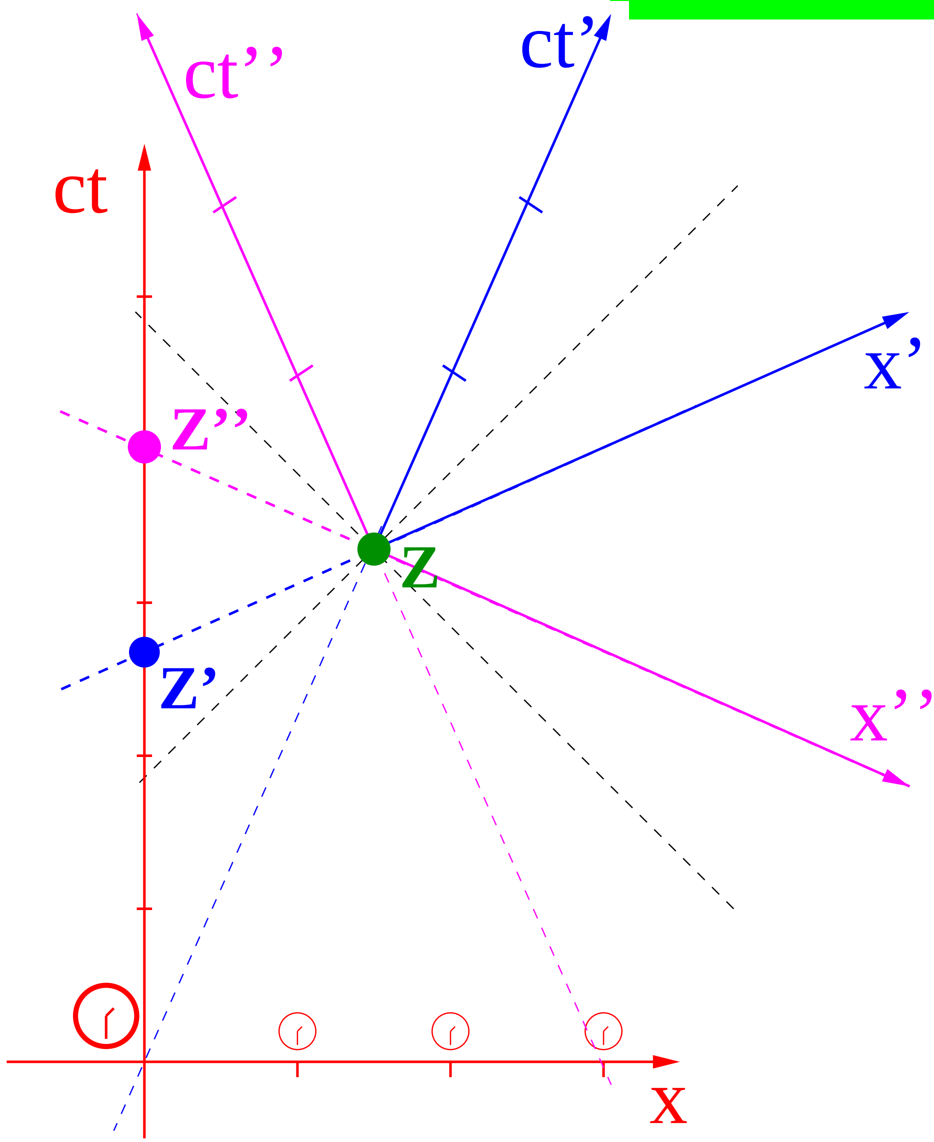
Prawa ruchu: dynamika

Wstęp do Fizyki I (B+C)

Wykład VII:

- Transformacja Lorenza, uzupełnienie
- I zasada dynamiki, układ inercjalny
- II zasada dynamiki
- Równania ruchu
- Więzy

Paradoks bliźniąt



Kosmonauta obserwuje wskazania zegara na Ziemi porównując go zawsze z najbliższym zegarem jego układu.

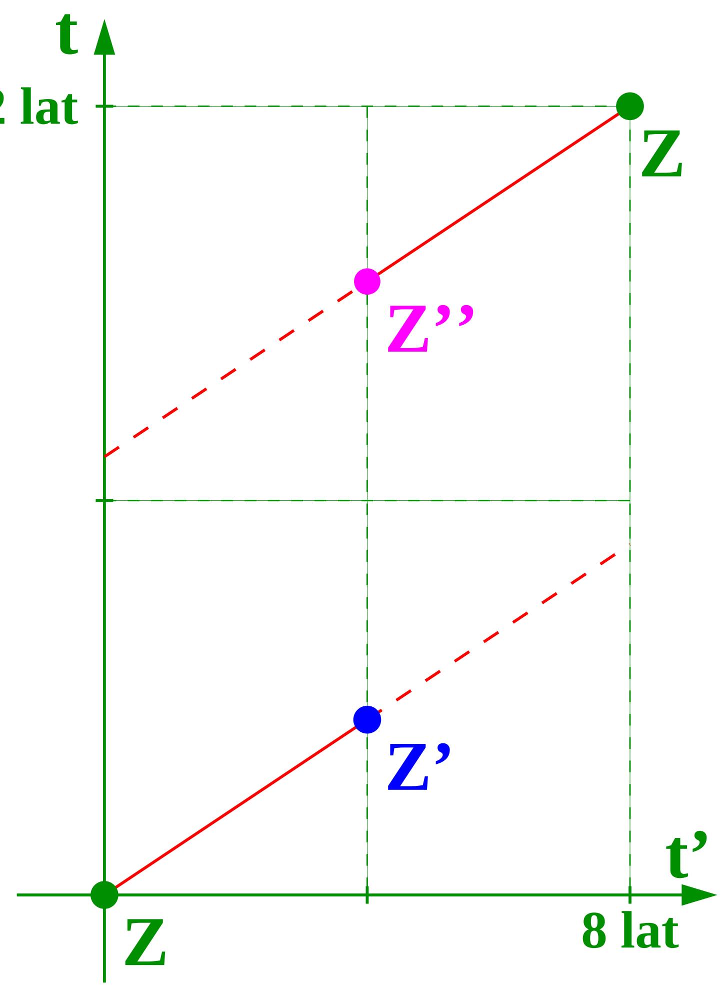
W chwili startu ($t = t' = 0$) jest to jego własny zegar **Z**.

Gdy dotrze do celu są to zegary **Z'** (przed) i **Z''** (po zawróceniu).

Także obserwator na Ziemi może obserwować wskazania zegarów kosmonauty (**Z**, **Z'** i **Z''**) porównując je ze swoją siatką zegarów.

Paradoks bliźniąt

Czas na Ziemi według kosmonauty



Rakieta

Dolatując do celu, po $t' \sim 4$ latach (według swojego zegara **Z**), kosmonauta stwierdza, że na Ziemi minęło $t < 3$ lata.

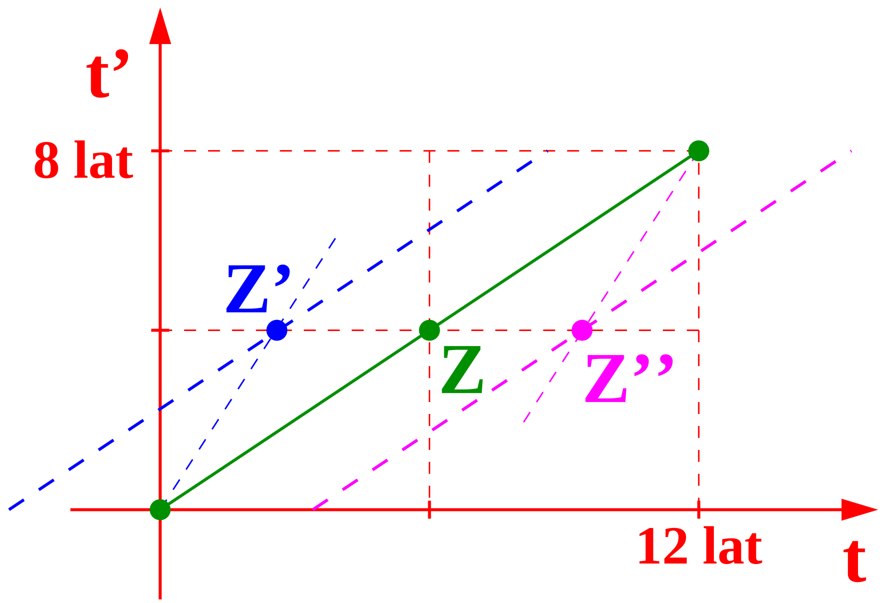
Kosmonauta opiera się na wskazaniach zegara **Z'** zsynchronizowanego z **Z**.

Po zawróceniu informacja o wskazaniach zegara na Ziemi pochodzi od zegara **Z"**, też zsynchronizowanego z **Z** ale w nowym układzie odniesienia.

Według zegara **Z"** w chwili zawracania zegar na Ziemi wskazywał $t > 9$ lat.

Paradoks bliźniąt

Wskazania zegarów kosmonauty rejestrowane przez obserwatora na Ziemi



Ziemia

Według obserwatora na Ziemi bieg zegara **Z** kosmonauty jest spowolniony na skutek dylatacji czasu.

Kosmonauta źle ocenił bieg czasu na Ziemi gdyż:

- najpierw użył zegara **Z'** który spieszył się względem **Z**
- potem użył zegara **Z"** który spóźniał się względem **Z**

Według obserwatora nia Ziemi, zawrócenie rakiety **Z**, oraz zdarzenia porównania czasu na Ziemi z przelatującymi zegarami **Z'** i **Z"** nie były równoczesne.

W chwili zawracania zegar **Z'** dawno minął Ziemię, a zegar **Z"** jeszcze do niej nie doleciał.

Efekt Dopplera

W warunkach ziemskich efekt Dopplera dla światła jest istotny tylko w wyjątkowych przypadkach.

Przesunięcie ku czerwieni w widmach odległych galaktyk zaobserwował po raz pierwszy Hubble w 1929 r.

Zauważył on, że prędkość 'ucieczki' rośnie z odległością (prawo Hubbla):

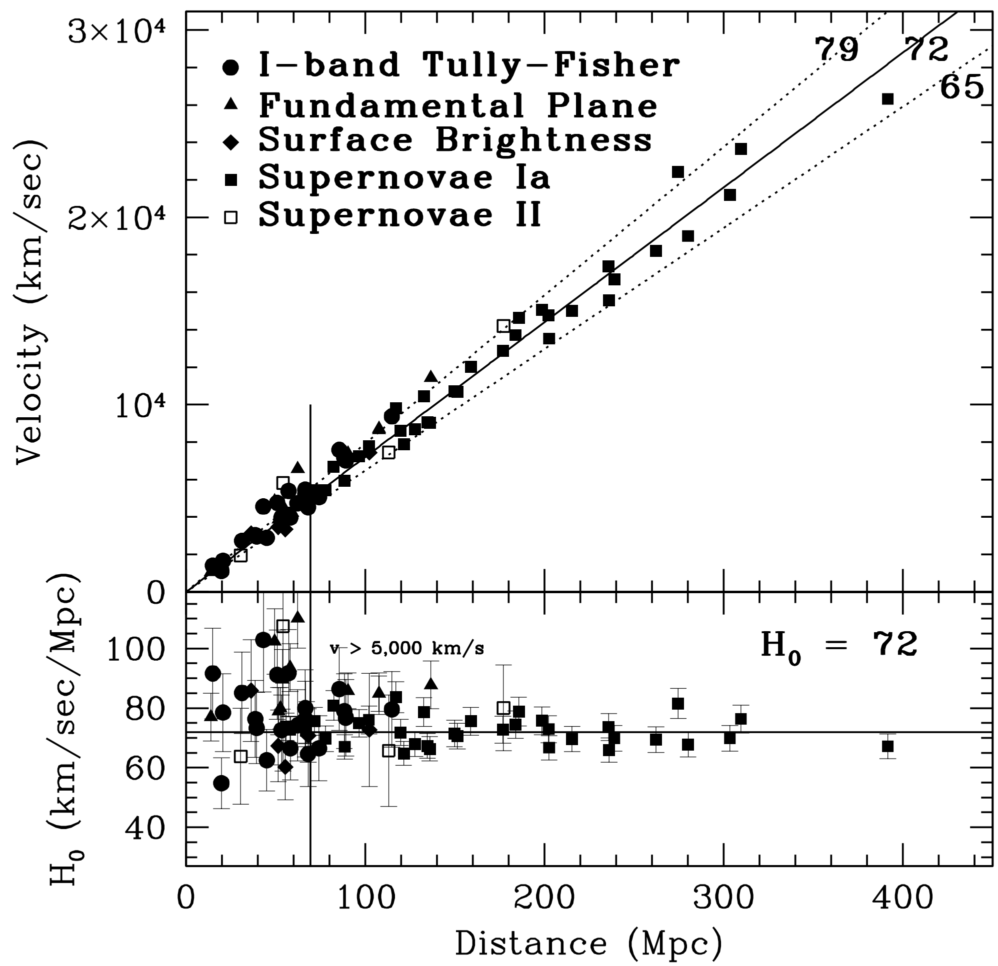
$$v = H\, r$$

r - odległość od Ziemi, H - stała Hubbla

$\Rightarrow$ wiek Wszechświata:

$$T = 13.7 \pm 1.3 \;\; GYr$$

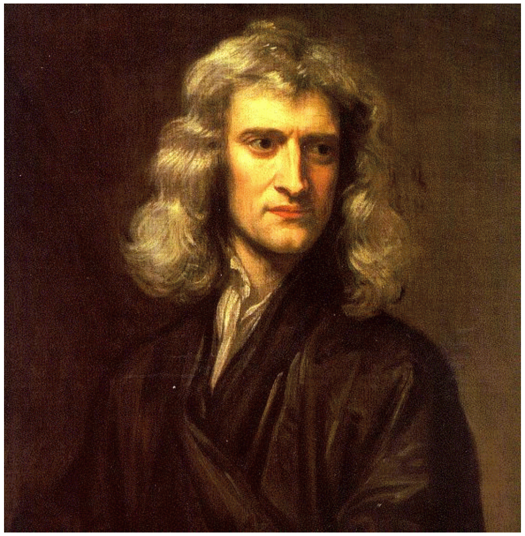
Obecne pomiary



$$H = 67 \pm 9 \;\; km/(s \cdot MPc)$$

I zasada dynamiki

Isaac Newton



Zasada bezwładności

Zawarta w dziele:

"Zasady matematyczne filozofii naturalnej" (1687)

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

"Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszaj ciała do zmiany tego stanu."

Newton zakładał jednak istnienie "przestrzeni absolutnej", która "pozostaje zawsza taka sama i nieruchoma" $\Rightarrow$ "absolutnego" układu odniesienia

Dziś wiemy, że taki układ nie istnieje.

Względem jakiego układu spełniona jest I zasada dynamiki ?

I zasada dynamiki

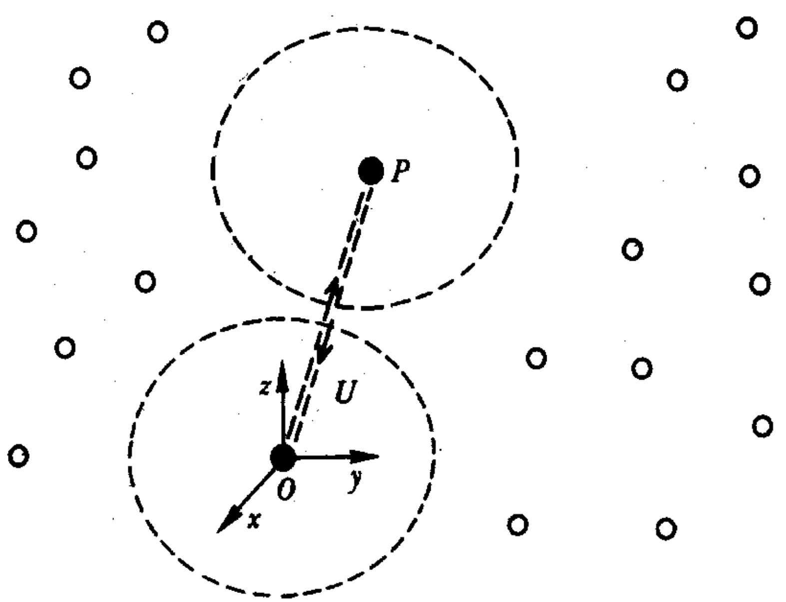
Ciało izolowane

Aby na ciało nie działały żadne siły musi być odizolowane od wpływu innych ciał.

Bardzo trudno o “doskonałą” izolację.

Wszystkie znane nam siły maleją z odległością

⇒ ciało uznamy za izolowane jeśli będzie dostatecznie daleko od innych ciał.



Aby zweryfikować zasadę bezwładności musimy mieć **dwa** ciała izolowane:
ciało obserwowane i układ odniesienia.

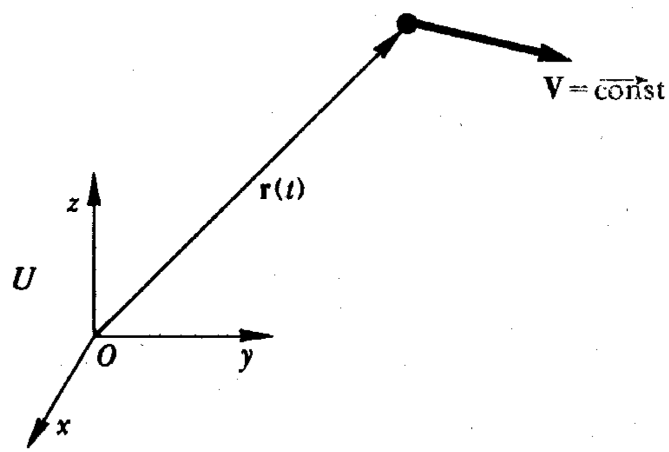
Ale każda obserwacja jest związana z jakimś **oddziaływaniem** !...

Nigdy nie spełnimy idealnych warunków...

I zasada dynamiki

Układ inercjalny

Układ w którym obowiązuje I zasada dynamiki nazywamy **układem inercjalnym**.



Jeśli istnieje jeden układ inercjalny to istnieje nieskończenie wiele układów inercjalnych.

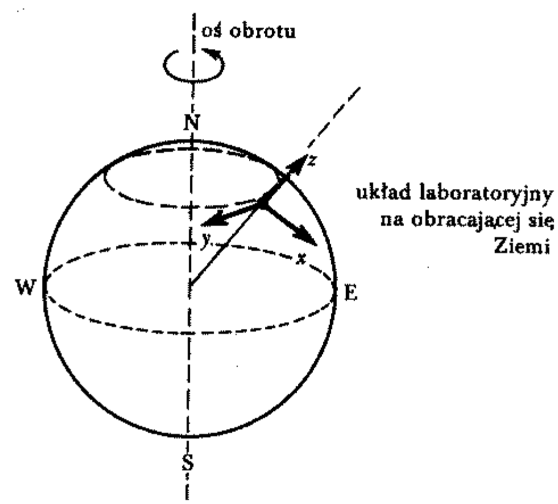
każdy inny układ poruszający się względem niego z prędkością $\vec{V} = const$

Zasada bezwładności jest równoważna z postulatem:

Istnieje układ inercjalny

I zasada dynamiki

Układ inercjalny



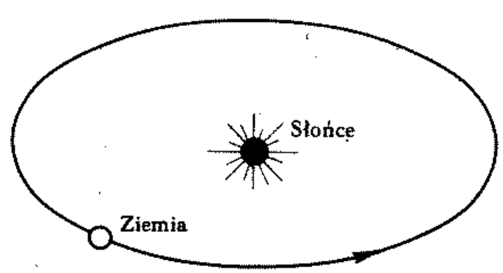
Jaki układ możemy uznać za inercjalny ?

Wszystko zależy od zagadnienia i dokładności pomiaru

Rotacja Ziemi: $a_Z \approx 0.03\ \frac{m}{s^2}$

Obieg wokół słońca: $a_S \approx 0.006\ \frac{m}{s^2}$

Rotacja Galaktyki: $a_G \approx 0.000\ 000\ 000\ 3\ \frac{m}{s^2}$



Na ogół wystarcza układ laboratoryjny
(zwiazany z Ziemią)

II zasada dynamiki

II prawo Newtona

"Zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i odbywa się w kierunku prostej, wzdłuż której siła jest przyłożona"

Zmiana ruchu ciała (w układzie inercjalnym) jest zawsze wynikiem oddziaływania otoczenia (innych ciał).

Oddziaływanie to opisujemy ilościowo wprowadzając pojęcie **siły**

Siła jest wielkością wektorową (kierunek zmiany ruchu)

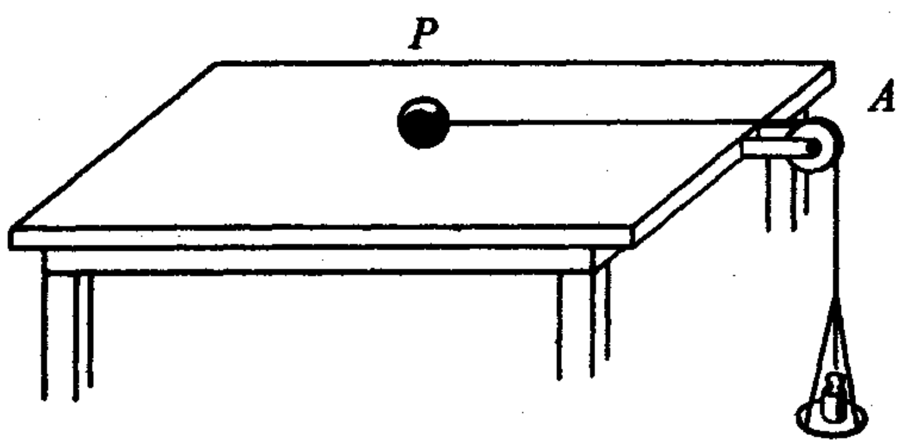
Siły możemy porównywać ilościowo niezależnie od ruchu ciał
naogół wykorzystujemy przy tym I zasadę dynamiki (równowaga sił)
np. porównywanie ciężaru poprzez ważenie ciał, pomiar siły dynamometrem...

II zasada dynamiki

Ruch pod wpływem stałej siły

Pokaz

$\downarrow t_0 = 0$ $\downarrow t_1$



$\leftarrow$ L $\rightarrow$

Przyjmijmy: $\vec{r}(0) = \vec{v}(0) = 0$

$\Rightarrow$ run prostoliniowy jednostajnie przyspieszony

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = const$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{a}{2}t^2$$

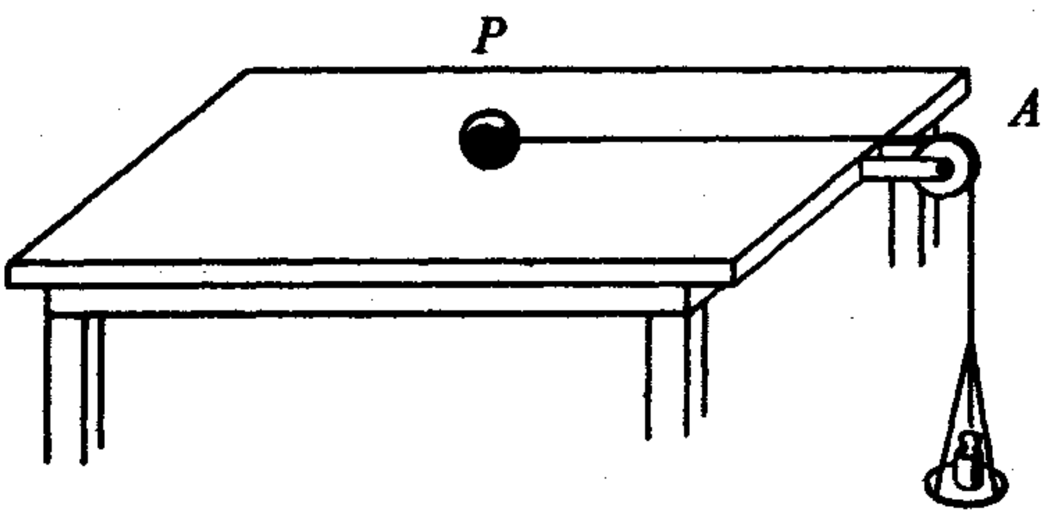
$$\Rightarrow \quad a = \frac{2L}{t_1^2}$$

$$a \sim (t_1)^{-2}$$

II zasada dynamiki

Masa bezwładna

"akcelerator"



Ustalona siła $\vec{F}$ działając na różne ciała **P** nadaje im różne przyspieszenia $\vec{a}$

Możemy wprowadzić współczynniki **m**, które określają stosunki przyspieszeń różnych ciał

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots \;=\; \frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} : \frac{1}{m_3} : \ldots$$

Lub też:

$$m_1\, a_1 \;=\; m_2\, a_2 \;=\; m_3\, a_3 \;=\; \ldots$$

Stosunki przyspieszeń zależą od badanych ciał ale nie zależą od przyłożonej siły

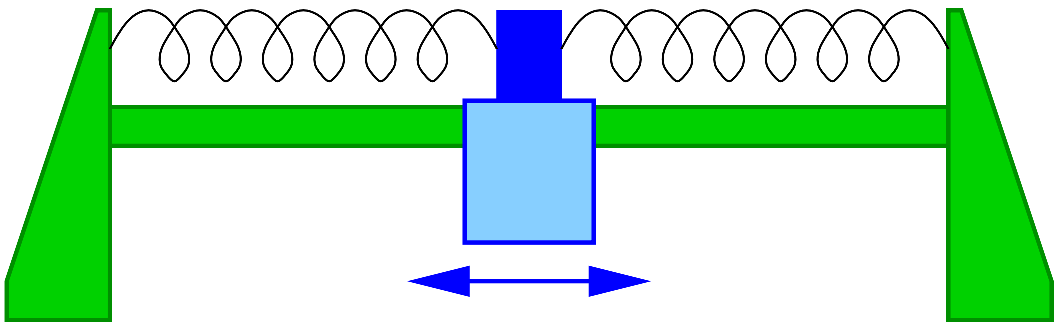
Możemy wybrać jakieś ciało i uznać je za "jednostkowe"

m - masa bezwładna

II zasada dynamiki

Ruch harmoniczny

Pokaz



Siła z jaką działa sprężyna zależy wyłącznie od położenia wózka

$$\boxed{F_x = -k \cdot x}$$

Położeniem równowagi jest $x = 0$

Przyjmijmy, że $x(0) = R$ i $v_x(0) = 0$

run harmoniczny:

$$x(t) = R \cdot \cos(\omega t)$$

$$a(t) = -\omega^2 \cdot x(t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow \quad a \sim T^{-2}$$

II zasada dynamiki

Siła

Jednostką masy bezwładnej jest 1 kilogram

Druga zasada dynamiki Newtona:

$$\boxed{\vec{F} = m\,\vec{a}}$$

klasyczna definicja siły

Jednostka siły: 1 niuton $1\ N = 1\ kg \cdot \frac{m}{s^2}$

Druga zasada dynamiki jest:

- wnioskiem z doświadczeń
- definicją nowych wielkości

Zasada niezależności działania sił:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_1 = m\vec{a}_1 \\ \vec{F}_2 = m\vec{a}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)$$

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

jeżeli siły F_1 i F_2 działają niezależnie

Zasada addytywności masy:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{F}_2 = m_2\vec{a}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

II zasada dynamiki

Uogólnienie

Druga zasada dynamiki Newtona w postaci "klasycznej"

$$\boxed{\vec{F} = m\,\vec{a}}$$

ważna jest tylko dla ciał których masa jest stała $m = const$

Możemy jednak uogólnić:

$$\vec{F} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} \overset{m=const}{=} \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

gdzie $\vec{p} = m\vec{v}$ - pęd cząstki

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Jest słuszne także dla ciał o zmieniającej się masie (np. rakieta)

oraz w przypadku relatywistycznym (choć zmieni się definicja pędu).

$$\Delta\vec{p} = \int_{\Delta t} \vec{F}\,dt = I \quad \text{- popęd siły}$$

Równania ruchu

Podstawowym zagadnieniem dynamiki jest rozwiązywanie równań ruchu, czyli określanie ruchu ciała ze znajomości działających na nie sił.

Postać ogólna

Siła działająca na ciało może zależeć od położenia i prędkości cząstki oraz czasu

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

⇒ równanie ruchu:

$$\boxed{m \, \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)}$$

Układ trzech równań różniczkowych drugiego rzędu $m(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}) = (F_x, F_y, F_z)$

Ogólne rozwiązanie ma sześć stałych całkowania:

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t, C_1, C_2, \ldots, C_6)$$

Równania ruchu

Warunki początkowe

Aby ściśle określić ruch ciała musimy poza rozwiązaniem równań ruchu wyznaczyć wartości wolnych parametrów (w ogólnym przypadku sześciu)

Najczęściej dokonujemy tego określając warunki początkowe:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}\,(t_0)$$
$$\vec{v}_0 = \vec{v}\,(t_0)$$

t_0 - wybrana "chwila początkowa"

W mechanice klasycznej obowiązuje "zasada przyczynowości"

Jeśli znamy równania ruchu oraz dokładnie poznamy warunki początkowe możemy jednoznacznie określić stan układu w przeszłości i w przyszłości.

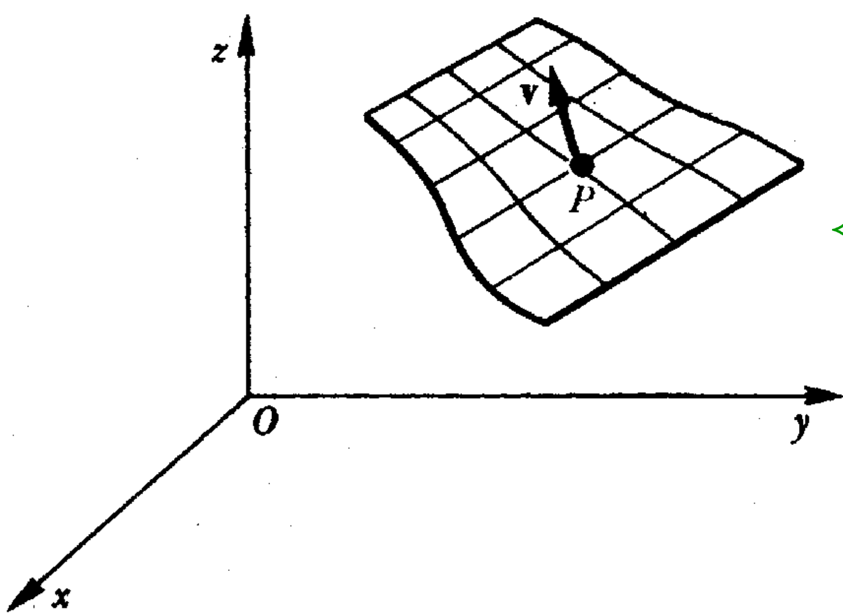
Zachowanie obiektów mikroświata (np. cząstek elementarnych) nie jest deterministyczne.
Granice stosowalności mechaniki klasycznej określa wartość stałej Plancka $h = 6.626 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$

Równania ruchu

Do tej pory rozważaliśmy ruch ciała, które może się przemieszczać bez ograniczeń w całej trójwymiarowej przestrzeni - trzy stopnie swobody: f=3.

W każdej chwili stan ciała opisuje sześć parametrów (dwa wektory: $\vec{r}$ i $\vec{v}$)

Więzy



W wielu przypadkach ruch ciała jest jednak ograniczony $\Rightarrow$ cząstka nieswobodna

$\Leftarrow$ powierzchnia więzów

Ogólny warunek opisujący powierzchnie:

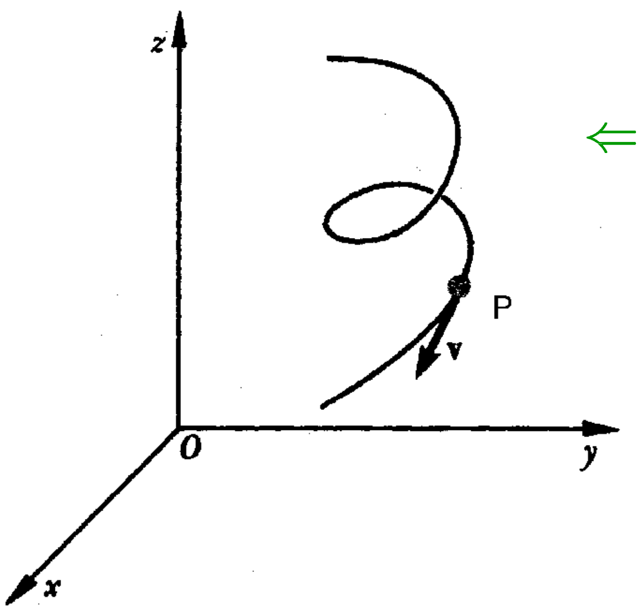
$$h(x, y, z, t) = 0$$

$\Rightarrow$ dwa stopnie swobody f=2

cztery parametry początkowe

Równania ruchu

Więzy



$\Leftarrow$ krzywa więzów

Krzywą w przestrzeni możemy opisać porzez dwa warunki:

$$h_1(x, y, z, t) = 0$$
$$h_2(x, y, z, t) = 0$$

$\Rightarrow$ jeden stopień swobody f=1, dwa parametry początkowe

Do równania ruchu musimy wprowadzić dodatkową siłę reakcji więzów

$$\boxed{m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R}$$

Siła reakcji jest zawsze prostopadła do powierzchni lub krzywej więzów (więzy idealne)