

Bryła sztywna

Wstęp do Fizyki I (B+C)

Wykład XXI:

- Porównanie ruchu obrotowego z ruchem postępowym
- Ogólne wyrażenie na moment pędu
- Tensor momentu bezwładności
- Osie główne
- Równania Eulera
- Bąk swobodny

Porównanie

Punkt materialny

ruch postępowy

• przesunięcie

$$\vec{x}$$

• prędkość

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

• przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

• masa

$$m$$

• pęd

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

• układ izolowany $\vec{p} = const$

Bryła sztywna

ruch obrotowy (względem osi symetrii !)

⇒ kąt obrotu

$$\vec{\phi}$$

⇒ prędkość kątowna

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$$

⇒ przyspieszenie kątowne

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

⇒ moment bezwładności

$$I$$

⇒ moment pędu

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

⇒ układ izolowany

$$\vec{L} = const$$

Porównanie

Punkt materialny

ruch postępowy

• siła

$$\vec{F}$$

• równania ruchu

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

• praca

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

• energia kinetyczna

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Bryła sztywna

ruch obrotowy (względem osi symetrii !)

⇒ moment siły

$$\vec{M}$$

⇒ równania ruchu

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$$

⇒

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

⇒ praca

$$W = \int \vec{M} \cdot d\vec{\phi}$$

⇒ energia kinetyczna

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Moment pędu

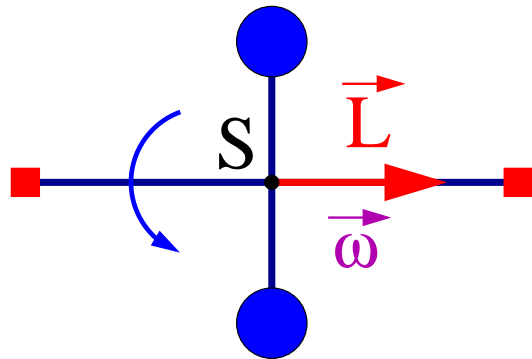
Do tej pory rozpatrywaliśmy wyłącznie ruch obrotowy względem ustalonej osi.

Naogół była to oś symetrii bryły, lub oś do niej równoległa.

W ogólnym przypadku problem jest bardziej skomplikowany

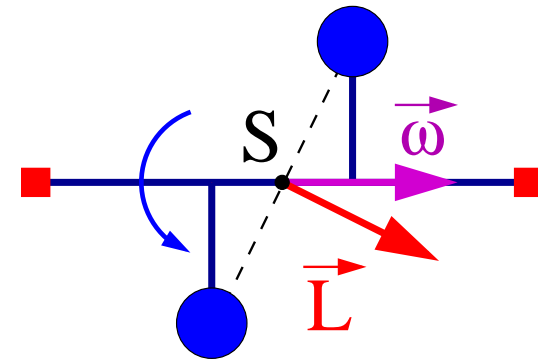
Przykład - dwa wirujące ciężarki

Ciężarki w jednej płaszczyźnie \perp osi



Oś obrotu jest osią symetrii $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

Ciężarki rozsunięte wzdłuż osi obrotu



Oś obrotu nie jest osią symetrii $\Rightarrow \vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$

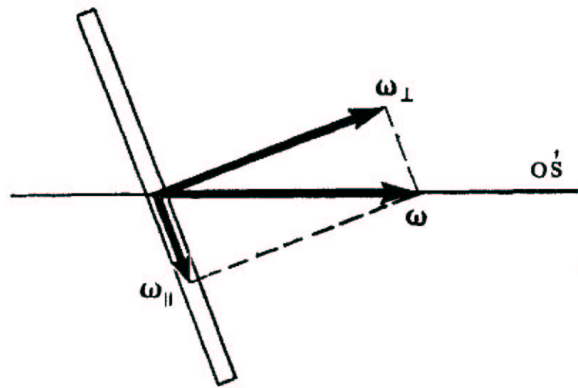
$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \perp \vec{r}_i$$

Moment pędu

Przykład II

Dysk wirujący wokół osi nachylonej do osi symetrii

Prędkość kątową możemy rozłożyć na składową równoległą i prostopadłą do osi symetrii



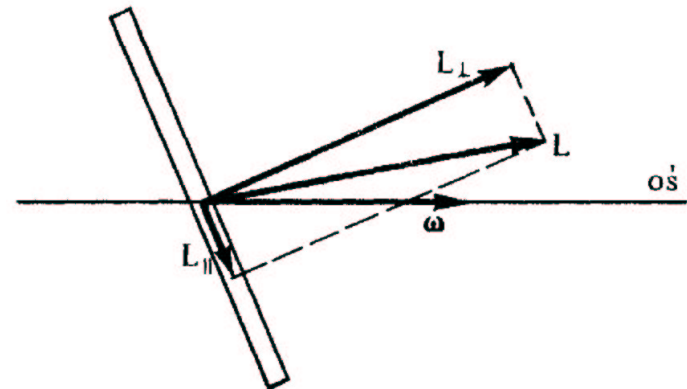
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\perp} + \vec{\omega}_{\parallel}$$

Moment bezwładności dysku: (wykład 19)

$$I_{\perp} = \frac{1}{2}mr^2 \quad I_{\parallel} = \frac{1}{4}mr^2 = \frac{1}{2}I_{\perp}$$

Moment pędu dysku

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{L}_{\perp} + \vec{L}_{\parallel} \\ &= I_{\perp}\vec{\omega}_{\perp} + I_{\parallel}\vec{\omega}_{\parallel} \\ &= I_{\perp}\left(\vec{\omega}_{\perp} + \frac{1}{2}\vec{\omega}_{\parallel}\right)\end{aligned}$$



$$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

Moment pędu

W ogólnym przypadku bryła sztywna może nie mieć żadnej osi symetrii.

Jak wtedy wyznaczyć moment pędu, znając prędkość kątową $\vec{\omega}$?

Zdefinicji momentu pędu:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Z definicji bryły sztywnej:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

Otrzymujemy:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i [\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})]$$

korzystamy z tożsamości wektorowej: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$

Kierunek \vec{L} zależy od kierunku $\vec{\omega}$ jak i położenia poszczególnych elementów bryły \vec{r}_i .

Moment pędu

Rozpisując na składowe:

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \quad \vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_i \vec{\omega} = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z$$

Otrzymujemy (na przykładzie L_x):

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_i m_i \left[\omega_x r_i^2 - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \right] \\ &= \omega_x \cdot \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \cdot \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \cdot \sum_i m_i x_i z_i \end{aligned}$$

L_x zależy w ogólności od wszystkich składowych prędkości kątowej !

Podobnie:

$$\begin{aligned} L_y &= -\omega_x \cdot \sum_i m_i x_i y_i + \omega_y \cdot \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) - \omega_z \cdot \sum_i m_i y_i z_i \\ L_z &= -\omega_x \cdot \sum_i m_i x_i z_i - \omega_y \cdot \sum_i m_i y_i z_i + \omega_z \cdot \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{aligned}$$

Tensor momentu bezwładności

Wyrażenie na składowe \vec{L} możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum m_i (r_i^2 - x_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i (r_i^2 - y_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}$$

tensor momentu bezwładności

Składowe tensora - współczynniki bezwładności

ogólna postać ($u, v = x, y, z$)

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yz} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zz} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{uv} = \sum m_i (\delta_{uv} r_i^2 - u_i v_i)$$

lub

$$I_{uv} = \int dV \rho(\vec{r}) (\delta_{uv} r^2 - u v)$$

delta Kroneckera: $\delta_{uv} = 1$ dla $u = v$ i 0 dla $u \neq v$

Tensor momentu bezwładności

Energia kinetyczna

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2$$

Korzystamy z tożsamości wektorowej:

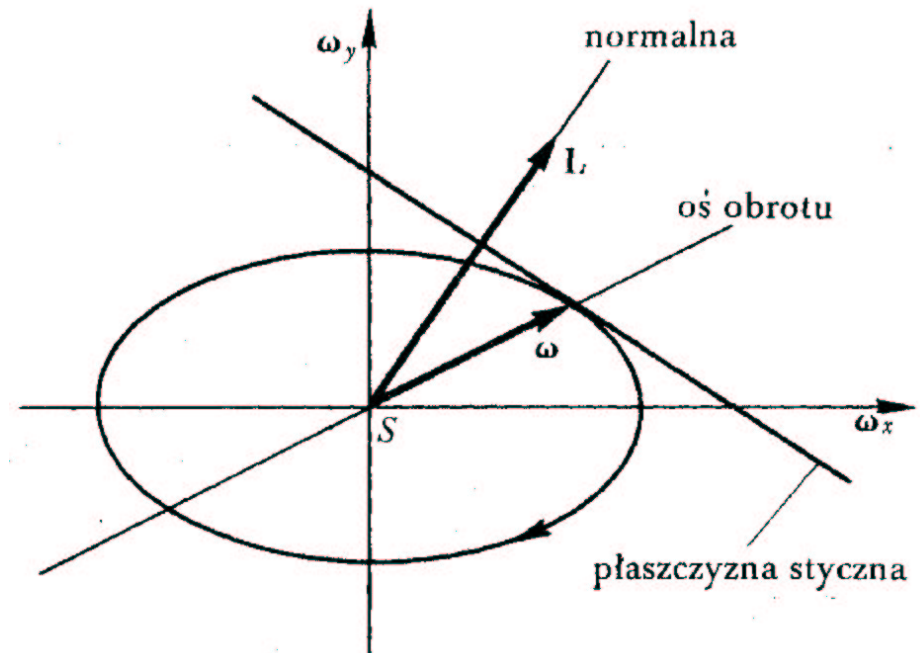
$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

$$\Rightarrow E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{\omega} \cdot [\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)]$$

$$E_k = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \hat{I} \vec{\omega}$$

$E_k = const$ - elipsoida w przestrzeni $\vec{\omega}$

$$E_k = \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_{xx} + \omega_y^2 I_{yy} + \omega_z^2 I_{zz} + 2\omega_x \omega_y I_{xy} + 2\omega_x \omega_z I_{xz} + 2\omega_y \omega_z I_{yz})$$



Kierunek \vec{L} jest prostopadły (normalny) do powierzchni $E_k = const$ w punkcie $\vec{\omega}$

Osie główne

W ogólnym przypadku wszystkie współczynniki bezwładności mogą być różne od zera (tensor symetryczny \Rightarrow 6 niezależnych wielkości)

Okazuje się jednak, że w każdym przypadku można tak **obrócić osie układu** odniesienia, żeby elementy pozadiagonalne zniknęły: (diagonalizacja tensora)

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = I_{yx} = I_{zx} = I_{zy} = 0$$

układ taki definiuje nam **osie główne** bryły (kierunki własne tensora)

Jeśli bryła ma oś symetrii to będzie ona jedną z osi głównych !

\Rightarrow pozostają tylko 3 współczynniki diagonalne I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} (wartości własne)

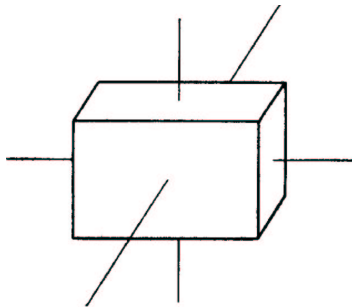
$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = (I_{xx} \omega_x, I_{yy} \omega_y, I_{zz} \omega_z)$$

Dla obrotu wokół osi głównej $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

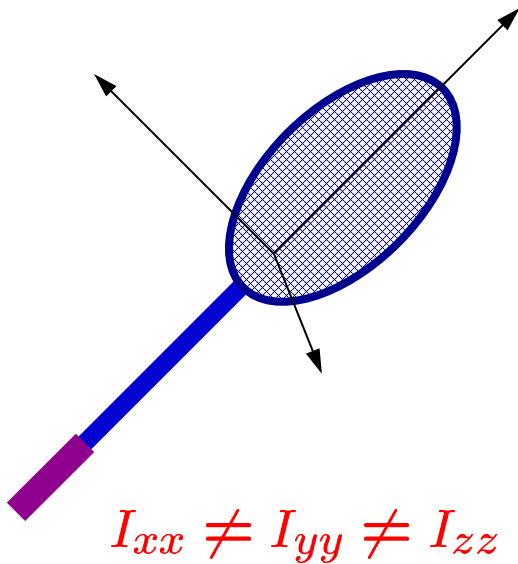
$$\text{np. } \vec{\omega} = (\omega, 0, 0) \Rightarrow \vec{L} = (I_{xx}\omega, 0, 0) = I_{xx}\vec{\omega}$$

Osie główne

Prostopadłościan

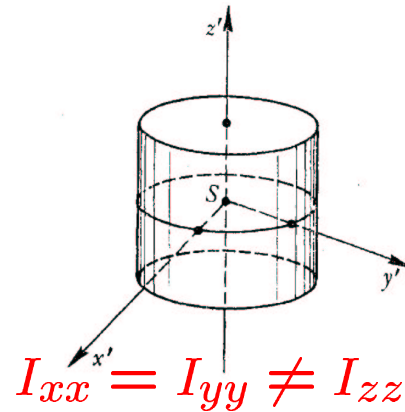


Rakieta tenisowa



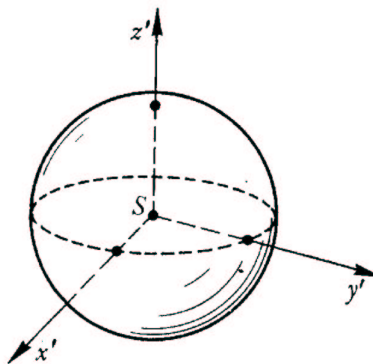
$$I_{xx} \neq I_{yy} \neq I_{zz}$$

Walec



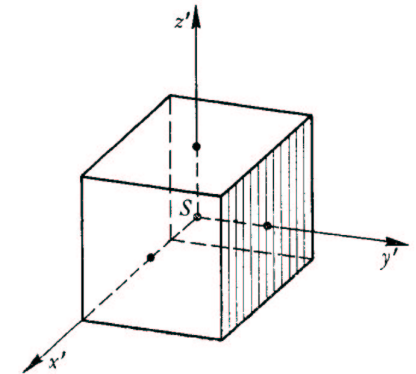
$$I_{xx} = I_{yy} \neq I_{zz}$$

Kula



$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$$

Sześcian



$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$$

Tak jak dla kuli !

Osie główne

Energia kinetyczna w układzie osi głównych

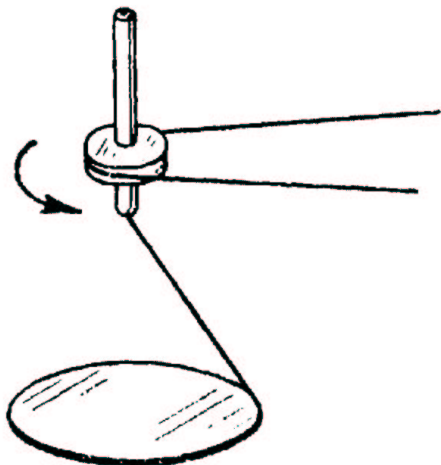
$$E_k = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{L} = \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2)$$

Jeśli nałożymy **więzy** narzucające obrót ciała ze **stałą prędkością kątową** $\vec{\omega}$ to przyjmie ono ułożenie odpowiadające **maksymalnej energii kinetycznej**

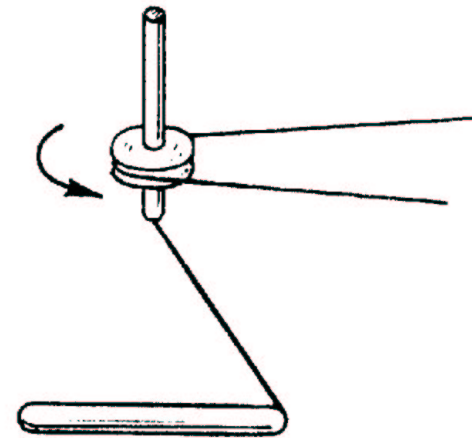
⇒ obrót wokół osi o **największym momencie bezwładności**

⇒ maksymalna wartość **momentu pędu**

Wirujący dysk



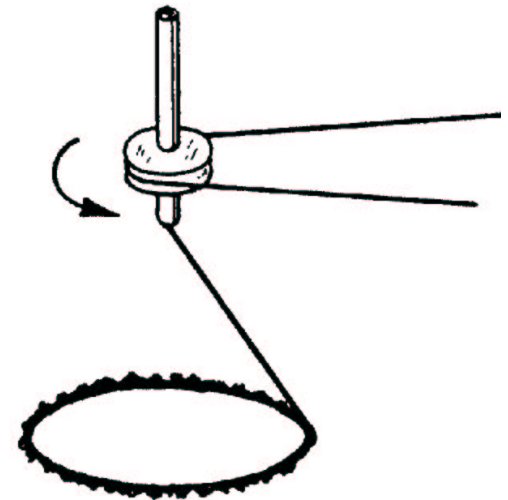
Wirujący pręt



Osie główne

Wirujący łańcuszek

- Przybiera kształt obręczy
odpowiadający **maksymalnemu momentowi bezwładności**
⇒ maksymalnej wartości momentu pędu
⇒ **maksymalnej energii kinetycznej**



W układzie obracającym się

Siła odśrodkowa dąży do rozmieszczenia masy jak najdalej od osi obrotu.

Stabilny jest stan odpowiadający minimum energii potencjalnej (siły odśrodkowej)

$$\vec{F}_i = m_i \omega^2 \vec{r}_{i\perp} \Rightarrow E_{p,i} = -\frac{1}{2} m_i \omega^2 r_{i\perp}^2$$
$$E_p = \sum_i E_{p,i} = -\frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = -\frac{1}{2} \omega^2 I = -E_k$$

Minimum energii potencjalnej odpowiada maksimu energii kinetycznej.

W układzie laboratoryjnym ⇒ masa “oddala się” od osi zgodnie z zasadą bezwładności

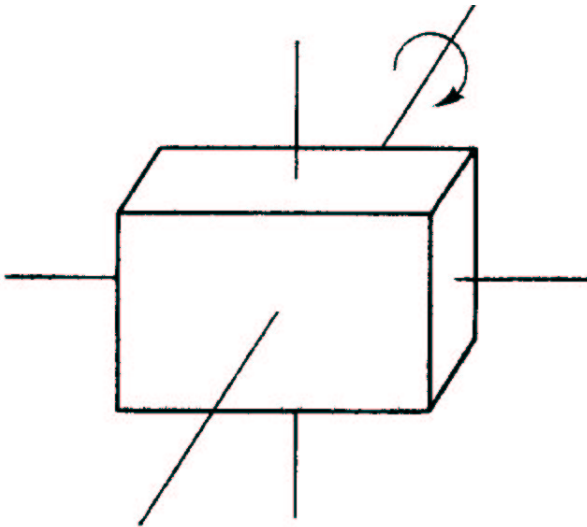
Osie główne

W przypadku bryły wirującej **swobodnie** (stała wartość \vec{L}) stabilny ruch obrotowy (stały kierunek wektora $\vec{\omega}$) możliwy jest **tylko** wokół osi głównych o **największym** i **najmniejszym** momencie bezwładności

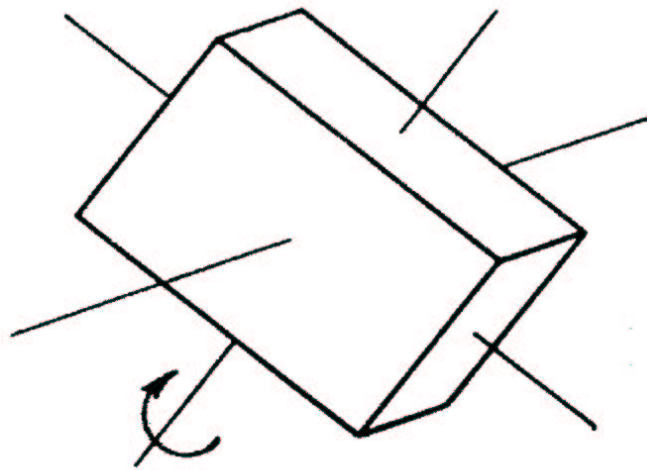
Oś o największym I

Oś o pośrednim I

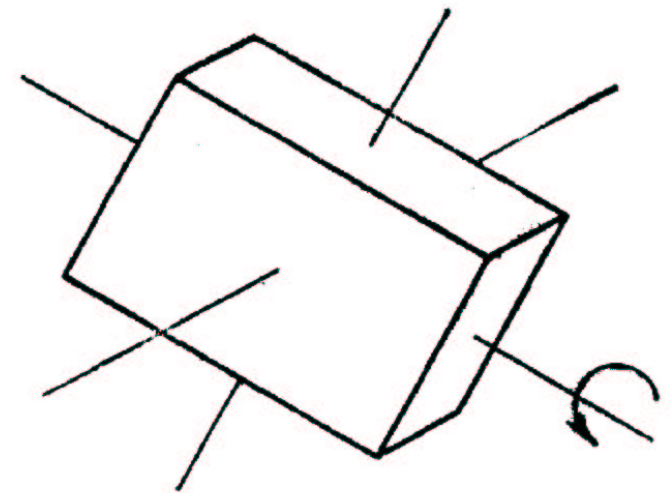
Oś o najmniejszym I



obrót stabilny



obrót niestabilny



obrót stabilny

Równania Eulera

Dotychczas rozpatrywaliśmy ruch obrotowy bryły sztywnej w układzie inercyjnym (LAB).

Wiemy, że składowe tensora bezwładności \hat{I} zależą od wyboru układu odniesienia.

Najwygodniejszą postać (diagonalną) tensor przyjmuje w układzie **osi głównych**.

Jednak układ odniesienia związany z osiami głównymi jest układem nieinercyjnym - wiruje razem z obracającym się ciałem !

Przejdźcie do tego układu jest jednak bardzo pomocne, jeśli chcemy rozpatrzyć ogólny przypadek ruchu obrotowego (tj. $\vec{\omega}$ nie pokrywająca się z osią główną).

Wektor momentu pędu w obracającym się układzie osi głównych (x', y', z') :

$$\vec{L}' = (L_{x'}, L_{y'}, L_{z'})$$

Związek z wektorem momentu pędu w układzie laboratoryjnym (x, y, z) :

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = L_{x'} \vec{i}_{x'} + L_{y'} \vec{i}_{y'} + L_{z'} \vec{i}_{z'}$$

$\vec{i}_{x'}, \vec{i}_{y'}, \vec{i}_{z'}$ - wersory związane z osiami głównymi, obracające się razem z bryłą

Równania Eulera

Równanie ruchu obrotowego w układzie inercjalnym

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Wyrażając \vec{L} przez współrzędne w układzie obracającym się:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d(L_{x'} \vec{i}_{x'} + L_{y'} \vec{i}_{y'} + L_{z'} \vec{i}_{z'})}{dt} \\ &= \frac{dL_{x'}}{dt} \vec{i}_{x'} + \frac{dL_{y'}}{dt} \vec{i}_{y'} + \frac{dL_{z'}}{dt} \vec{i}_{z'} + \frac{d\vec{i}_{x'}}{dt} L_{x'} + \frac{d\vec{i}_{y'}}{dt} L_{y'} + \frac{d\vec{i}_{z'}}{dt} L_{z'} \end{aligned}$$

Pochodne wersorów po czasie: $\frac{d\vec{i}_{x'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}_{x'}$, $\frac{d\vec{i}_{y'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}_{y'}$, $\frac{d\vec{i}_{z'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}_{z'}$

Otrzymujemy:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}'$$

Równania Eulera

W układzie osi głównych:

$$\vec{L}' = I_{x'} \omega_{x'} \vec{i}_{x'} + I_{y'} \omega_{y'} \vec{i}_{y'} + I_{z'} \omega_{z'} \vec{i}_{z'}$$

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = I_{x'} \frac{d\omega_{x'}}{dt} \vec{i}_{x'} + I_{y'} \frac{d\omega_{y'}}{dt} \vec{i}_{y'} + I_{z'} \frac{d\omega_{z'}}{dt} \vec{i}_{z'}$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{L}' &= \begin{vmatrix} \vec{i}_{x'} & \vec{i}_{y'} & \vec{i}_{z'} \\ \omega_{x'} & \omega_{y'} & \omega_{z'} \\ I_{x'} \omega_{x'} & I_{y'} \omega_{y'} & I_{z'} \omega_{z'} \end{vmatrix} = \\ &= (I_{z'} - I_{y'}) \omega_{y'} \omega_{z'} \vec{i}_{x'} + (I_{x'} - I_{z'}) \omega_{x'} \omega_{z'} \vec{i}_{y'} + (I_{y'} - I_{x'}) \omega_{x'} \omega_{y'} \vec{i}_{z'} \end{aligned}$$

$$\vec{M} = M_{x'} \vec{i}_{x'} + M_{y'} \vec{i}_{y'} + M_{z'} \vec{i}_{z'}$$

Równania Eulera

Rozpisując równanie ruchu na składowe

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}' = \vec{M}$$

Równania Eulera

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{x'} \frac{d\omega_{x'}}{dt} + (I_{z'} - I_{y'}) \omega_{y'} \omega_{z'} = M_{x'} \\ I_{y'} \frac{d\omega_{y'}}{dt} + (I_{x'} - I_{z'}) \omega_{x'} \omega_{z'} = M_{y'} \\ I_{z'} \frac{d\omega_{z'}}{dt} + (I_{y'} - I_{x'}) \omega_{x'} \omega_{y'} = M_{z'} \end{array} \right.$$

Opisują zmiany wektora prędkości kątowej w układzie bryły
(w szczególności położenia osi obrotu względem osi głównych)

$I_{x'}, I_{y'}, I_{z'}$ - stałe współczynniki, $M_{x'}, M_{y'}, M_{z'}$ - funkcje

Bąk swobodny

Bryła na którą nie działają zewnętrzne momenty sił: **bąk swobodny**.

Dla uproszczenia rozpatrzmy bąk symetryczny: $I_{x'} = I_{y'} \neq I_{z'}$

Wtedy równania Eulera redukują się do:

$$\frac{d\omega_{x'}}{dt} + \left(\frac{I_{z'} - I_{x'}}{I_{x'}} \omega_{z'} \right) \omega_{y'} = 0$$

$$\frac{d\omega_{y'}}{dt} - \left(\frac{I_{z'} - I_{x'}}{I_{x'}} \omega_{z'} \right) \omega_{x'} = 0$$

$$\frac{d\omega_{z'}}{dt} = 0$$

Pierwsze dwa równania sprowadzają się do równania oscylatora charmonicznego:

$$\frac{d^2\omega_{x'}}{dt^2} = -\Omega^2 \omega_{x'} \quad \text{gdzie: } \Omega = \left(\frac{I_{z'} - I_{x'}}{I_{x'}} \omega_{z'} \right)$$

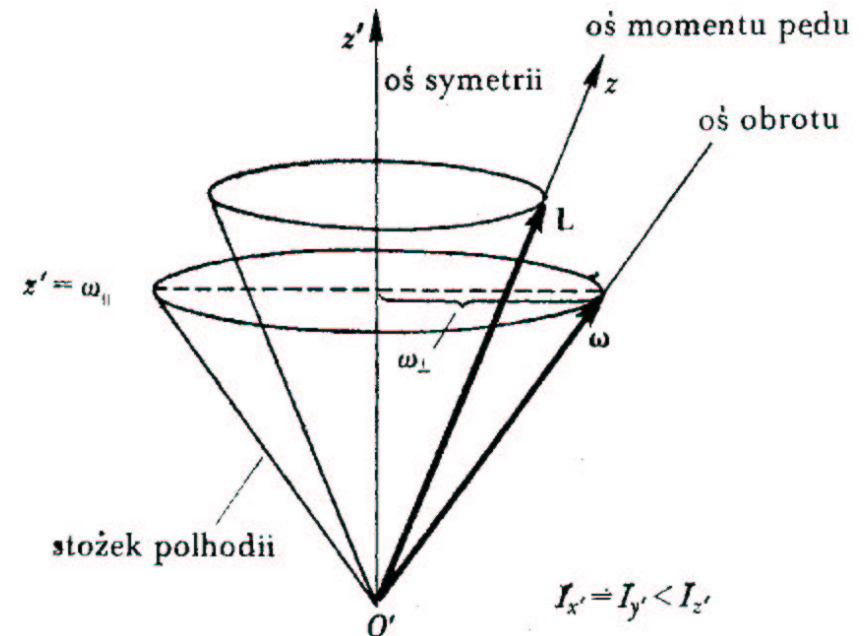
Bąk swobodny

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie w postaci:

$$\omega_{x'} = \omega_{\perp} \cos(\Omega t + \phi)$$

$$\omega_{y'} = \omega_{\perp} \sin(\Omega t + \phi)$$

$$\omega_{z'} = \omega_{\parallel} = \text{const}$$



W układzie bryły, wektor $\vec{\omega}$ zatacza stożek wokół osi głównej

⇒ zmianom kierunku z częstością Ω podlega także wektor momentu pędu \vec{L}

Okres “precesji”

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{I_{x'}}{I_{z'} - I_{x'}} \frac{2\pi}{\omega_{\parallel}}$$

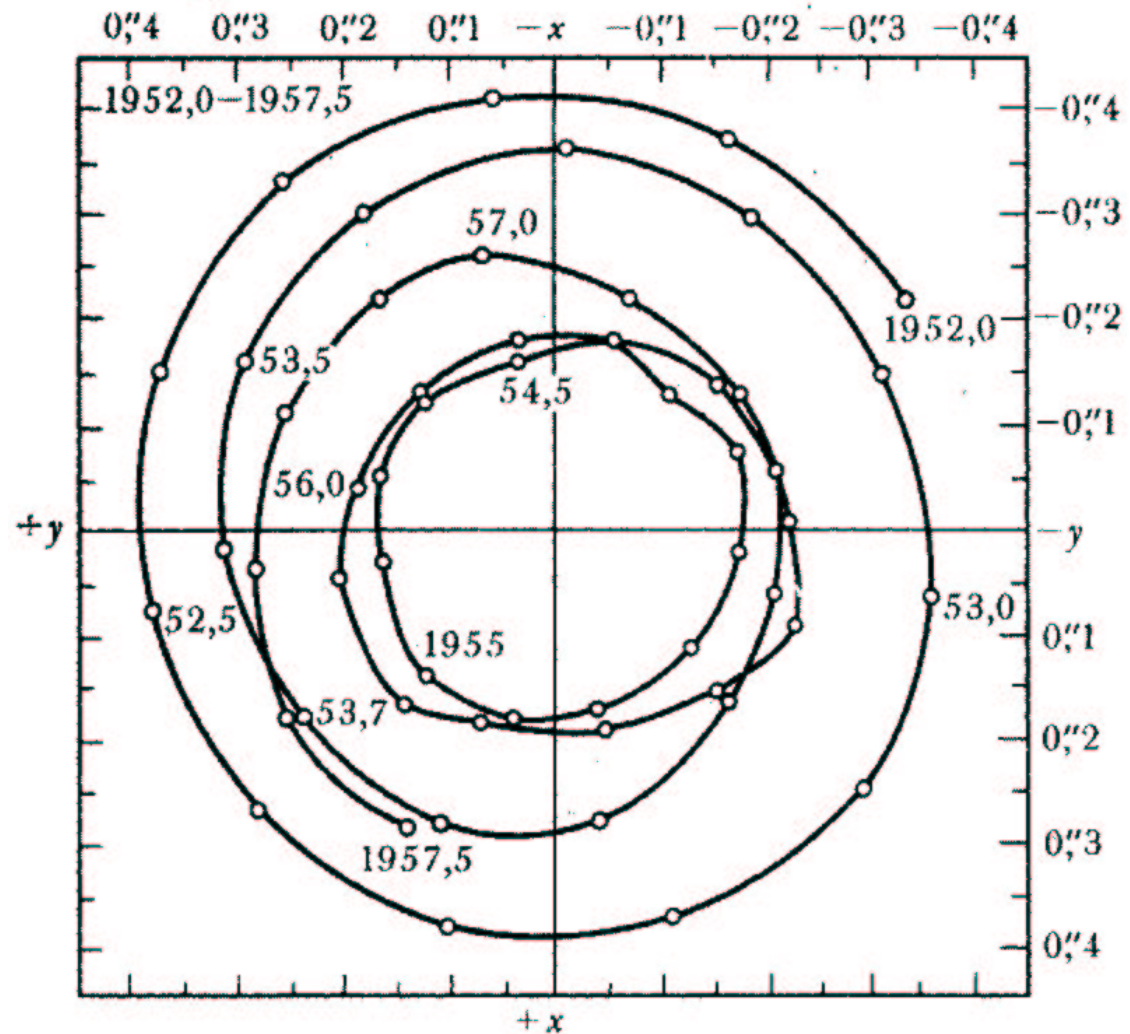
Bąk swobodny

Ponieważ Ziemia nie jest idealną kulą oś obrotu Ziemi podlega precesji.

Zmiany położenia osi obrotu, “bieguna kinematycznego” Ziemi są bardzo niewielkie (~ 15 m), ale mierzalne.

Wyniki pomiarów 1952-57 \Rightarrow

Okres obiegu średnio ok. 427 dni.



Bąk swobodny

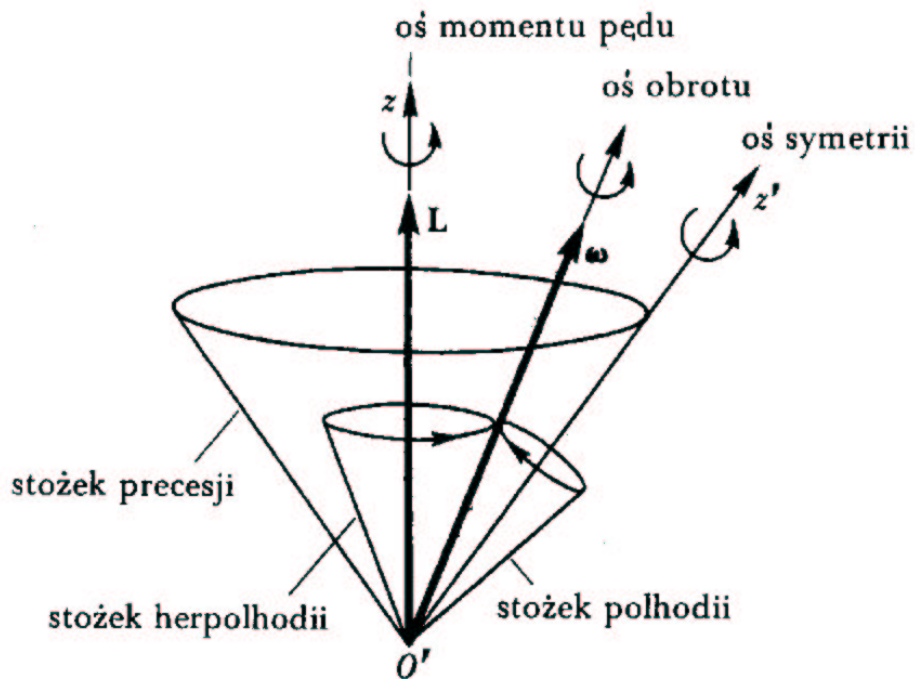
W układzie laboratoryjnym $\vec{L} = \text{const}$ (bąk swobodny)

Precesji podlega oś symetrii bryły.

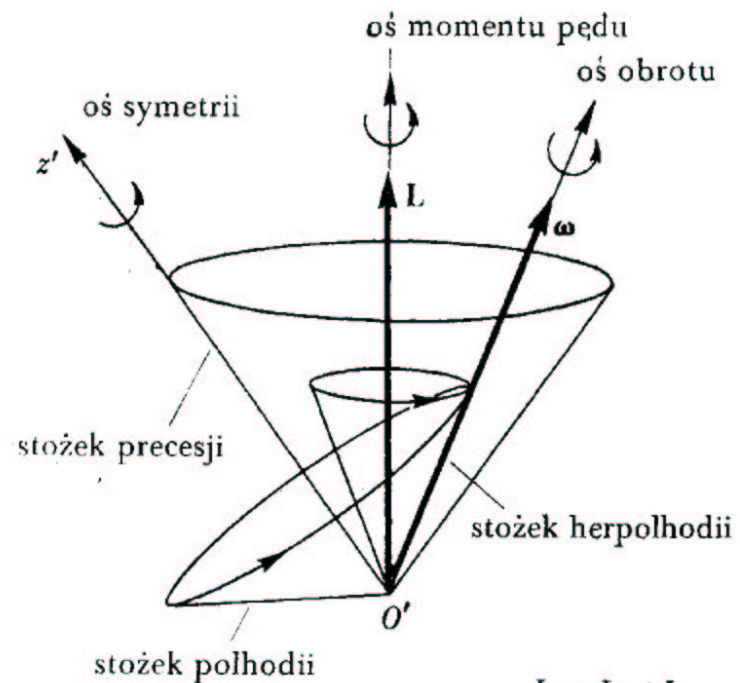
Dwa przypadki:

$$I_{x'} = I_{y'} > I_{z'}$$

$$I_{x'} = I_{y'} < I_{z'}$$



$$I_{x'} = I_{y'} > I_{z'}$$



$$I_{x'} = I_{y'} < I_{z'}$$

“cygario”

“dysk”

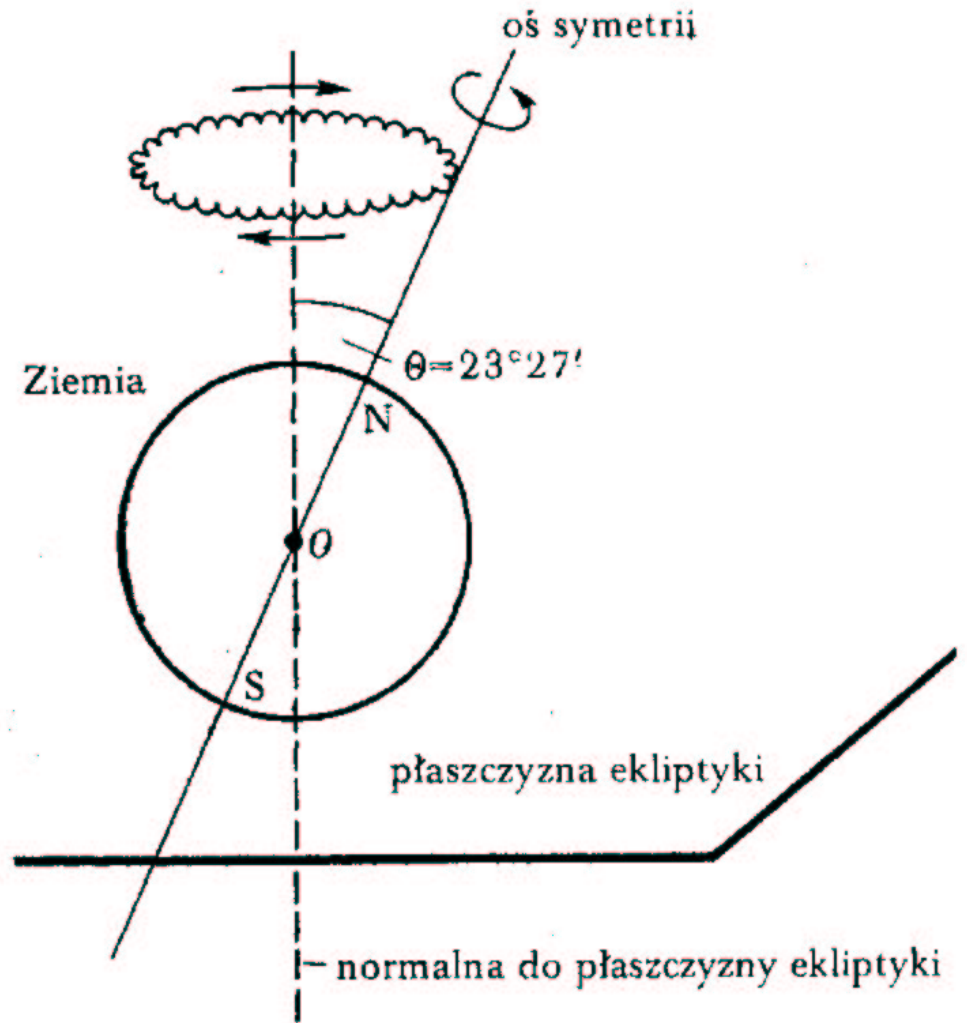
Bąk swobodny

Ziemia nie jest “bąkiem swobodnym”.

Niejednorodności pola grawitacyjnego w którym się porusza (niezerowy moment sił grawitacji) powodują “precesję astronomiczną” osi obrotu Ziemi (precesję wektora momentu pędu)

schemat \Rightarrow

Okres precesji wynosi ok. 26 000 lat



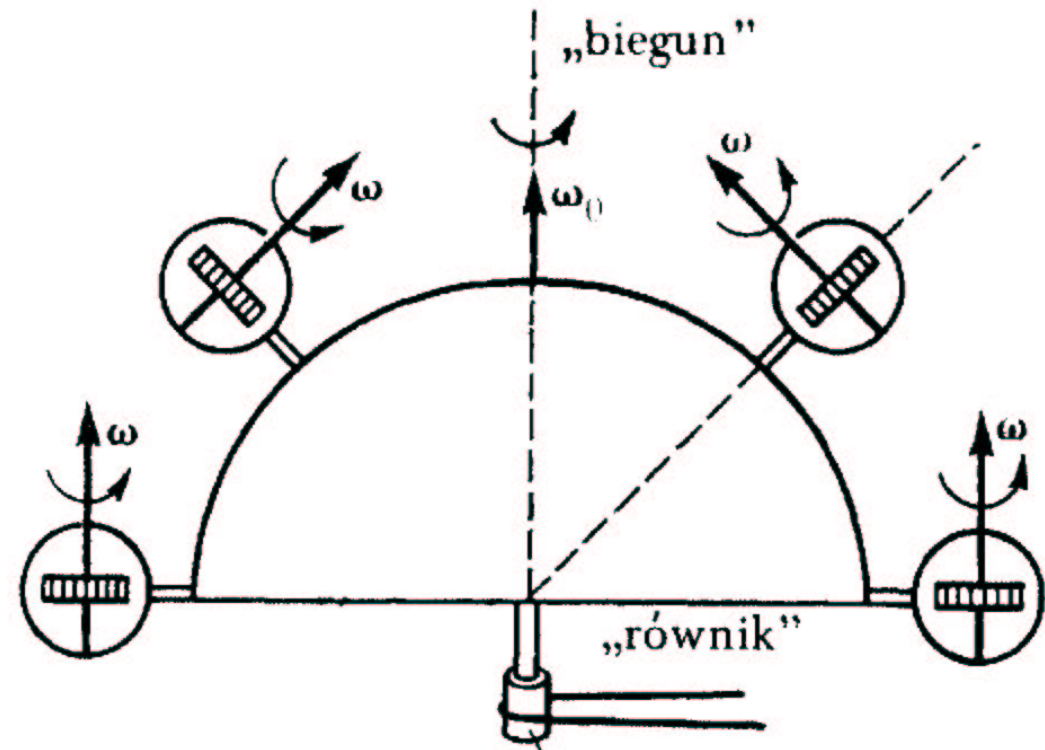
Kompas żyroskopowy

Rozważmy żyroskop w układzie obracającej się Ziemi.

Jeśli na żyroskop nie działają zewnętrzne momenty sił, będzie on zachowywał orientację w przestrzeni (względem zewnętrznego układu inercjalnego!)

Jeśli jednak nałożymy więzy wymuszające poziome położenie osi obrotu żyroskopu (równoległe do powierzchni Ziemi) to po pewnym czasie oś żyroskopu ustawi się wzdłuż południka.

Będzie to efekt działania momentów sił więzów.



Kolokwium

W dniu jutrzejszym, 7 stycznia 2003,
godz. 8¹⁵ – 12⁰⁰, Sala Duża Doświadczalna

Miejsca na sali będą numerowane
i przydzielane wg. imiennej listy.

Bardzo prosimy o punktualne przybycie