Kinematyka: opis ruchu

Wstęp do Fizyki I (B+C)

Wykład III:

- Pojęcia podstawowe
  - ⇒ punkt materialny, układ odniesienia, układ współrzędnych
  - ⇒ tor, prędkość, przyspieszenie
- Ruch jednostajny i jednostajnie przyspieszony
- Ruch po okręgu i ruch harmoniczny

Pojęcia podstawowe

Punkt materialny

Ciało, którego rozmiary można w danym zagadnieniu zaniedbać.

Zazwyczaj przyjmujemy, źe punkt materialny powinien być dostatecznie mały.

Nie jest to jednak konieczne !

Przykład: “wózek” na torze powietrznym.

Ważne jest, żeby ciało nie miało dodatkowych “stopni swobody”
(np. obroty , drgania własne, stany wzbudzone)

Położenie punktu materialnego całkowicie określa jego “stan”.

$\Rightarrow$ pojęcie punktu materialnego umożliwia prosty opis wielu sytuacji fizycznych.

Naogół przyjmujemy, że punkt materialny obdarzony jest masą.

Pojęcia podstawowe

Ruch

Zmiana położenia ciała względem wybranego układu odniesienia.

Układ odniesienia

Ciało, które wybieramy jako “punkt odniesienia”.

Najczęściej jest nim Ziemia...

Układ odniesienia można też zdefiniować określając jego położenie (lub ruch) względem wybranego ciała lub grupy ciał.

Przykład:

- układ środka masy zderzających się cząstek
- układ związany ze środkiem Galaktyki

Pojęcia podstawowe

Układ współrzędnych

Służy do określenia położenia ciała w danym układzie odniesienia

Położenie możemy zapisać na wiele różnych sposobów:

- układ współrzędnych kartezjańskich:

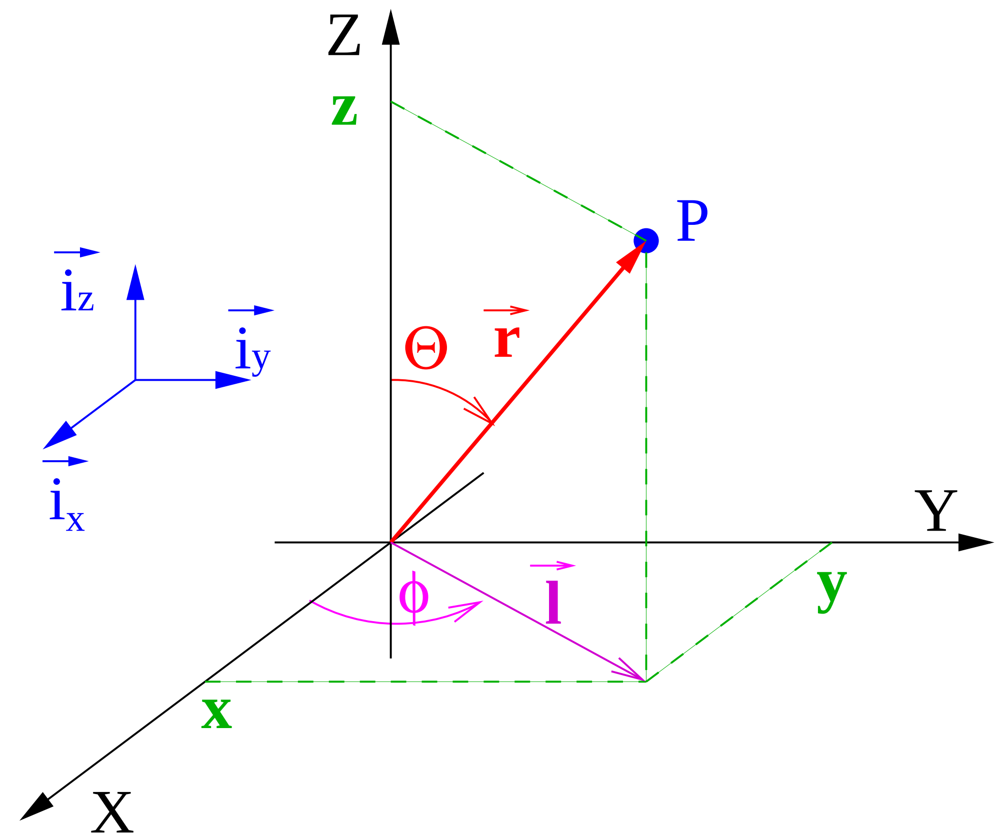
$$\vec{r} = x \cdot \vec{i}_x + y \cdot \vec{i}_y + z \cdot \vec{i}_z$$
$$\equiv (x, y, z)$$

- układ współrzędnych biegunowych:

$$\vec{r} = (r, \Theta, \phi)$$

- układ współrzędnych walcowych:

$$\vec{r} = (l, \phi, z)$$



Pojęcia podstawowe

Tor ruchu

Opisuje zmianę położenia ciała w czasie

W ogólnym przypadku -
postać parametryczna toru:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

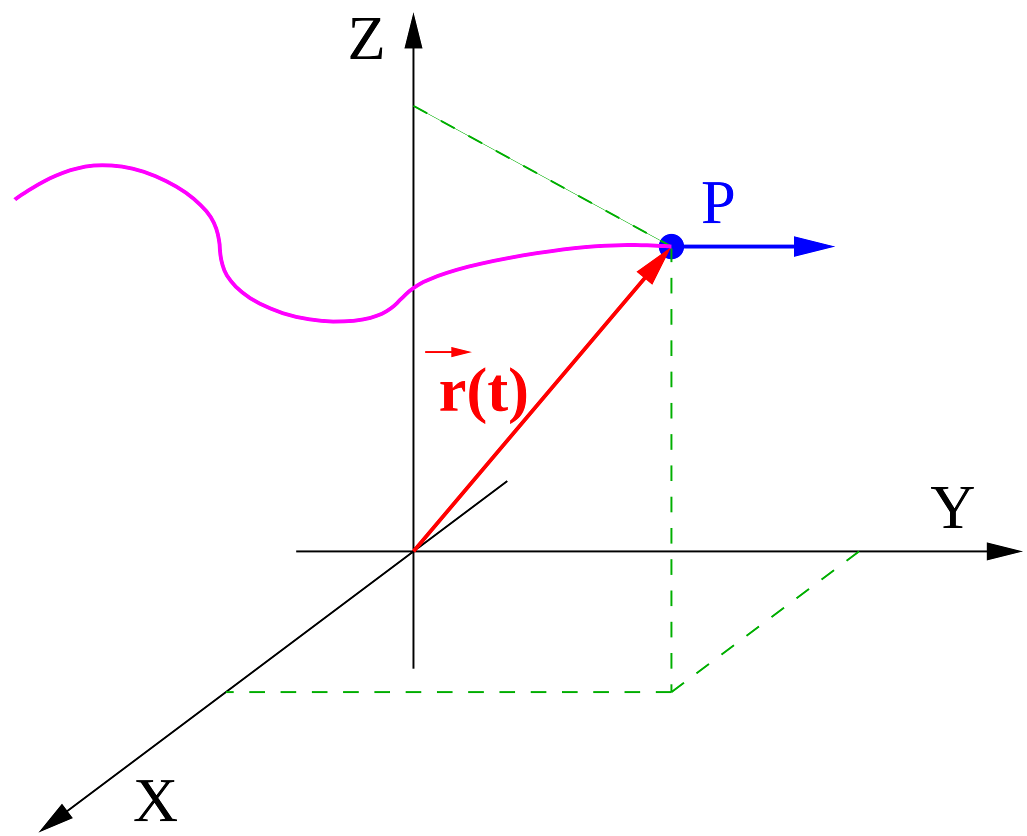
$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t)) = \vec{r}(t)$$

W szczególnych przypadkach możliwe jest odwrócenie jednej z zależności: $t = F(x)$

$\Rightarrow$ postać uwikłana toru:

$$y = y(F(x)) = y(x) \quad z = z(x)$$

$$\vec{r} = (x, y(x), z(x))$$



Pojęcia podstawowe

Prędkość średnia

W odstępie czasu:

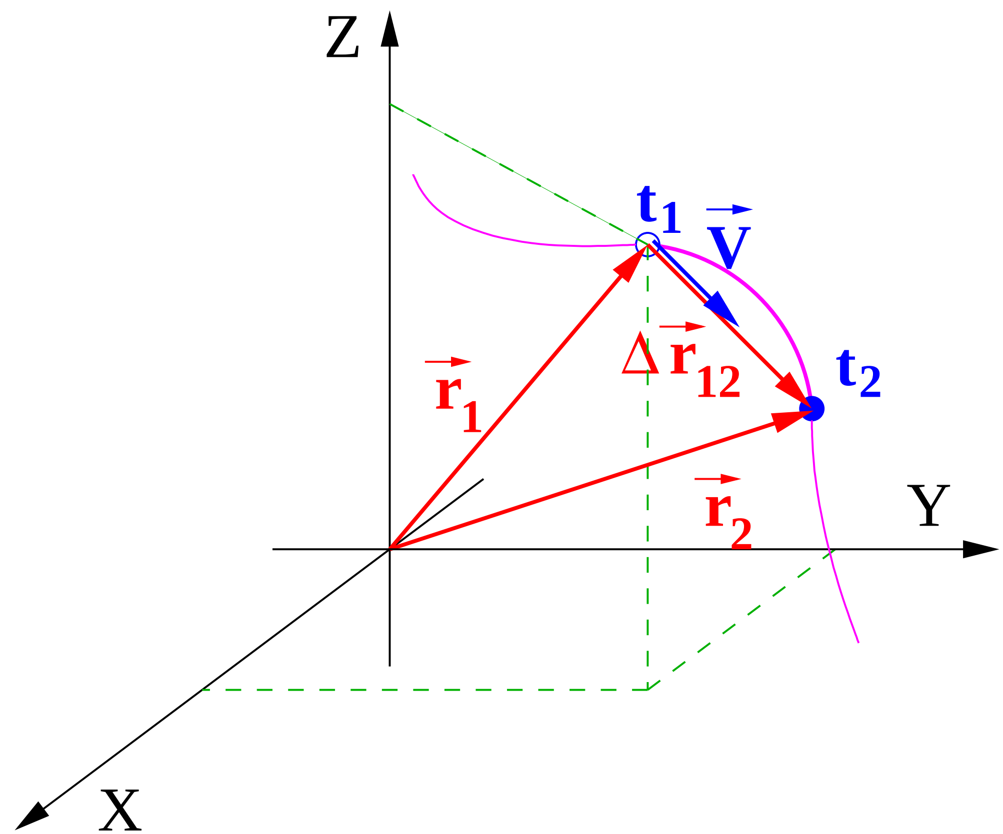
$$\Delta t_{12} = t_2 - t_1$$

punkt materialny przemieścił się o:

$$\Delta\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

Prędkość średnią definiujemy jako

$$\vec{V}_{12}^{(śr)} = \frac{\Delta\vec{r}_{12}}{\Delta t_{12}}$$



Pojęcia podstawowe

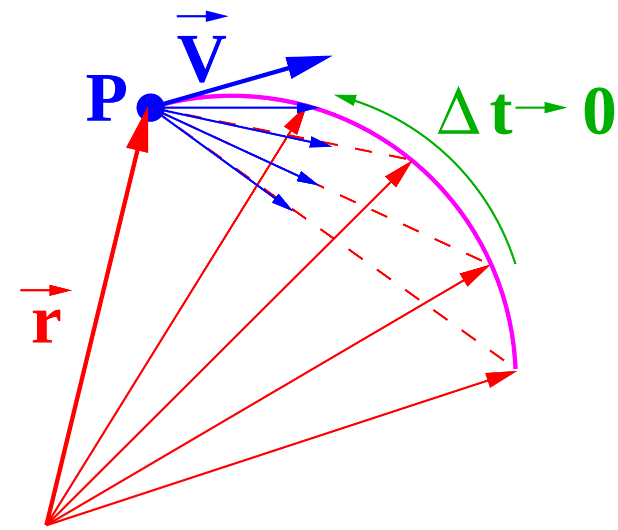
Prędkość chwilowa

Każdy pomiar prędkości musi trwać skończony okres czasu.

Zawsze więc mierzymy prędkość średnią.

Pojęcie prędkości chwilowej wprowadzamy jako granicę nieskończenie krótkiego pomiaru:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



Wektor prędkości chwilowej jest styczny do toru

Matematycznie odpowiada to definicji pochodnej:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i}_x + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{i}_y + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{i}_z = v_x \cdot \vec{i}_x + v_y \cdot \vec{i}_y + v_z \cdot \vec{i}_z$$

Wartość prędkości: $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Pojęcia podstawowe

Przyspieszenie średnie

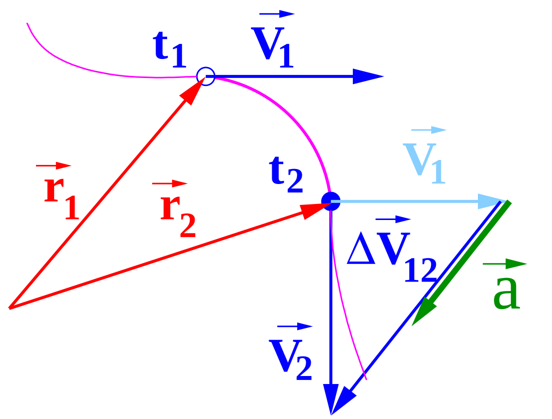
W odstępie czasu: $\Delta t_{12} = t_2 - t_1$

prędkość zmienia się o:

$\Delta\vec{V}_{12} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{V}(t_2) - \vec{V}(t_1)$

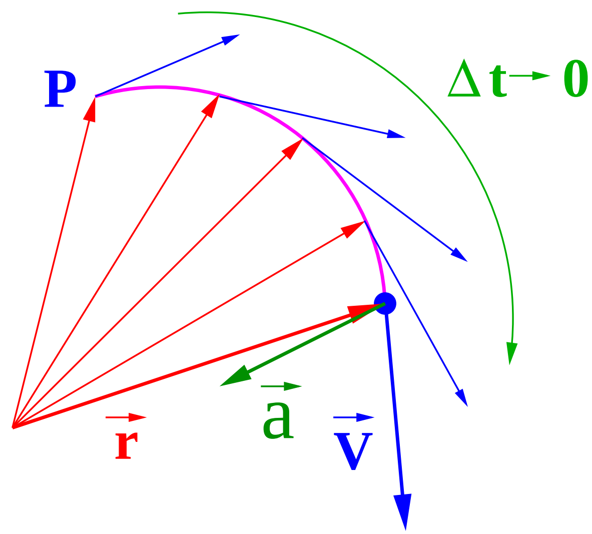
Przyspieszenie średnie:

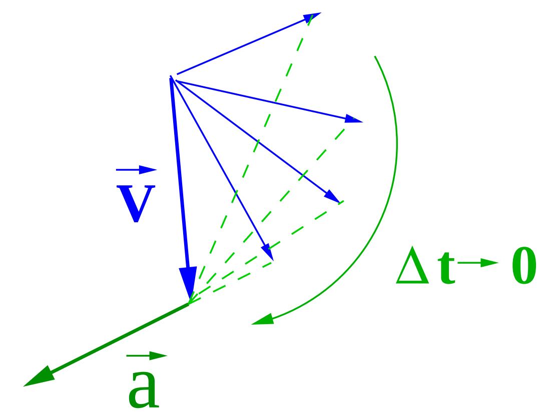
$$\vec{a}_{12}^{(\text{śr})} = \frac{\Delta\vec{V}_{12}}{\Delta t_{12}}$$



Przyspieszenie chwilowe

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}}$$





$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\cdot\vec{i}_x + \frac{dV_y}{dt}\cdot\vec{i}_y + \frac{dV_z}{dt}\cdot\vec{i}_z$$
$$= a_x\cdot\vec{i}_x + a_y\cdot\vec{i}_y + a_z\cdot\vec{i}_z$$

Klasyfikacja ruchów

Ze względu na tor wybrane przypadki szczególne

- prostoliniowy, odbywający się wzdłuż lini prostej

  Zawsze możemy tak wybrać układ współrzędnych aby

$$y(t) = z(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{i}_x \cdot x(t)$$

- płaski, odbywający się w ustalonej płaszczyźnie

$$z(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{i}_x \cdot x(t) \; + \; \vec{i}_y \cdot y(t)$$

- po okręgu

Ze względu na przyspieszenie

- jednostajny $\Rightarrow$ wartość prędkości pozostaje stała: $|\vec{V}|$ = const
- jednostajnie przyspieszony $\Rightarrow$ przyspieszenie jest stałe: $\vec{a}$ = const

Ruch jednostajny prostoliniowy

Najprostszy przypadek ruchu:

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{Jednostajny: } |\vec{V}| = \text{const} \\ \bullet\ \text{Prostoliniowy: } \frac{\vec{V}}{V} = \text{const}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \vec{a} = 0$$

Przyjmując, że ruch odbywa się wzdłuż osi X:

$$V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = V\ dt$$

$$\Rightarrow x = x_0 + \int_{t_0}^{t} V\ dt$$

$$x = x_0 + V \cdot (t - t_0) \qquad x_0 = x(t_0)$$

Położenie (przebyta droga) jest liniową funkcją czasu.

Drogi przebyte w równych odcinkach czasu są sobie równe.

Ruch jednostajnie przyspieszony

Jednostajnie przyspieszony: $\vec{a}$ = const

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\vec{V} = \vec{a}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V} = \vec{V}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}\, dt$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0) \qquad\qquad \vec{V}_0 = \vec{V}(t_0)$$

Prostoliniowy

Ruch jest prostoliniowy: $\frac{\vec{V}}{V}$ = const $\quad \Leftrightarrow \quad \vec{V} \,||\, \vec{a}$ = const

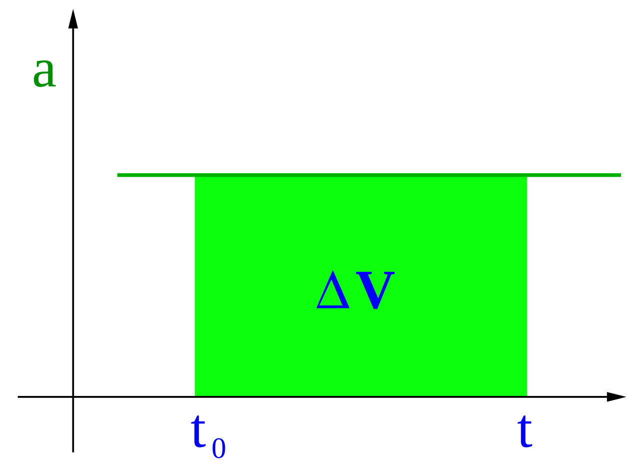
Przyspieszenie musi mieć kierunek zgodny z kierunkiem prędkości

Ruch jednostajnie przyspieszony

Prostoliniowy (⇒ jednowymiarowy)

Prędkość jest liniową funkcją czasu:

$$V = V_0 + \int_{t_0}^{t} a \, dt = V_0 + a \cdot (t - t_0)$$

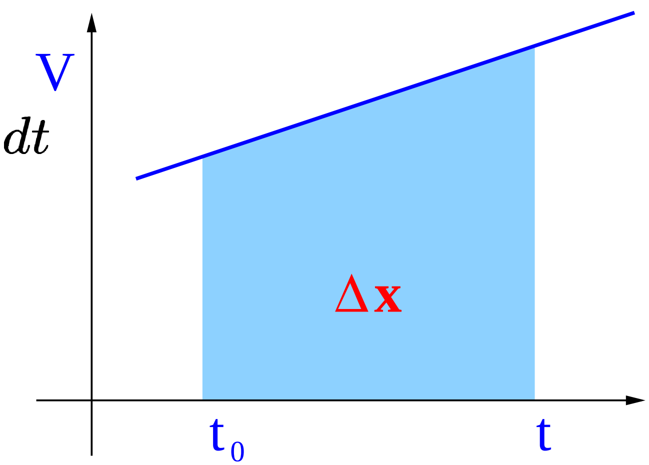


Położenie jest kwadratową funkcją czasu:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} V \, dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} [V_0 + a \cdot (t - t_0)] \, dt$$

$$= x_0 + V_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2$$

$$= x_0 + \frac{1}{2}(V + V_0) \cdot (t - t_0)$$



Ruch jednostajnie przyspieszony

Przyjmijmy, że w chwili $t_0 = 0$ ciało spoczywa: $V_0 = V(t_0) = 0$.

Mierzymy drogę jaką ciało przebywa w równych przedziałach czasu:

$$\begin{aligned} \Delta t_n &= t_n - t_{n-1} = \Delta t \\ \Rightarrow\ t_n &= n \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Przebyta droga:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}\, a \cdot t^2 \\ \Delta x_n &= x(t_n) - x(t_{n-1}) = \frac{1}{2}\, a \cdot \left(t_n^2 - t_{n-1}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\, a \cdot \Delta t^2 \left(n^2 - (n-1)^2\right) = \frac{1}{2}\, a \cdot \Delta t^2 \cdot (2n-1) \end{aligned}$$

Drogi w kolejnych odcinkach czasu mają się do siebie jak kolejne liczby nieparzyste:

$$x_1 : x_2 : x_3 : \ldots = 1 : 3 : 5 : 7 : \ldots$$

Ruch jednostajnie przyspieszony

W ogólnym przypadku ruch jednostajnie przyspieszony nie jest prostoliniowy.

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}_0 + \vec{a}\cdot(t-t_0) \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{V}_0\cdot(t-t_0) + \frac{1}{2}\,\vec{a}\cdot(t-t_0)^2 \end{aligned}$$

Ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie przechodzącej przez $\vec{r}_0$ i wyznaczonej przez kierunki wektorów $\vec{V}_0$ i $\vec{a}$.

Możemy wybrać układ współrzędnych tak aby:

$$\vec{i}_x \perp \vec{a} \qquad \text{oraz} \qquad \vec{i}_y \,||\, \vec{a}$$

$\Rightarrow$ ruch jednostajny (X) $\oplus$ ruch jednostajnie przyspieszony (Y) $\oplus$ spoczynek (Z):

$$\begin{aligned} a_x &= 0 \quad & V_x &= V_{x,0} = const \quad & x &= x_0 + V_{x,0}\cdot(t-t_0) \\ a_y &= a \quad & V_y &= V_{y,0} + a\,t \quad & y &= y_0 + V_{y,0}\cdot(t-t_0) + \frac{1}{2}\,a\cdot(t-t_0)^2 \\ a_z &= 0 \quad & V_z &= 0 \quad & z &= 0 \end{aligned}$$

Ruch jednostajnie przyspieszony

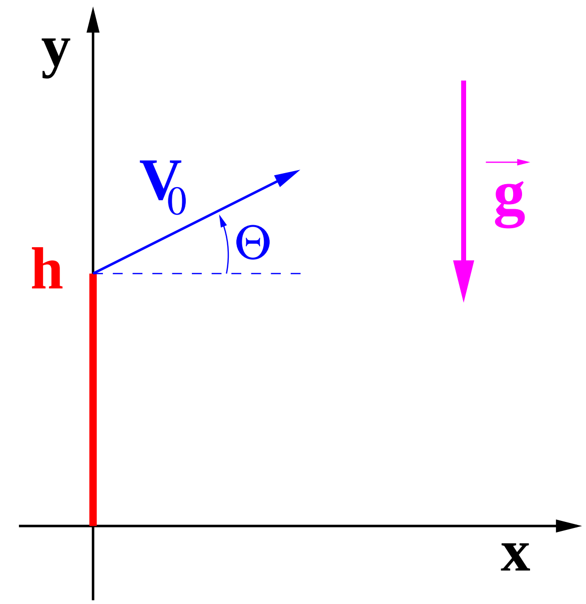
Ruch w polu grawitacyjnym

Ruch ciala w jednorodnym polu grawitacyjnym:

$$\vec{a} = \vec{g} = (0, -g, 0)$$

(wygodny wybór układu współrzędnych)

Pole grawitacyjne Ziemi możemy przyjąć za jednorodne, jeśli badamy ruch na odległościach $|\Delta\vec{r}| \ll R_Z$



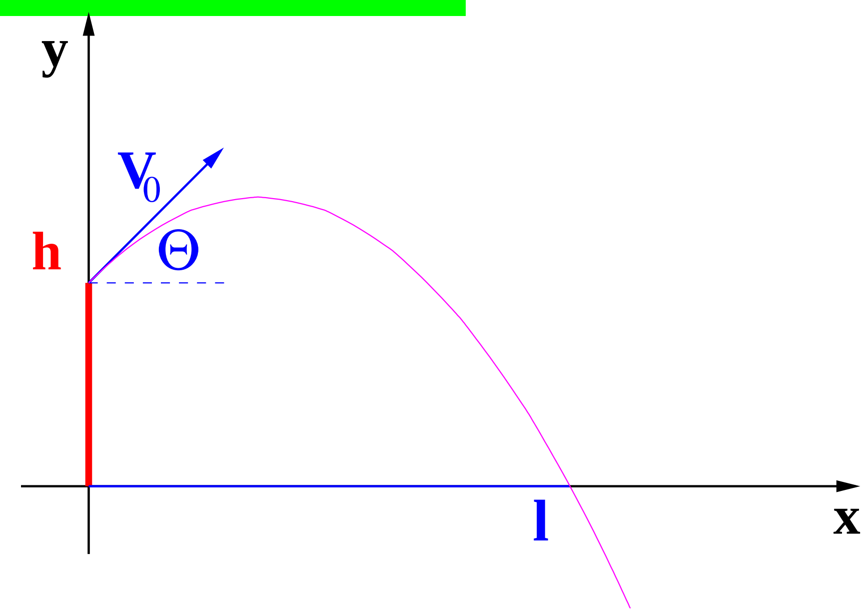
Rodzaje ruchu:

- spadek swobodny: $V_0 = 0$ (ruch prostoliniowy)
- rzut pionowy: $\theta = \pm\pi/2$ (ruch prostoliniowy)
- rzut poziomy: $\theta = 0$
- rzut ukośny: $\theta \neq 0, \pi/2, \ldots$

Ruch jednostajnie przyspieszony

Ruch w polu grawitacyjnym

Niezależność ruchów: $t_0 = 0,\ x_0 = 0,\ y_0 = h$



$$x = V_{x,0} \cdot t = V_0 \cos\theta \cdot t$$

$$y = h + V_{y,0} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 = h + V_0 \sin\theta \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Rzut poziomy $\theta = 0 \Rightarrow$ czas spadania nie zależy od V_0: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

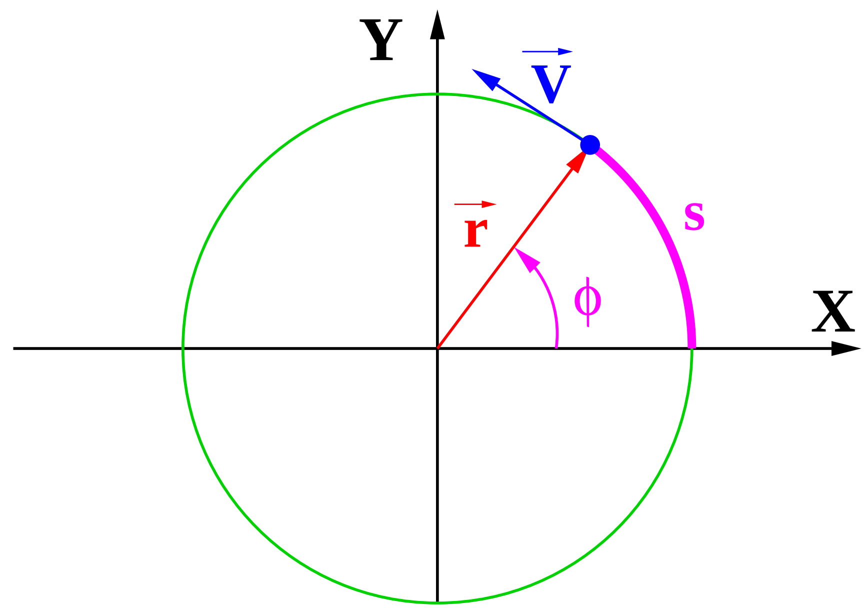
Tor w rzucie ukośnym: $\Rightarrow\ y = h + x \cdot \tan\theta - x^2 \cdot \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\theta^2} \Rightarrow$ parabola

Zasięg dla h=0 $\Rightarrow\ l = \frac{V_0^2}{g} \sin(2\theta) \Rightarrow$ największy zasięg dla $\theta = \frac{\pi}{4}$ (45°)

Ruch po okręgu

Położenie ciała może być opisane jedną zmienną:

- kąt w płaszczyźnie XY - ϕ
- długość łuku okręgu - s = $r \cdot \phi$



Prędkość:

$$V = \frac{ds}{dt} = r\,\frac{d\phi}{dt} = r\,\omega$$

prędkość kątowa $\omega = \frac{d\phi}{dt}$

Przyspieszenie kątowe: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$

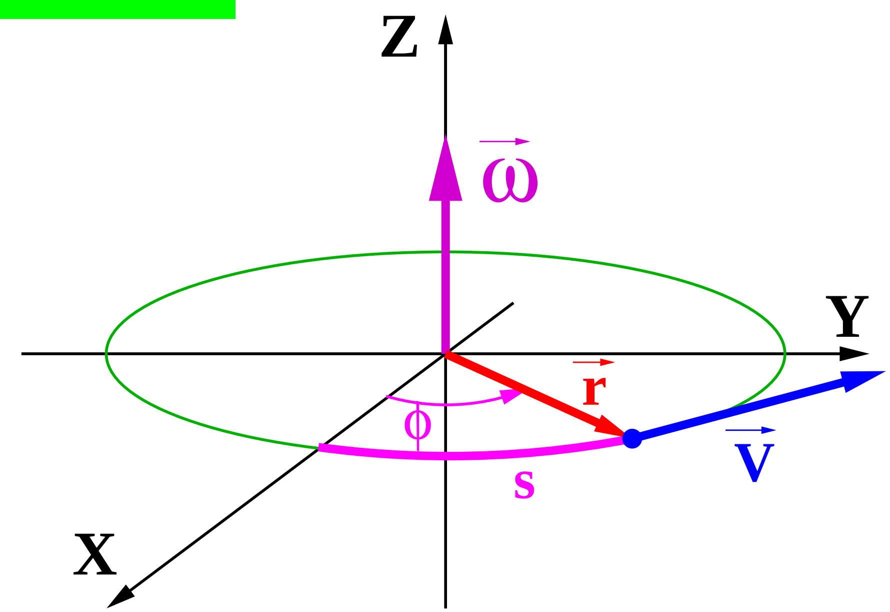
Ruch jednostajny po okręgu: $\alpha = 0 \Rightarrow \omega$ = const $\Rightarrow$ V = const

ale $\vec{V} \neq$ const $\Rightarrow \vec{a} \neq 0$!?

Ruch po okręgu

Prędkość w zapisie wektorowym:

$$\boxed{\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$



Przyspieszenie:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V} \\ &= \vec{a_t} + \vec{a_n}\end{aligned}$$

Oprócz przyspieszenia stycznego $\vec{a_t} \upuparrows \vec{V}$, opisującego zmianę $|\vec{V}|$,
jest też przyspieszenie normalne $\vec{a_n}$, odpowiedzialne za zmianę kierunku $\vec{V}$ w czasie.

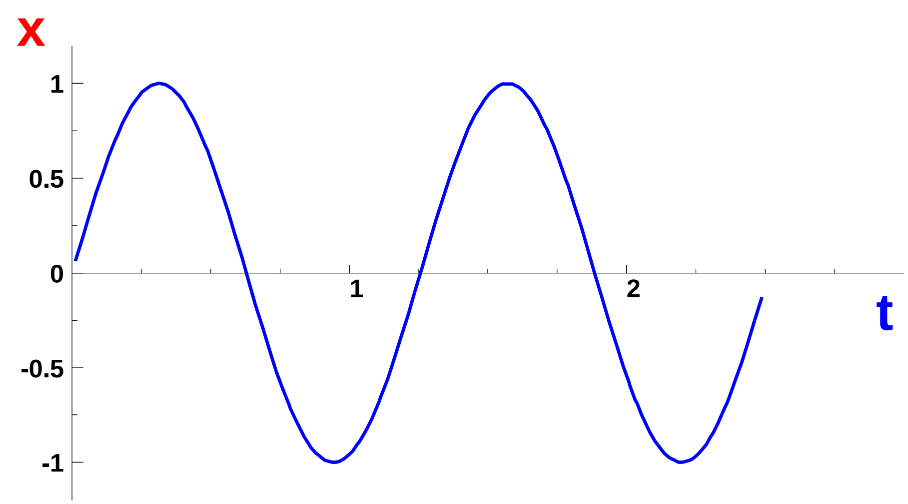
$$\vec{a_n} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \cdot \vec{r} \qquad A \times (B \times C) = (A \cdot C) \cdot B - (A \cdot B) \cdot C$$

przyspieszenie dośrodkowe

Ruch harmoniczny

Szczególny przykład ruchu drgającego:

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$



Parametry

- amplituda A
- częstość kołowa ω

  okres drgań $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- faza początkowa ϕ

Prędkość: $V = \frac{dx}{dt} = \omega\ A \cdot \cos(\omega t + \phi)$

Przyspieszenie: $a = \frac{dV}{dt} = -\omega^2\ A \cdot \sin(\omega t + \phi)$

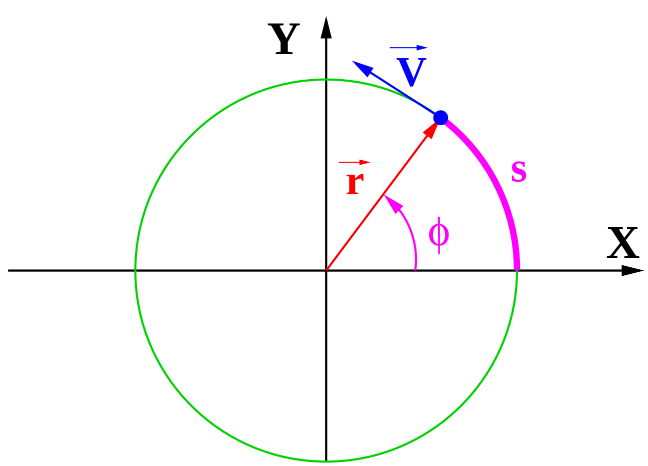
Równanie oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Ruch harmoniczny

Równanie oscylatora dobrze opisuje zachowanie wielu układów fizycznych:

- ciężarek na sprężynie
- wahadło matematyczne dla małych wychyleń
- kamerton, struna, itp...



Ruch jednostajny po okręgu jest złożeniem dwóch niezależnych ruchów harmionicznych:

$$x = r \cdot \cos(\omega \cdot t) = r \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$$
$$y = r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Ruch po okręgu $\Longleftrightarrow$ różnica faz $\Delta\phi = \pm\frac{\pi}{2}$

Ciekawostka: Ruch harminiczny można przedstawić jako złożenie dwóch ruchów po okręgu...