Kinematyka relatywistyczna

Wstęp do Fizyki I (B+C)

Wykład V:

- Transformacja Galileusza
- Teoria względności Einsteina
- Transformacja Lorenza

Transformacja Galileusza

Zdarzenie

Zdarzenie: jednoczesne określenie czasu i położenia.

Zjawisko zachodzące w pewnym miejscu w przestrzeni i w pewnej chwili czasu.

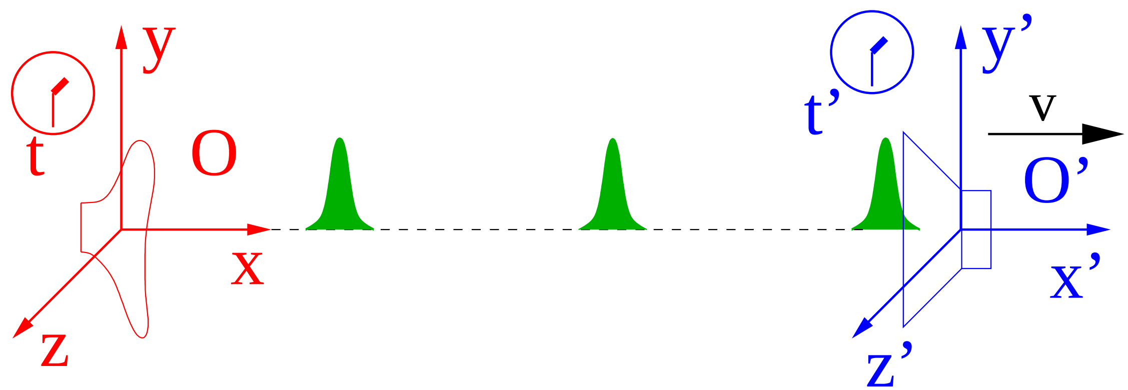
Przykłady:

- **pomiar** położenia ciała (w danej chwili czsu)
- zderzenie kulek
- rozszczepienie jądra atomowego
- wysłanie impulsu (świetlnego, dźwiękowego, itp...)
- rejestracja impulsu

ZDARZENIE = CZAS + POŁOŻENIE

Transformacja Galileusza

Efekt Dopplera



Zdarzeniem jest zarówno wysłanie kolejnego impulsu, jak i jego rejestracja.

Oba typy zdarzeń mogą być zmierzone (czas i położenie) przez obu obserwatorów:
O' związanego ze źródłem i rejestrującego impulsy O.

Dla każdego przekazywanego impulsu mamy łącznie 4 pomiary

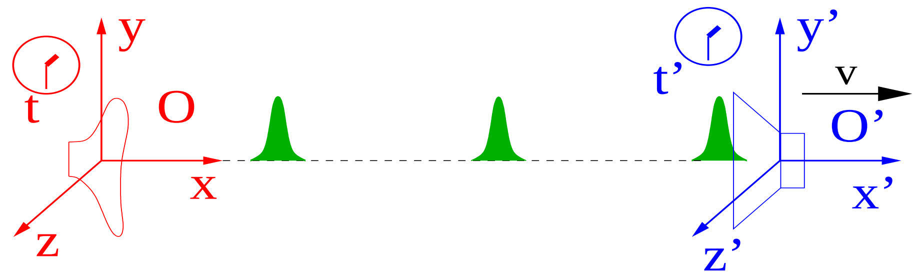
Transformacja ukladu współrzędnych

W przypadku ogólnym obserwując to samo zdarzenie
każdy z obserwatorów może zmierzyć inne współrzędne.

Jeśli wiemy jak obserwatorzy poruszają się względem siebie,
powinniśmy móc wyznaczyć transformacje $(t, x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad (t', x', y', z')$

Transformacja Galileusza

Efekt Dopplera



Przyjmijmy, że obserwatorzy (początki ich układów) mijają się w chwili $t = t' = 0$

Wysłanie imuplsu n w układzie O': $(t', x', y', z') = (n\,T, 0, 0, 0)$ T - ogres drgań.

W układzie O: $(t, x, y, z) = (n\,T, n\,T\,V, 0, 0)$ V - prędkość O' w O.

Rejestracja impulsu n w układzie O: $(t, x, y, z) = (n\,T + \frac{n\,T\,V}{c}, 0, 0, 0)$

$\Rightarrow$ Okres mierzony przez O: $\tilde{T} = T(1 + \frac{V}{c})$

Rejestracja impulsu n w układzie O':

$$(t', x', y', z') = (n\,T + \frac{n\,T\,V}{c}, -n\,T\,V - \frac{n\,T\,V^2}{c}, 0, 0)$$

Według obserwatora O' impuls przebył drogę $n\,T\,V + \frac{n\,T\,V^2}{c}$ w czasie $\frac{n\,T\,V}{c}$

$\Rightarrow$ Prędkość impulsu mierzona przez O': $\tilde{c} = c(1 + \frac{V}{c}) = c + V$

Transformacja Galileusza

Uniwersalnosc czasu

Była podstawowym założeniem w fizyce klasycznej (Newtonowskiej)

Czas nie zależał od układu odniesienia.

$$\text{Transformacja Galileusza} \Rightarrow \begin{cases} t = t' \\ x = x' + V\,t' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Konsekwencją uniwersalności czasu jest jednak względność prędkości

Każda prędkość, także prędkość światła zmienia się przy zmianie okładu odniesienia

$$\boxed{v = v' + V}$$

Tr. Galileusza

Transformacja Galileusza

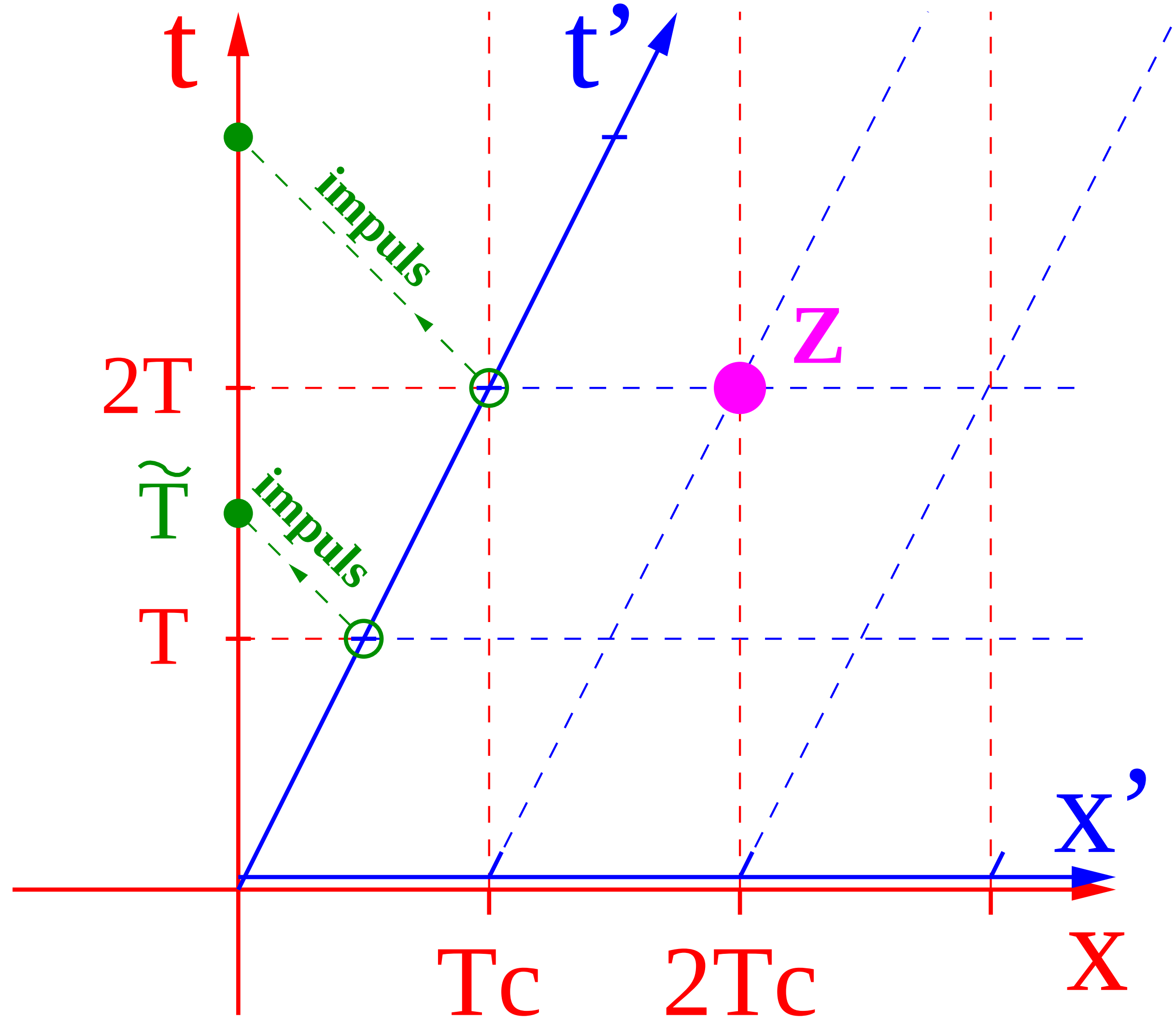
Przedstawienie graficzne

Dla dowolnego zdarzenia Z,
czas w obu układach jest ten sam
linie stałego czasu pokrywają się

Obaj obserwatorzy mierzą takie same wartości dla

- czasu pomiędzy emisjami kolejnych impulsów T
- czas pomiędzy rejestracją kolejnych impulsów $\tilde{T}$

Efekt Dopplera wynika z faktu, że inny czas przyjmują za okres drgań...



Teoria względności Einsteina

Postulat Einsteina (1905)

Prędkość światła jest uniwersalna i nie nie zależy od układu odniesienia.

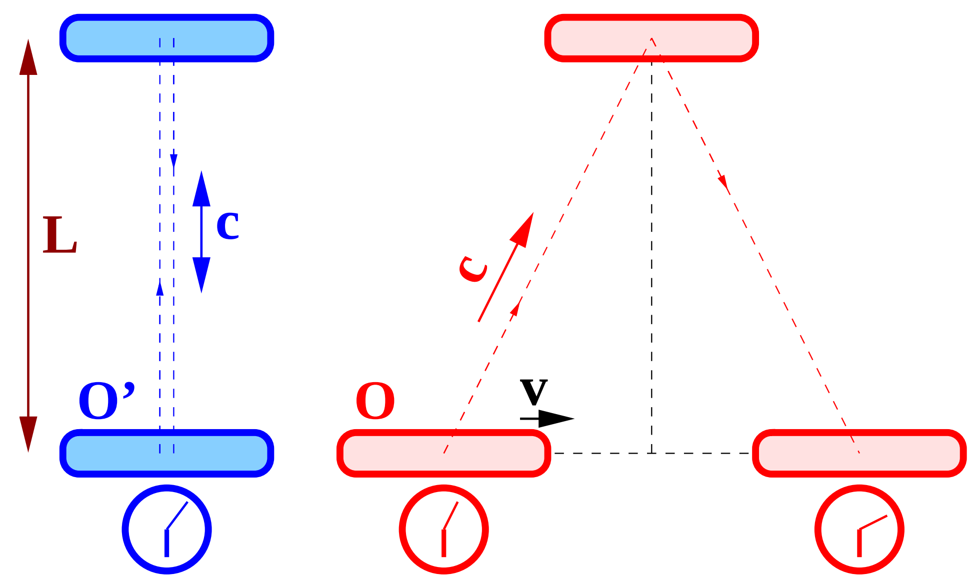
zgodnie z wynikami doświadczeń...

Uniwersalność prędkości światła nie da się jednak pogodzić z uniwersalnością czasu !

Wzgledność czasu

Obserwator O' odmierza czas przy pomocy zegara świetlnego takt $\Delta t' = \frac{2l}{c}$

Dla obserwatora O światło pokonuje dłuższą drogę $\Rightarrow \Delta t = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}}$



Dylatacja czasu: $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Teoria względności Einsteina

Z naszych rozważań wynikało, że czas w jednym układzie biegnie wolniej niż w drugim.

Ale przecież żaden układ nie powinien być wyróżniony !?...

Musimy bliżej zastanowić się jak mierzyć czas.

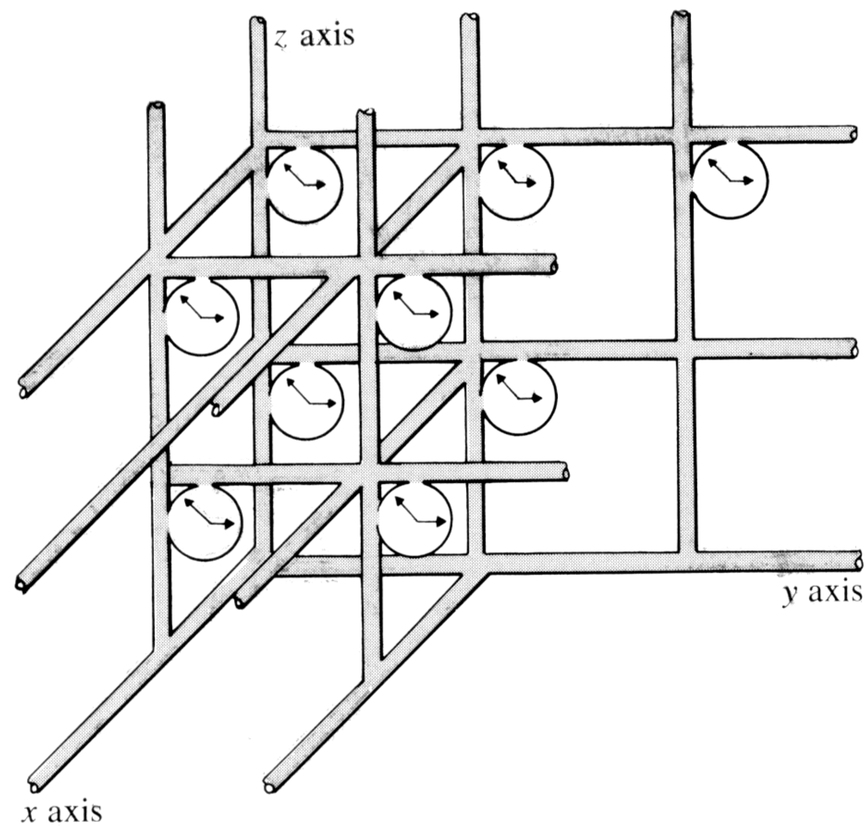
Synchronizacja zegarów

Ponieważ ruch wpływa na pomiar czasu nie wystarcza nam jeden zegar (nie możemy go przesuwać).

Musimy układ współrzędnych "wyposażyć" (przynajmniej myślowo) w całą sieć zegarów.

Synchronizację zegarów możemy przeprowadzić np. wysyłając impuls światła z początku układu

Każdy zegar "zna" swoje położenie i "wie" po jakim czasie światło do niego dotrze...



Teoria względności Einsteina

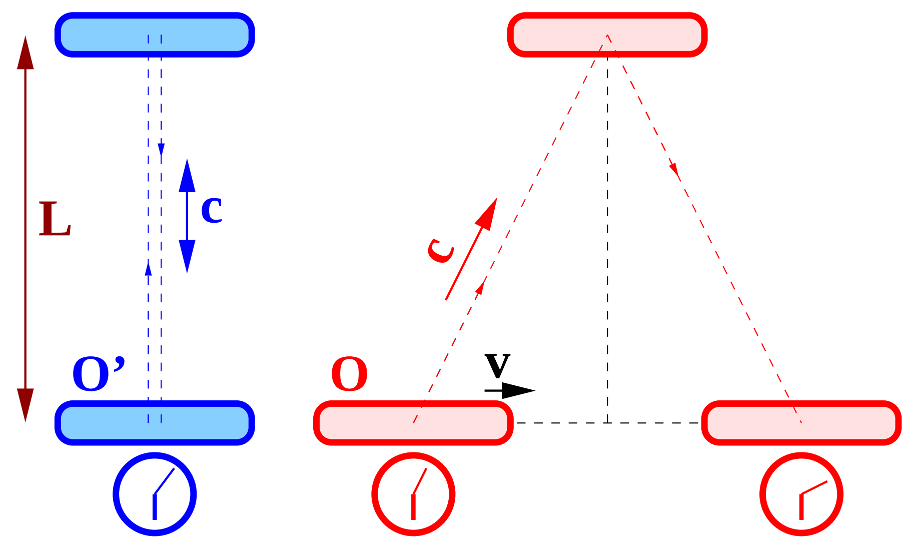
Dylatacja czasu

W zagadnieniu dylatacji czasu sytuacja nie jest symertryczna

Obserwator O’ odmierza czas przy pomocy jednego zegara

Obserwator O musi użyć dwóch zegarów

Dla obserwatora O zegary te są ze sobą zsynchronizowane ⇒ pomiar jest poprawny



Obserwator O’ stwierdzi jednak, że pomiar został źle przeprowadzony.
W jego układzie odniesienia zegary O nie są zsynchronizowane.

O’ stwierdzi też, że wszystkie zegary O odmierzają czas wolniej niż powinny !

Transformacja Lorenza

Transformacja liniowa

Aby zachować niezmienniczość praw przyrody względem przesunięć w czasie i przestrzeni, transformacja współrzędnych między układami powinna mieć postać

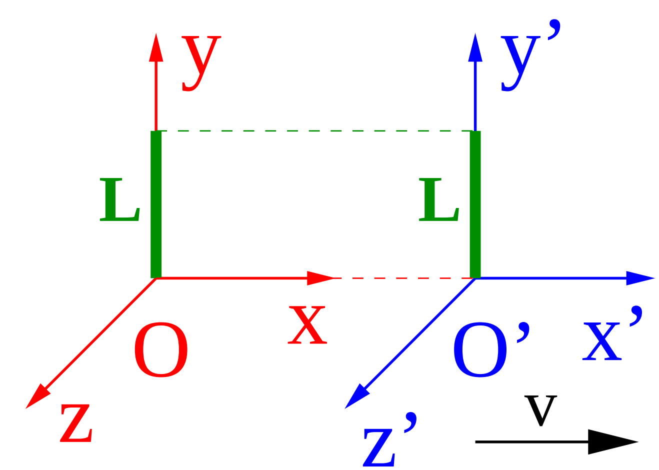
$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad L \text{ - macierz } 4 \times 4$$

Wymiary poprzeczne

Rozawżmy jednostkowe pręty umieszczone w obu układach wzdłuż osi Y (lub Z).

Z symetrii zagadnienia, żaden obserwator nie może stwierdzić, że jego pręt jest dłuższy

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

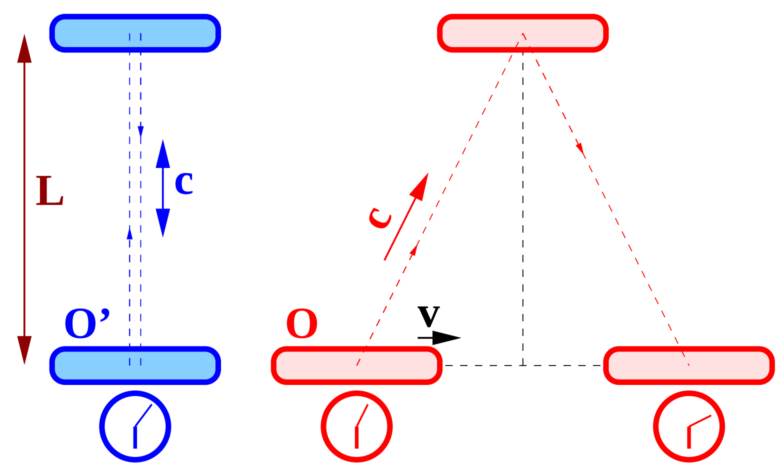


Transformacja Lorenza

Szukamy więc transformacji w ogólnej postaci:

$$t = A\,t' + B\,x'$$
$$x = C\,t' + D\,x' \qquad y = y' \qquad z = z'$$

Dylatacja czasy



Przyjmijmy, że w obu układach pierwsze “tyknięcie” zegara świetlnego ma współrzędne $(0,0,0,0)$.

Drugie “tyknięcie” w układzie O’: $(t',0,0,0)$

W układzie O:

$$t = \gamma \cdot t' \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow \quad x = \beta \cdot ct = \beta\gamma \cdot ct' \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow \quad A = \gamma \qquad C = \beta\gamma c$$

Transformacja Lorenza

Predkość światła

Przyjmijmy, że w chwili mijania się obserwatorów $t = t' = 0$
z początku układów emitowane są dwa impulsy światła, zgodnie i przeciwnie do $\vec{v}$.

Dla obu obserwatorów rozchodzą się one z prędkością c.

	O'	O	
pierwszy impuls	$x' = ct'$	$x = ct$	$\Rightarrow Ct' + D(ct') = c \cdot \left[At' + B(ct')\right]$
drugi impuls	$x' = -ct'$	$x = -ct$	$\Rightarrow Ct' - D(ct') = -c \cdot \left[At' - B(ct')\right]$

dodając i odejmując stronami otrzymujemy:

$$B = \frac{1}{c^2} C = \frac{1}{c} \beta\gamma$$

$$D = A = \gamma$$

Transformacja Lorenza

Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,\gamma\,t' + \gamma\,\beta\,x' \\ c\,\gamma\,\beta\,t' + \gamma\,x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\,\beta & 0 & 0 \\ \gamma\,\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta & 0 & 0 \\ \sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ct traktujemy jako “czwarty” wymiar (zazwyczaj zapisujemy jako wymiar “zerowy” - x_0)

Transformacja Lorenza $\equiv$ “obrót” w “płaszczyźnie” ct-x dla ruchu wzdłuż osi X

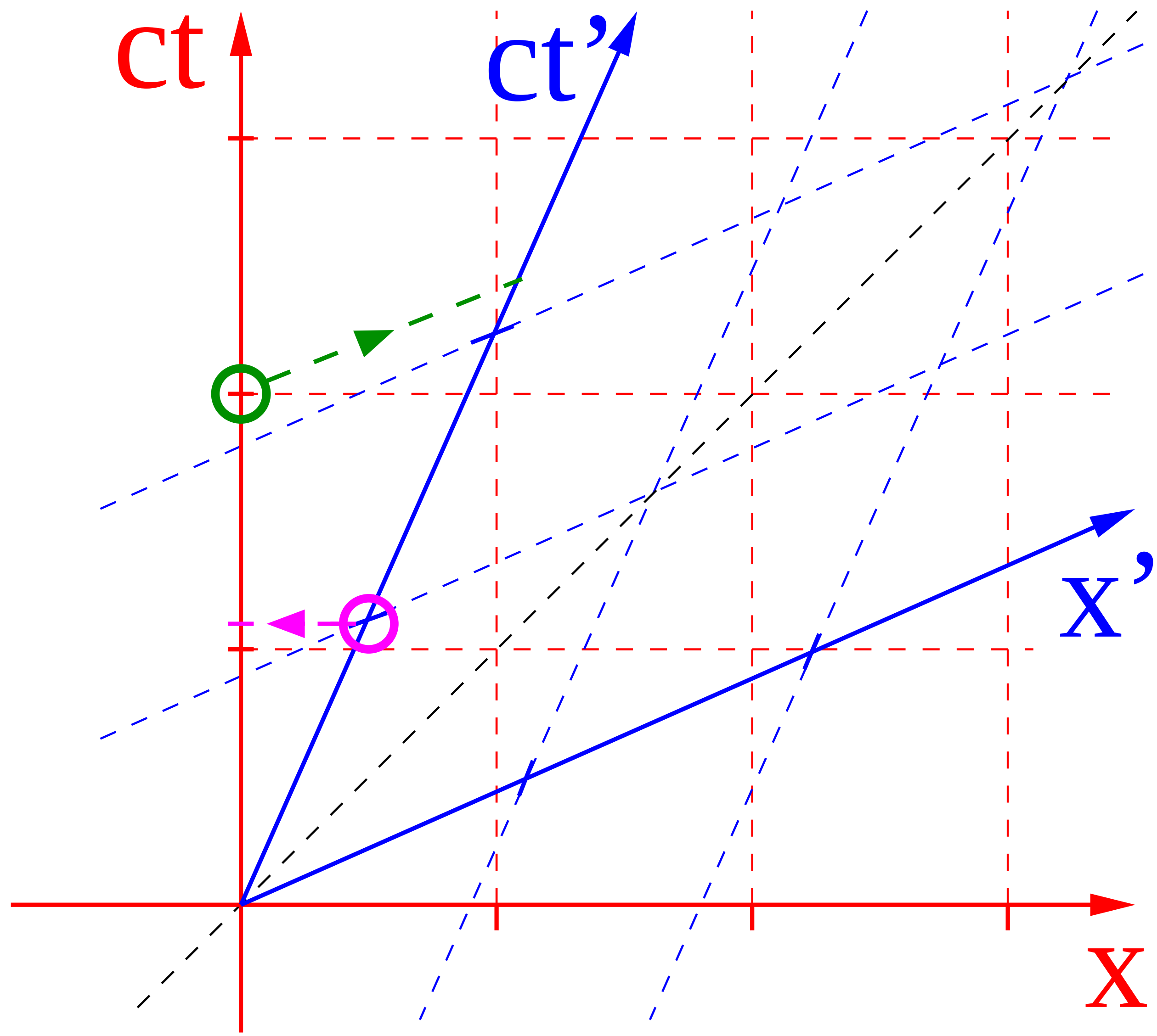
Transformacja Lorenza

Przedstawienie graficzne

Długość jednostki układu O'
w układzie O: $1' = \gamma$
(dylatacja czasu)

Ale także obserwator O' widzi
dylatację czasu O !

wykres Minkowskiego $\Rightarrow$



Transformacja Lorenza

Dodawanie prędkości

Niech ciało porusza się z prędkością $\vec{u} = (u', 0, 0)$ w układzie odniesienia O'.

Przyjmując, że w chwili $t = t' = 0$ ciało znajdowało się w początku układu:

$$x' = u' \cdot t'$$

Transformując równanie ruchu do układu O otrzymamy:

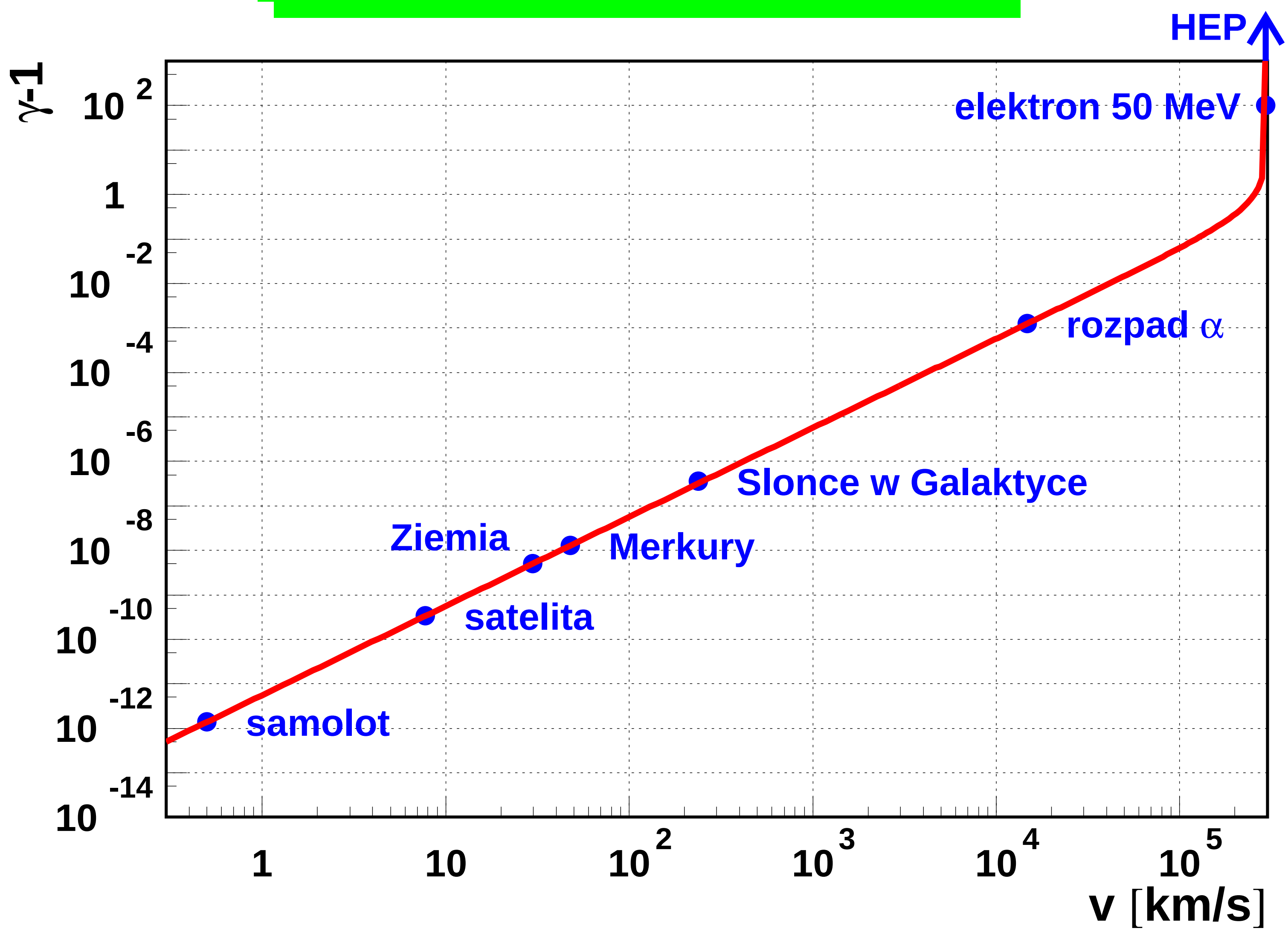
$$\begin{aligned} c\,t &= \gamma\, c\, t'\,(1 + \beta\,\beta') \\ x &= \gamma\, c\, t'\,(\beta + \beta') \qquad \beta' = \frac{u'}{c} \end{aligned}$$

Otrzymujemy relatywistyczne prawo dodawania prędkości $\qquad \beta'' = \frac{u}{c}$

$$\boxed{\beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\,\beta'}}$$

$\beta' = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta'' = 1$ (c=const); $\qquad \beta,\ \beta' < 1 \quad \Rightarrow \quad \beta'' < 1$ (prędkość graniczna)

Transformacja Lorenza



⇒ astrofizyka i fizyka cząstek elementarnych (High Energy Physics)

Transformacja Lorenza

Pomiar dylatacji czasu

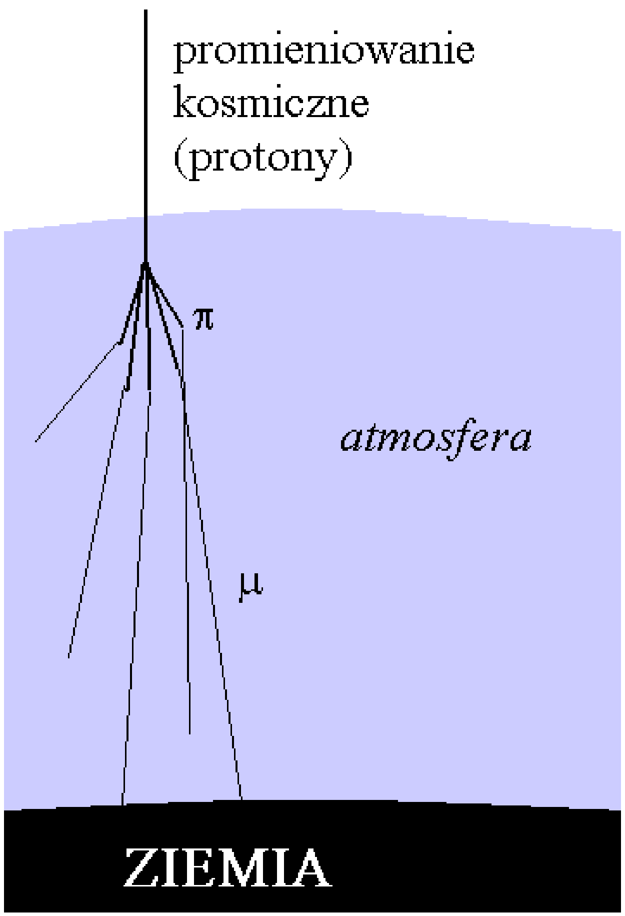
Eksperyment z zegarami atomowymi w samolocie (Hafele i Keating, 1972)

Przewidywania [ns]	Lot na wschód	Lot na zachód
efekt kinematyczny	-184 ± 18	96 ± 10
efekt grawitacyjny	144 ± 14	179 ± 18
suma	-40 ± 23	275 ± 21

Wyniki eksperymentów		
zegar 1	–57	277
zegar 2	–74	284
zegar 3	–55	266
zegar 4	–51	266
Średnia	-59 ± 10	273 ± 7

Transformacja Lorenza

Czas życia cząstek



Czas życia mionu (w spoczynku): $\tau = 2.2\ \mu s$

Gdyby nie było dylatacji czasu: średni zasięg $\beta c \tau \leq 659$ m

Miony produkowane w górnych warstwach atmosfery mają jednak bardzo duże energie: $\langle E \rangle \sim 3$ GeV $\Rightarrow \gamma \sim 30$

Bez problemu docierają do powierzni Ziemi: $\beta \gamma c \tau \sim 20$ km