

Bryła sztywna

Wstęp do Fizyki I (B+C)

Wykład XX:

- Bąk
- Precesja
- Żyroskop

Bąk

Równowaga



Zasada zachowania momentu pędu

Jeśli zapewnimy **znikanie momentów sił** to **kierunek** momentu pędu pozostanie **stały** niezależnie od działających sił i ruchu postępowego
 \Rightarrow **efekt żyroskopowy**

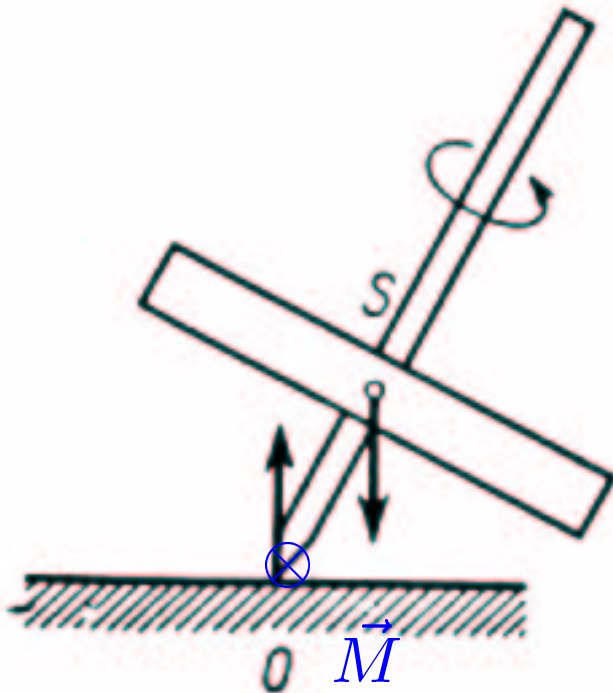
Bąk wirujący wokół **pionowej osi** jest w **równowadze**.
Momenty działających sił są równe zero (względem **S** i **O**)
 \Rightarrow moment pędu jest stały
 \Rightarrow orientacja osi obrotu jest stała (**bąk symetryczny**)

$$\vec{L} = \vec{\omega} I = \text{const}$$

Czy jest to równowaga trwała?

Bąk

Moment sił



Gdyby bąk nie wirował ($L = 0$) to ustawienie pionowe byłoby stanem **równowagi nietrwalej**.

Wychylenie z tego położenia powodowałoby powstanie wypadkowego momentu sił oraz niezerowej siły wypadkowej, które powodowałyby wywrócenie bąka.

Moment siły ciężkości względem punktu podparcia O:

$$\vec{M} = \vec{R} \times m\vec{g}$$

$$M = mgR \sin \theta$$

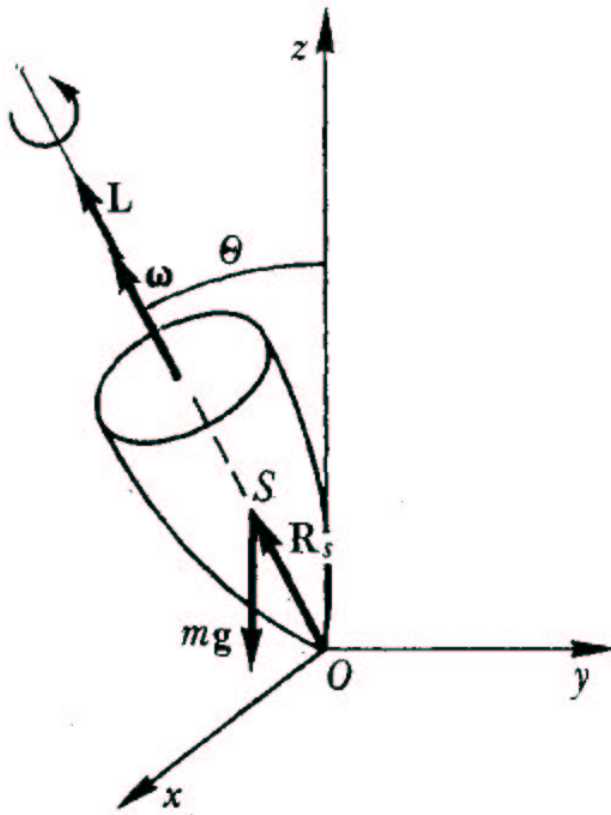
R - odległość środka ciężkości od punktu podparcia

θ - kąt odchylenia osi od pionu

Moment siły \vec{M} skierowany jest prostopadle do osi bąka...

Bąk

Precesja



W przypadku gdy bąk wiruje, przyłożony moment siły powoduje zmianę całkowitego momentu pędu:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Wektor momentu pędu pokrywa się z osią obrotu

$$\vec{L} \parallel \vec{\omega} \parallel \vec{r}$$

natomiast wektor momentu siły jest do niej prostopadły

$$\vec{M} = m\vec{R} \times \vec{g} \perp \vec{R}$$

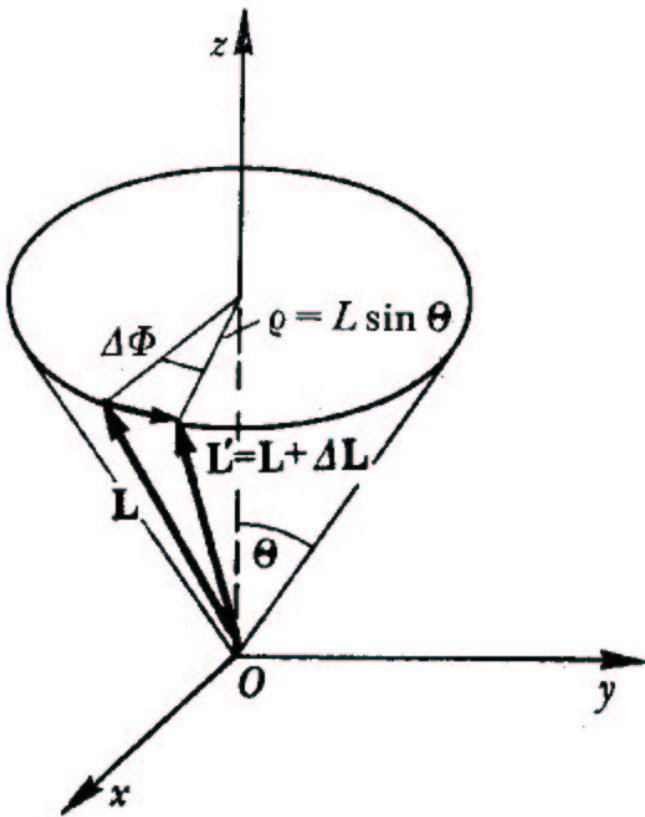
⇒ wartość momentu pędu nie ulega zmianie

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

⇒ kierunek momentu pędu zmienia się ⇒ **precesja**

Precesja

Częstość



W przedziale czasu Δt moment pędu zmieni się o:

$$\Delta L = M \Delta t = mRg \sin \theta \Delta t$$

Spowoduje to obrót **poziomej składowej** \vec{L} o kąt

$$\Delta \phi = \frac{\Delta L}{L \sin \theta} = \frac{mRg \sin \theta}{L \sin \theta} \Delta t$$

\Rightarrow częstość z jaką wektor \vec{L} będzie zakreślał stożek:

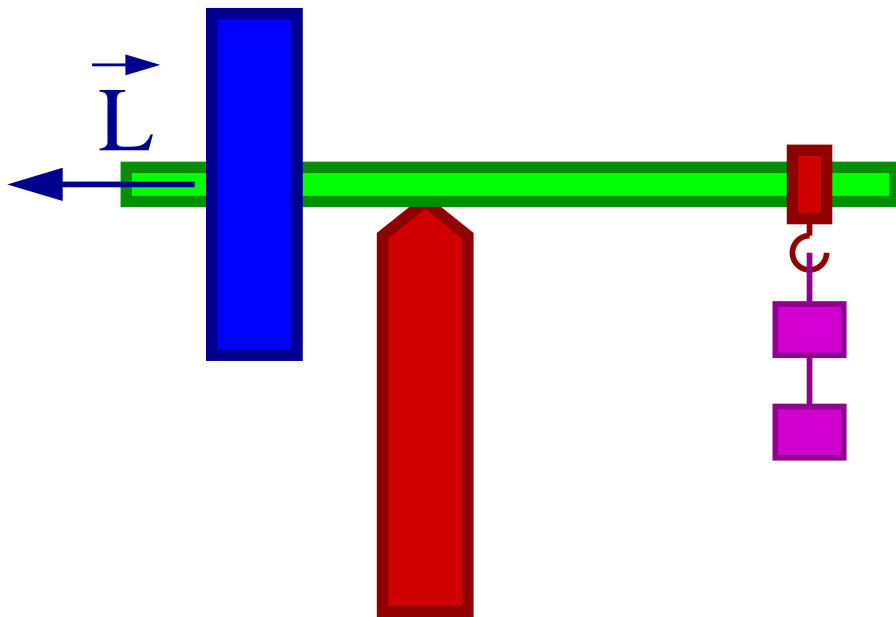
$$\omega_p = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{mRg}{L}$$

\Rightarrow **częstość precesji**

Częstość precesji maleje ze wzrostem momentu pędu (częstości ruchu wirowego bąka)

Żyroskop

Równowaga



“Waga”: ciężar żyroskopu jest zrównoważona przez odpowiednio dobrane ciężarki.

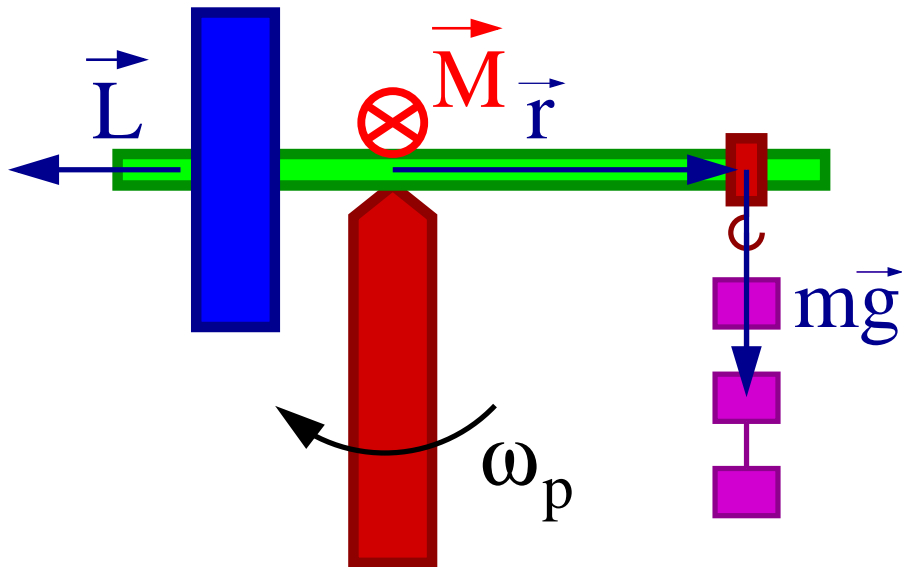
Jeśli żyroskop jest w równowadze przy $\vec{L} = 0$ to będzie także w równowadze dla $\vec{L} \neq 0$

Jak zachowa się żyroskop gdy zwiększymy lub zmniejszymy “przeciwwagę” ?

Żyroskop

Precesja

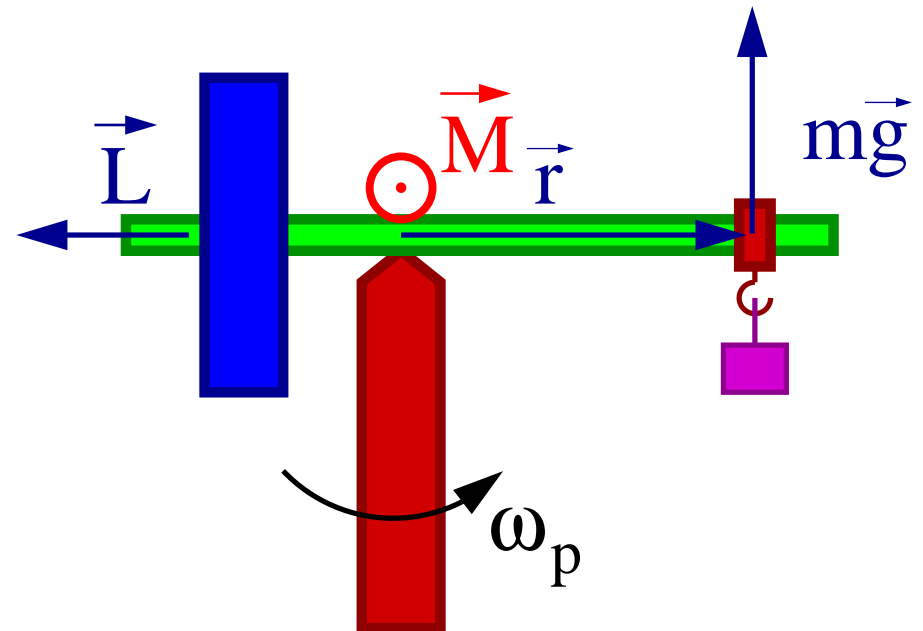
zwiększone obciążenie



zgodnie z ruchem wskazówek zegara
(patrząc os góry)

$$\text{Częstość precesji } \omega_p = \frac{mrg}{L}$$

zmniejszone obciążenie
(przypadek bąka)



przeciwnie do ruchu wskazówek zegara
 \Rightarrow proporcjonalna do dodanej/brakującej masy

Żyroskop

Paradoks ?

Nie wirujący bąk wychylony z położenia równowagi $\vec{L} = 0$
lub nie zrównoważony żyroskop $\vec{L} = 0 \Rightarrow$ wywracają się

Natomiast jeśli $\vec{L} \neq 0$ to bąk i żyroskop podlegają precesji
 \Rightarrow nigdy się nie wywróca (zaniedbując siły tarcia).

Czy jest to słuszne dla dowolnie małych wartości \vec{L} ?

Z doświadczenia wiemy, że nie !

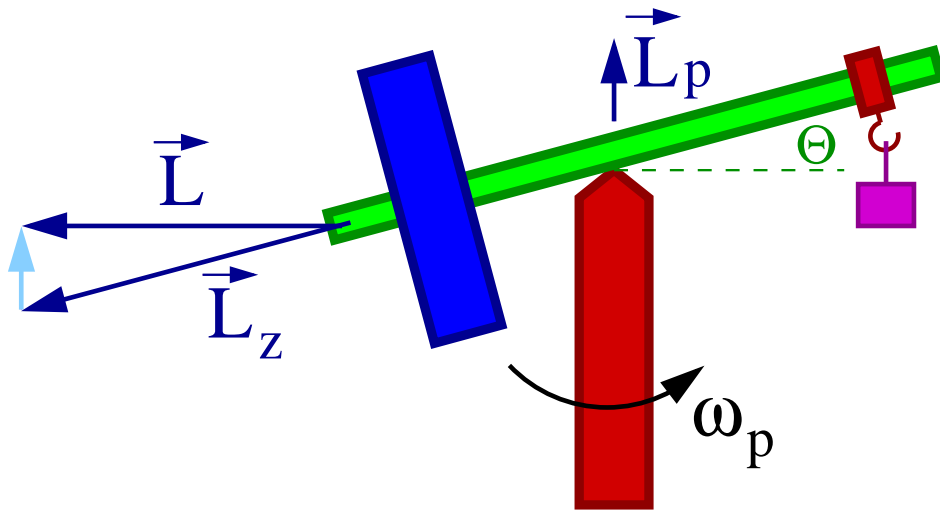
Wirujący bąk wywraca się zanim prędkość kątowna jego ruchu wirowego spadnie do zera.

Nasze rozważania precesji nie były ścisłe

\Rightarrow dla małych momentów pędu musimy uwzględnić dodatkowe efekty...

Żyroskop

Precesja



Niech moment pędu zrównoważonego żyroskopu wynosi \vec{L} .

Co się dzieje gdy zdejmujemy jeden ciężarek ?

Wartość całkowitego moment pędu nie ulega zmianie, gdyż moment siły ciężkości jest prostopadły do \vec{L} .

Obrót żyroskopu z częstością ω_p względem pionowej osi \Rightarrow moment pędu $\vec{L}_p = \omega_p I_p$.

Aby całkowity moment pędu nie uległ zmianie, oś żyroskopu musi się nachylić o kąt:

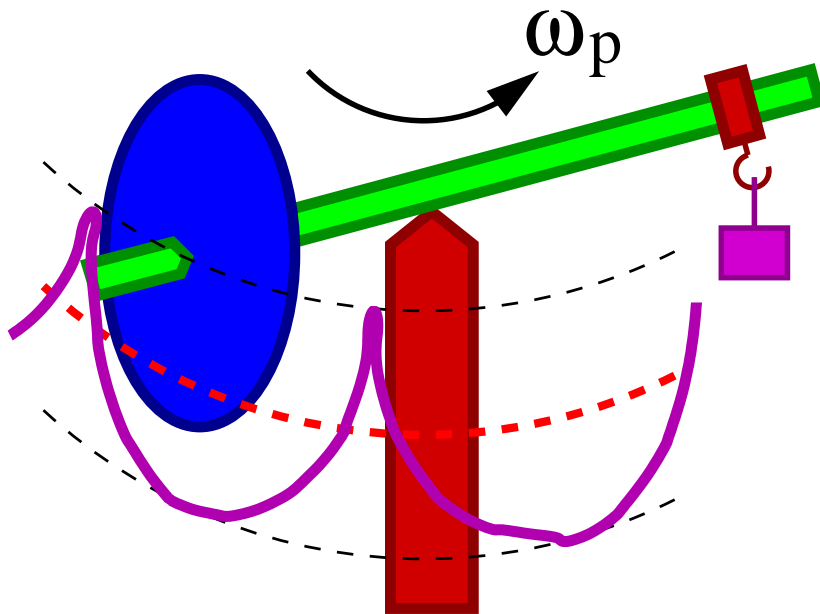
$$\theta \sim \frac{L_p}{L} = \frac{mrgI_p}{L^2}$$

Duże $L \Rightarrow \theta \rightarrow 0$ (L_p można pominąć)

Małe $L \Rightarrow$ żyroskop/bąk wywracają się...

Żyroskop

Nutacja



Idealna precesja, gdy koniec ramienia żyroskopu porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, zachodzi tylko przy **szczególnym** wyborze warunków początkowych.

W ogólnym przypadku na precesję nakładają się oscylacje ramienia żyroskopu wokół położenia “**stacjonarnej precesji**” \Rightarrow **nutacje**.

Charakter tych dodatkowych oscylacji zależy od warunków początkowych.

Zazwyczaj są mało widoczne i zanikają w czasie (tłumienie).

Ich amplituda rośnie dla małych wartości L