruchu obrotowego względem chwilowej osi obrotu (linia styku bryły z równią):

$$I_o \, \varepsilon \;=\; Q \sin\theta \cdot r$$

Z twierdzenia Steinera:

$$I_o \;=\; I \,+\, m\, r^2$$

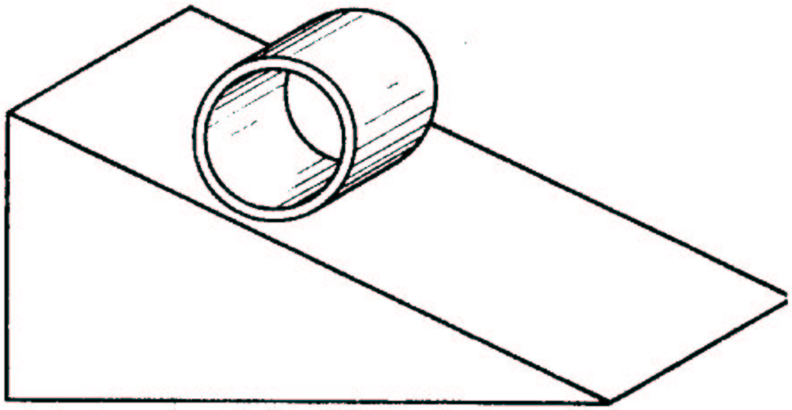
Otrzymujemy:

$$a = r\,\varepsilon \;=\; \frac{mg \sin\theta\, r^2}{I_o} \;=\; \frac{mr^2\, g \sin\theta}{mr^2 + I}$$

Prawa ruchu

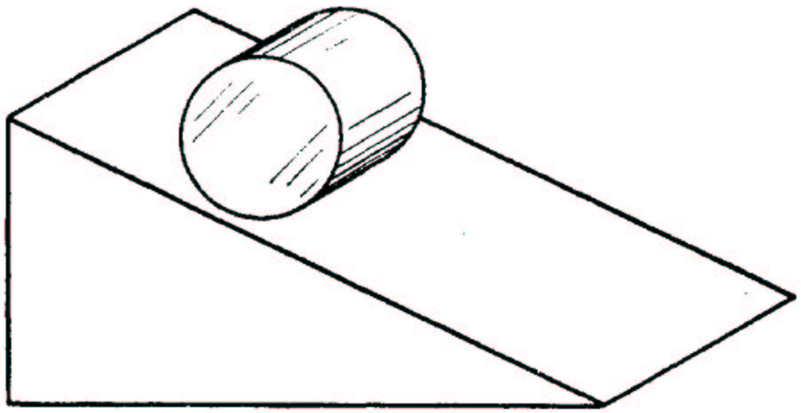
Równia pochyła

Rura



$$a = \frac{1}{2} g \sin\theta$$

Walec

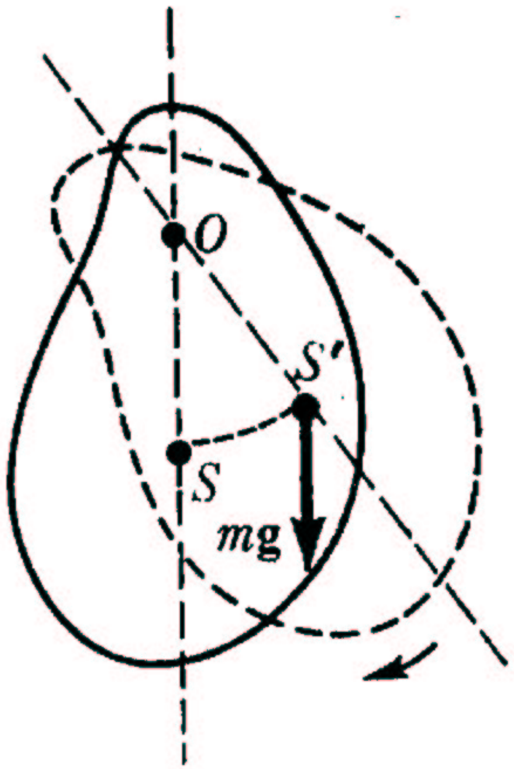


$$a = \frac{2}{3} g \sin\theta$$

$\frac{1}{3}$ szybciej

Prawa ruchu

Wahadło fizyczne



Równanie małych drgań bryły sztywnej, wokół osi obrotu O przechodzącej w odległości l od środka ciężkości S:

$$I_o \, \varepsilon \; = \; -mg \sin\phi \cdot l$$

$$\left(I + ml^2\right) \frac{d^2\phi}{dt^2} \; \approx \; -mgl \, \phi$$

Częstość drgań (równanie oscylatora harmonicznego):

$$\nu \; = \; \sqrt{\frac{mgl}{I + ml^2}} \; = \; \sqrt{\frac{g}{l(1 + \frac{I}{ml^2})}}$$

$l_z = l(1 + \frac{I}{ml^2})$ - długość zredukowana wahadła

długość wahadła matematycznego o tej samej częstości

Energia

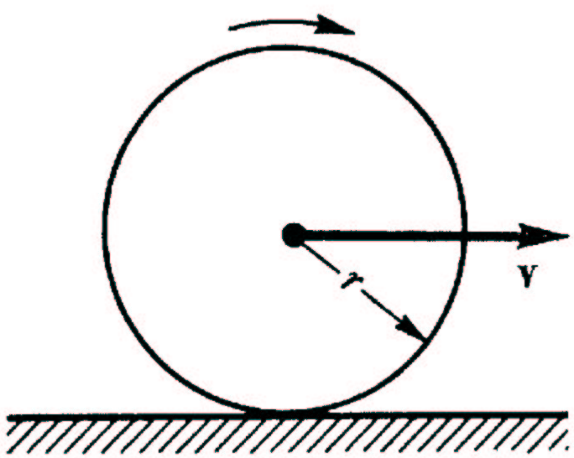
Energia ruchu obrotowego

Energia kinetyczna układu ciał:

$$E_k = E_k^\star + \frac{M\,V_{CM}^2}{2}$$

Bryła sztywna: energia “wewnętrzna”$\Rightarrow$ energia kinetyczna ruchu obrotowego

$$E_k^\star = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i (r_i\,\omega)^2 = \frac{1}{2}\,\omega^2\,I$$



Ciało toczące się bez poślizgu: $v = \omega\,r$

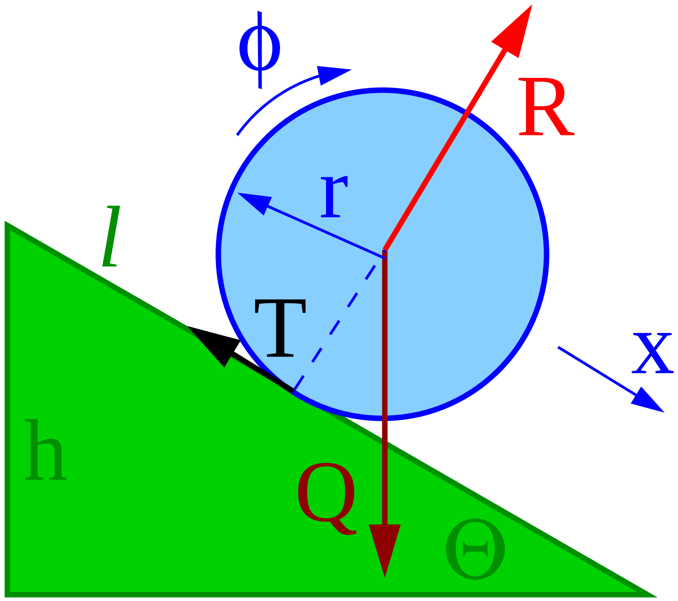
$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)$$

$m\,\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)$ - efektywna masa bezwładna

przy niezmienionej masie grawitacyjnej

Energia

Równia pochyła



Prędkość jaką uzyska ciało staczające się bez poślizgu z równi o wysokości h. Z zasady zachowania energii:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)$$

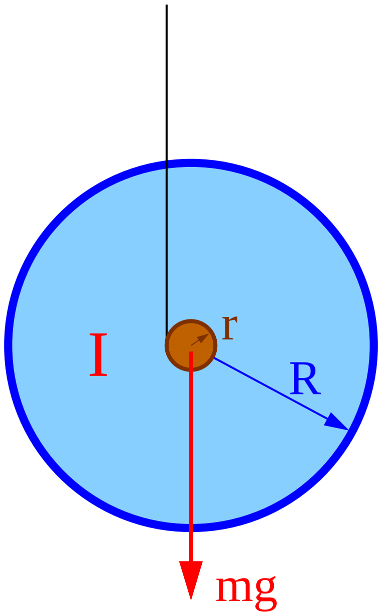
$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I}{mr^2}}}$$

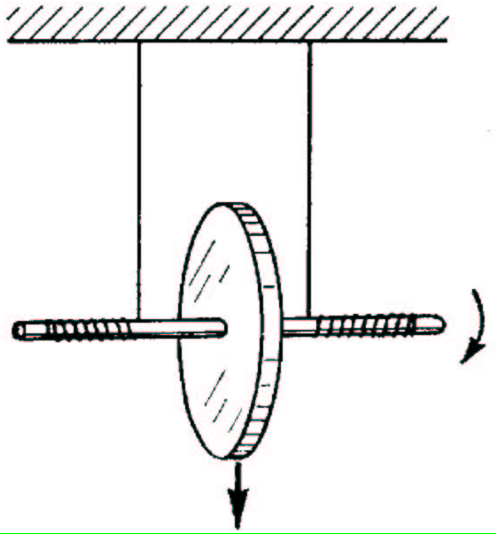
Przyspieszenie prędkość średnia $\langle v\rangle = \frac{1}{2}v$

$$a = \frac{v}{t} = \frac{v^2}{2l} = \frac{2gh}{2l\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)} = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{I}{mr^2}}$$

Energia

Koło Maxwella





Koło o promieniu R “toczy się” po osi o promieniu r.

Jak w przypadku równi pochyłej $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$a = \frac{g}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

obręcz: $I = mR^2$

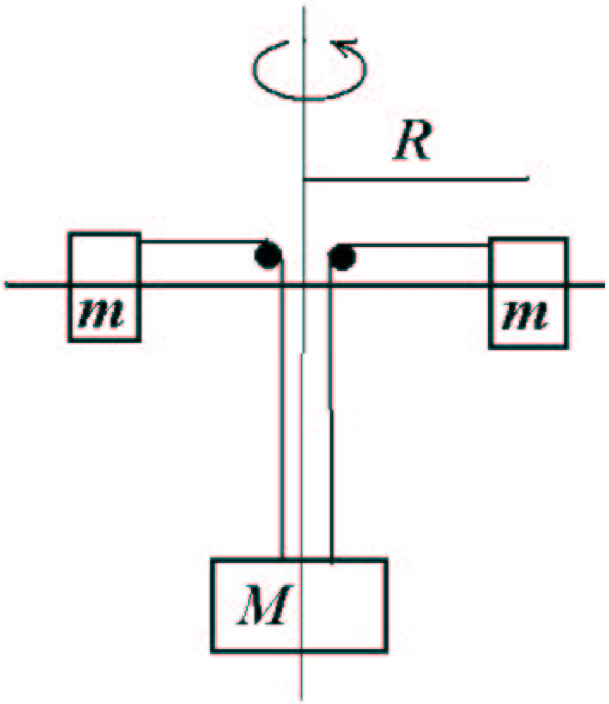
$$\Rightarrow \quad a = g\,\frac{r^2}{R^2 + r^2} \ll g$$

Przyspieszenie liniowe wielokrotnie mniejsze od przyspieszenia w spadku swobodnym...

Energia potencjalna zamienia się głównie na energię ruchu obrotowego.

Energia

Energia przy zmiennym momencie bezwładności



Masy przesuwają się z $R = r_1$ do $R = r_2$. $I \approx 2mR^2$

Z zasady zachowania momentu pędu (układ izolowany):

$$L_1 = \omega_1 I_1 = \omega_2 I_2 = L_2$$
$$\Rightarrow \quad \omega_2 = \omega_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

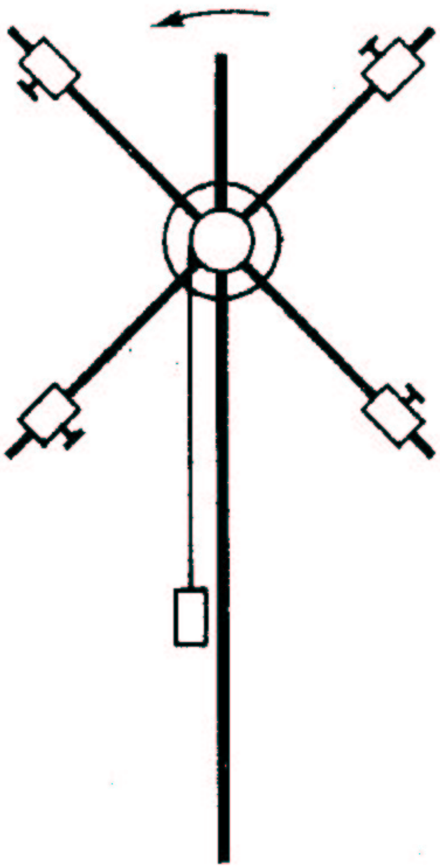
Energia kinetyczna układu:

$$E_2 = \frac{1}{2}\omega_2^2 I_2 = \frac{1}{2}\frac{\omega_2}{\omega_1}\omega_1^2 I_1 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 E_1$$

$r_2 < r_1 \Rightarrow$ energia kinetyczna rośnie
kosztem pracy siły dośrodkowej (energii potencjalnej M)

Prawa ruchu

Uściślenie



Rozważając zagadnienie jednostajnie przyspieszonego ruchu obrotowego zakładaliśmy że moment siły jest stały i nie zależy od I. Jednak ciężarek też porusza się ruchem przyspieszonym:

$$\text{ciężarek:} \quad ma = Q - N$$
$$\text{rotor:} \quad I\varepsilon = rN$$

Q - ciężar ciężarka, N - siła naprężenia nici.

Eliminując $N = m(g-a)$:

$$\begin{aligned} I\varepsilon &= r\,m(g - r\varepsilon) \\ (I + mr^2)\,\varepsilon &= mgr \\ \varepsilon &= \frac{mgr}{I + mr^2} = \frac{mgr}{I'} \end{aligned}$$

Bezwładność ciężarka efektywnie zwiększa moment bezwładności rotora: $I' = I + mr^2$

Nigdy nie uzyskamy przyspieszenia większego niż $\varepsilon_{max} = \frac{g}{r}$