Kinematyka relatywistyczna

Wstęp do Fizyki I (B+C)

Wykład VI:

- Transformacja Lorenza
  - $\Rightarrow$ Interwał czasoprzestrzenny i przyczynowość
- Skrócenie Lorenza
- Paradoks bliźniąt
- Relatywistyczny efekt Dopplera

Transformacja Lorenza

Wyrażenia na Transformację Lorenza uzyskaliśmy przy założeniu, że początki układów mijają się w chwili $t = t' = 0$.

$\Rightarrow$ zdarzenie to ma w obu układach współrzędne $(0, 0, 0, 0)$

W ogólności Transformację Lorenza opisuje transformację różnicy współrzędnych dwóch wybranych zdarzeń A i B: $\Delta t = t_B - t_A, \;\; \Delta x = x_A - x_B \ldots$

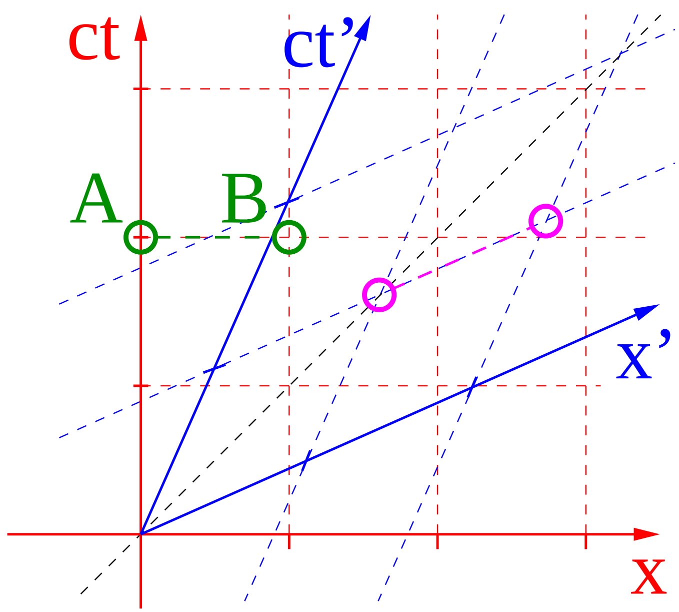
Przyjmując $c \equiv 1$:

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\,\Delta t' + \gamma\,\beta\,\Delta x' \\ \gamma\,\beta\,\Delta t' + \gamma\,\Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\,\beta & 0 & 0 \\ \gamma\,\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix}$$

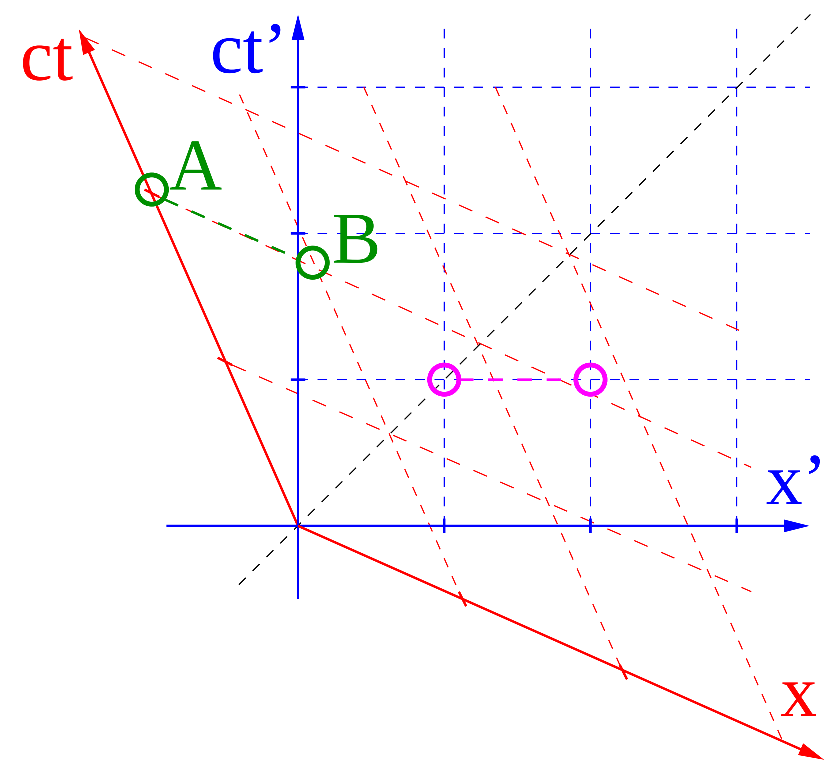
Jeśli przyjmiemy, że w obu układach A = $(0, 0, 0, 0) \Rightarrow$ transformacja współrzędnych.

Transformacja Lorenza

Względność równoczesności



$\Leftrightarrow$



Dwa zdarzenia równoczesne w układzie O nie są równoczesne w układzie O'

Kolejność w jakiej zaobserwuje je obserwator O' zależy od położenia zdarzeń w stosunku do kierunku ruchu względnego.

Transformacja Lorenza

Interwał

Interwał czasoprzestrzenny między dwoma zdarzeniami definiujemy jako:

$$s_{AB} = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

Interwał jest niezmiennikiem transformacji Lorenza ! “odległość” w czasoprzestrzeni

Nie zależy od układu odniesienia, w którym go mierzymy.

Przyczynowość

Jeśli $s_{AB} > 0$ to można znaleźć taki układ odniesienia,
w którym zdarzenia A i B będą zachodzić w tym samym miejscu.

$\sqrt{s_{AB}}$ określa odstęp czasu między zdarzeniami w tym układzie
Jeśli zdarzenia A i B związane są z ruchem jakiejś cząstki $\Rightarrow$ czas własny

$$\boxed{s_{AB} > 0 \text{ - interwał czasopodobny}}$$

$\Rightarrow$ Zdarzenia A i B mogą być powiązane przyczynowo.
Ich kolejność jest zawsze ta sama.

Transformacja Lorenza

Przyczynowość

Jeśli $s_{AB} < 0$ to można znaleźć taki układ odniesienia,
w którym zdarzenia A i B będą zachodzić w tej samej chwili.

$\sqrt{-s_{AB}}$ określa odległość przestrzenną między zdarzeniami w tym układzie
np. mierzona długość ciała (A i B - pomiary położenia końców)

$\boxed{s_{AB} < 0 \text{ - interwał przestrzeniopodobny}}$

$\Rightarrow$ Zdarzenia A i B NIE mogą być powiązane przyczynowo !
Kolejność zdarzeń zależy od układu odniesienia.

Jeśli $s_{AB} = 0$ to w żadnym układzie odniesienia
zdarzenia A i B nie będą zachodzić w tej samej chwili ani w tym samym miejscu

$\boxed{s_{AB} = 0 \text{ - interwał zerowy}}$

Zdarzenia A i B może połączyć przyczynowo jedynie impuls świetlny

Transformacja Lorenza

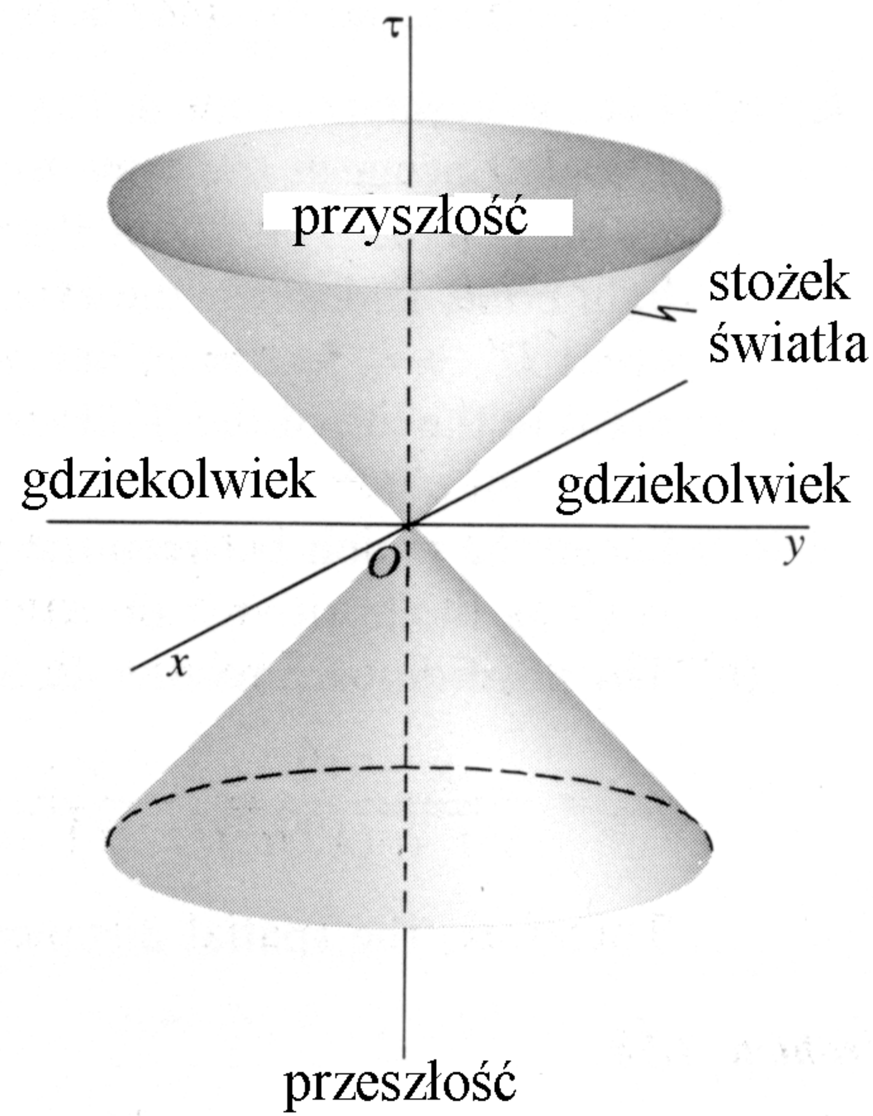
Przyczynowość

O - “tu i teraz”

$s_{OA} > 0$ i $t_A > 0$
bezwzględna przyszłość: zdarzenia na które możemy mieś wpływ

$s_{OA} < 0$
zdarzenia bez związku przyczynowego

$s_{OA} > 0$ i $t_A < 0$
bezwzględna przeszłość: zdarzenia które mogły mieś wpływ na nas



Skrócenie Lorenza

O' - układ związany z rakietą o długości L_0.

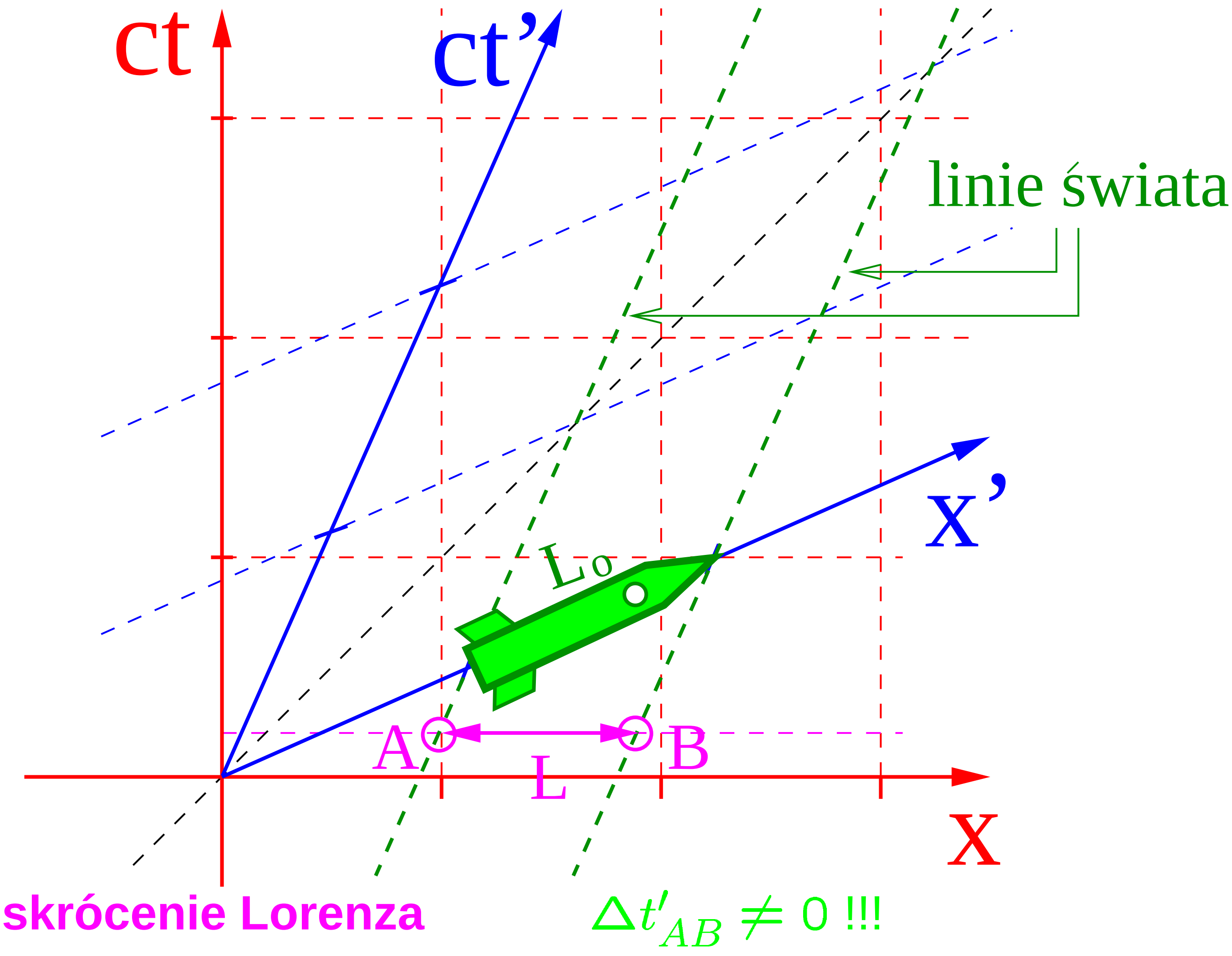
Pomiar długości:
równoczesny pomiar położenia obu końców.

Pomiar AB w układzie O:

$$\Delta x_{AB} = L$$
$$\Delta t_{AB} \equiv 0$$

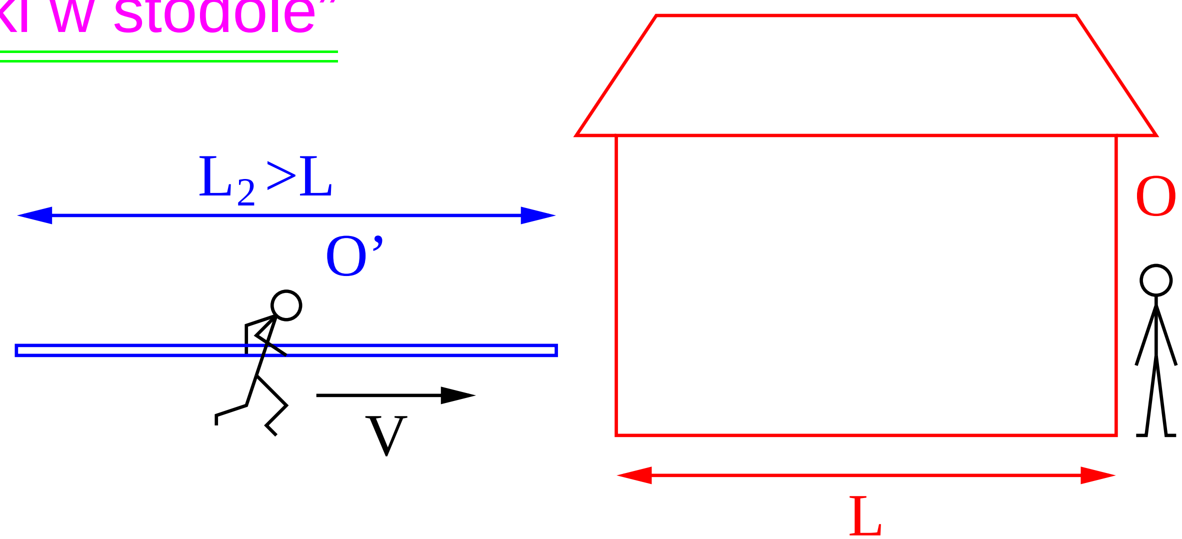
W układzie O':

$$\Delta x'_{AB} \equiv L_0$$
$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{\gamma} L_0$$



Skrócenie Lorenza

Paradoks “tyczki w stodole”



Obserwator O powie, że tyczka się skóciła i zmieściła w stodole. (jeśli $\frac{L_2}{\gamma} < L$)

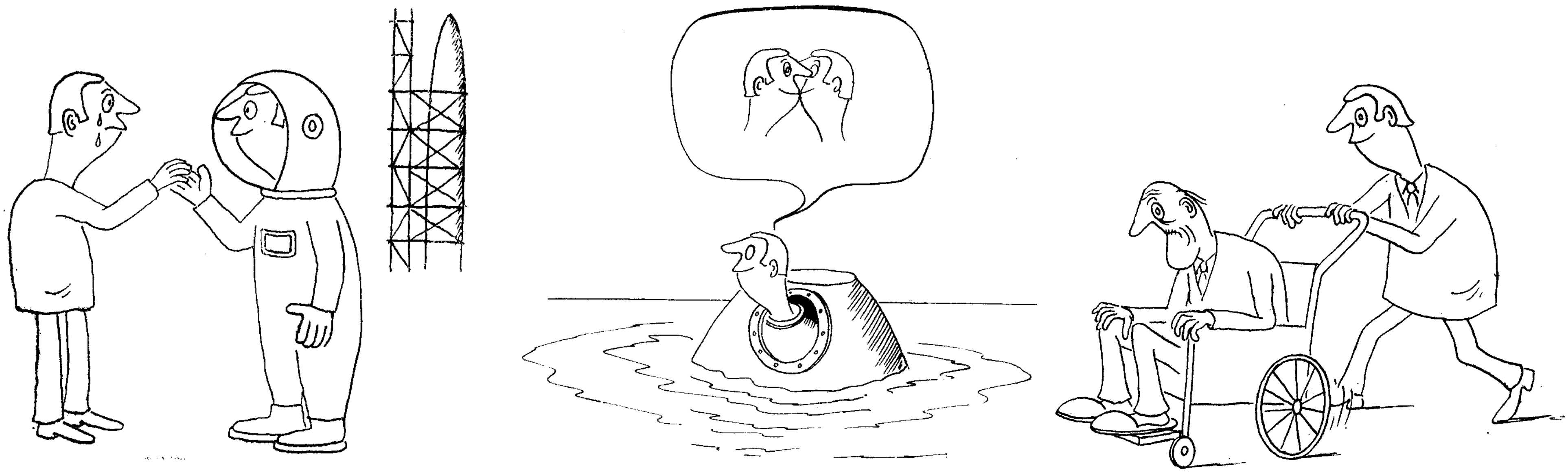
Biegacz O’ stwierdzi, że to stodoła się skróciła. Tyczka nie mogła się w niej zmieścić.

Obaj mają rację !!!

Różni ich zdanie na temat kolejności zdarzeń: minięcia wrót stodoły przez końce tyczki.

Zdarzenia te są rozdzielone przestrzennie ($s < 0$) - kolejność zależy od układu...

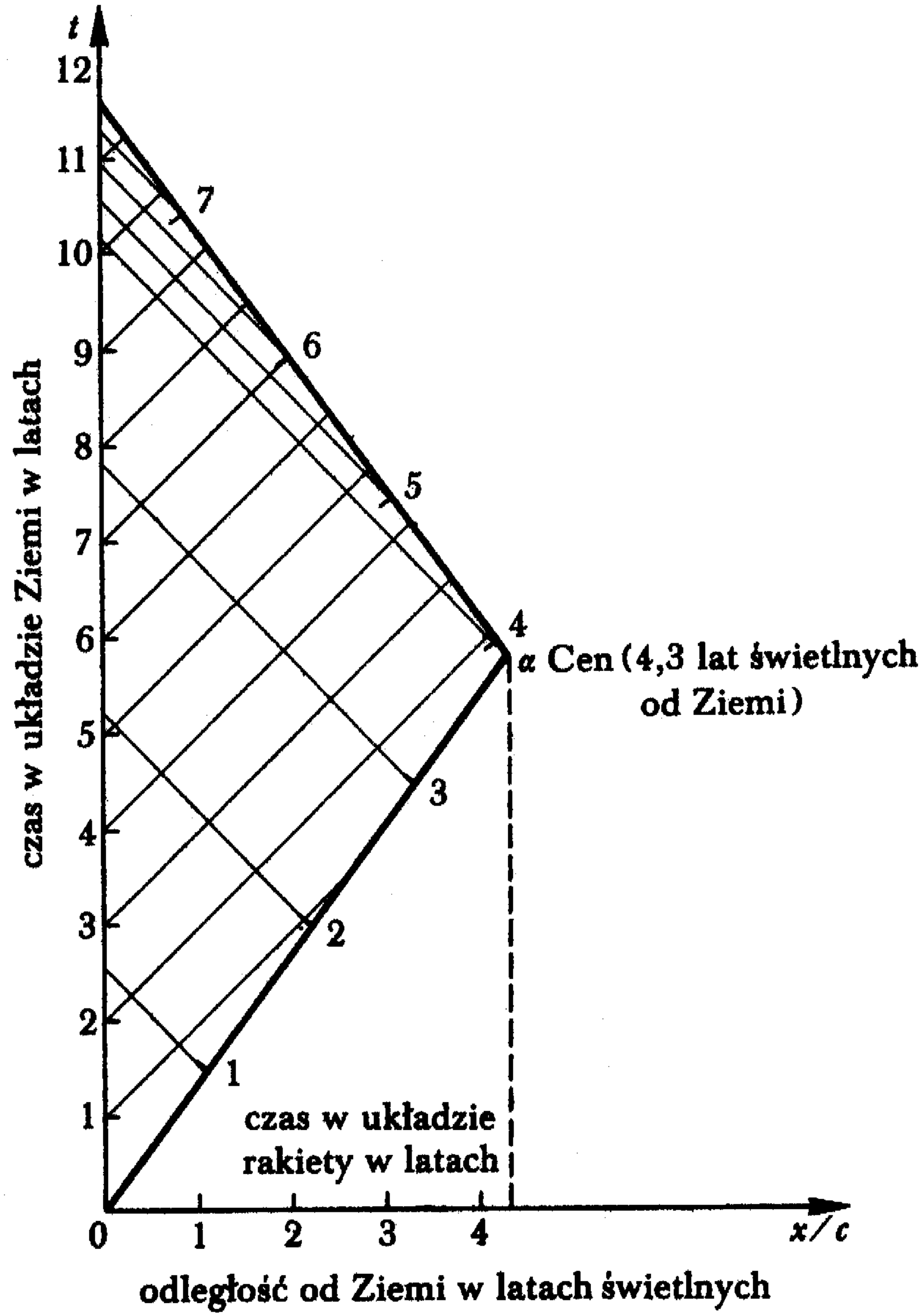
Paradoks bliźniąt



Dwaj obserwatorzy mierząc czas pomiędzy dwoma zdarzeniami (wylot rakiety i jej powrót) otrzymują różne wyniki. $\Rightarrow$ względność czasu (OK)

Dla obu z nich oba zdarzenia zaszły też w tym samym miejscu !

$\Rightarrow$ naruszenie niezmienniczości interwału ?!



Paradoks bliźniąt

Przyjmijmy, że podróż odbywa się z prędkością $v = 0.745\ c$ ($\gamma = 1.5$).

Według obserwatora na Ziemi podróż zajmie $\frac{2\times4.3}{0.745} \approx 11.5$ lat

Dla kosmonauty odległość skróci się do $\frac{4.3}{1.5} \approx 2.9$ lat świetlnych (skrócenie Lorenza)

Podróż będzie jego zdaniem trwała $\frac{2\times2.9}{0.745} \approx 7.7$ lat

⇐ impulsy świetlne wysyłane przez obu braci co rok

Paradoks bliźniąt

Brat który został na Ziemi uzna, że jego bliźniak jest młodszy dzięki dylatacji czasu: $\frac{11.5 \text{ lat}}{1.5} \approx 7.7$ lat.

Ale tego samego spodziewał się jego bliźniak !!!

Dla kosmonauty bieg zegarów na Ziemi ulega spowolnieniu...

W czasie jego lotu do układu α-Centaura na Ziemi mija tylko $\frac{0.5 \times 7.7 \text{ lat}}{1.5} \approx 2.6$ lat !

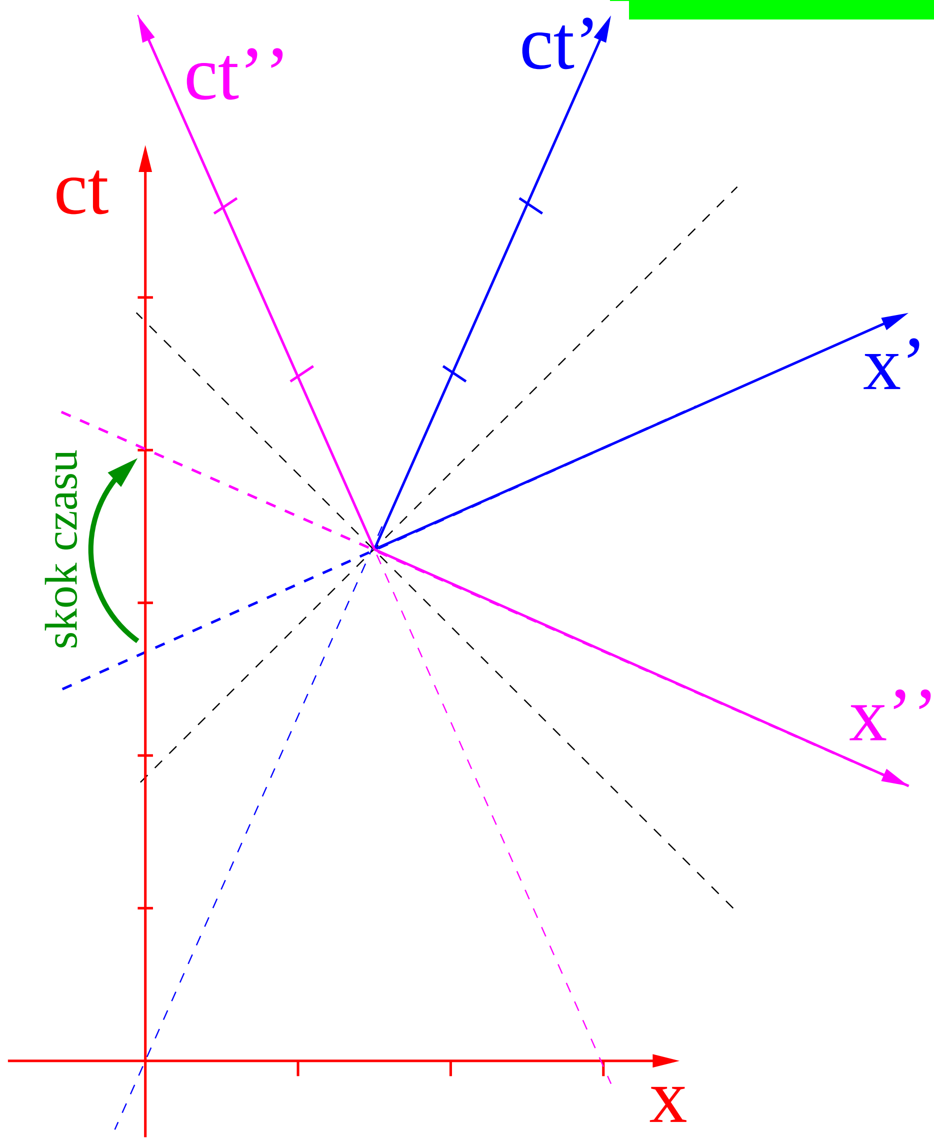
Tyle samo czasu mija na Ziemi w czasie jego podróży powrotnej.

Łącznie powinno minąć $\frac{7.7 \text{ lat}}{1.5} \approx 5.1$ lat.

Dla brata na Ziemi minęło 11.5 lat

Gdzie znika ponad 6 lat !?

Paradoks bliźniąt



Kosmonauta obserwuje wskazania zegara na Ziemi.

Na zegarze tym przybywa **"skokowo"** ponad 6 lat w momencie zmiany przez kosmonautę układu współrzędnych.

Zegar na Ziemi jest zawsze porównywany z najbliższym zegarem układu współporuszającego się, a nie z zegarem kosmonauty.

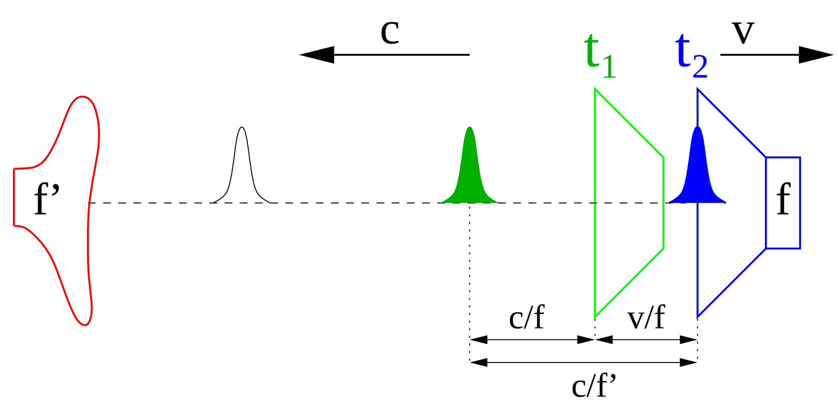
Istotna jest synchronizacja zegarów

Synchronizacja zmienia się przy zmianie układu odniesienia.

Efekt Dopplera

Dwa przypadki “klasyczne”:

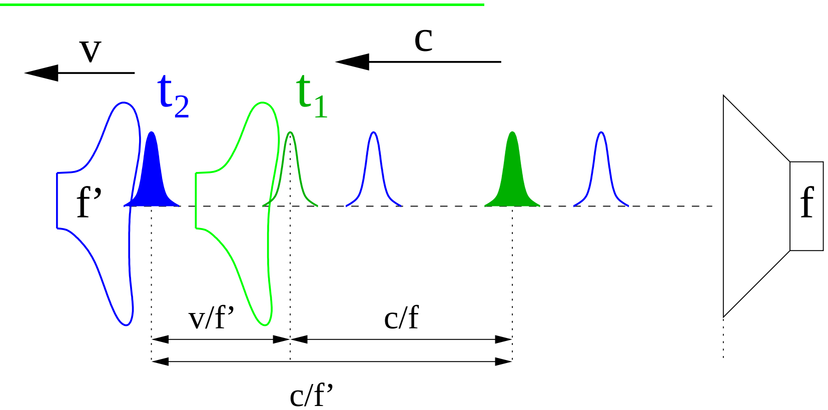
Ruchome źródło



Częstość dźwięku i długość fali mierzona przez obserwatora nieruchomego względem ośrodka:

$$f' = \frac{f}{1+\beta} \qquad \lambda' = \lambda\ (1+\beta)$$

Ruchomy obserwator



Częstość i długość fali mierzona przez ruchomego obserwatora:

$$f' = f\ (1-\beta) \qquad \lambda' = \frac{\lambda}{1-\beta}$$

Ale światło nie potrzebuje “ośrodka”. Powinien się liczyć tylko ruch względny !...

Efekt Dopplera

Jeśli źródło i/lub obserwator poruszają się z dużymi prędkościami

$\Rightarrow$ należy uwzględnić dylatację czasu

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}$$

Ruchome źródło

Poruszające się źródło drga z częstością γ razy mniejszą:

$$f' = \frac{f/\gamma}{1+\beta} = f\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Ruchomy obserwator

Dla poruszającego się obserwatora czas biegnie wolniej, mierzona częstość jest γ razy większa:

$$f' = \gamma f\,(1-\beta) = f\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$\Rightarrow$ Pełna symetria !

Efekt Dopplera

Wysłanie impulsu w układzie O:

$$A \; : \; (T, 0, 0, 0)$$

Dotarcie impulsu światła do obserwatora O': $(c = 1)$

$$B \; : \; (T + \Delta T, \Delta T, 0, 0)$$

Współrzędne dotarcia impulsu według obserwatora O':

$$0 = X' = \gamma \Delta T - \beta\gamma(T + \Delta T)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta T = \frac{\beta}{1-\beta}\, T$$

$$T' = \gamma(T + \Delta T) - \beta\gamma\Delta T$$

$$\Rightarrow \quad T' = \gamma(1+\beta)\, T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, T$$