

Prawa ruchu: dynamika

Wstęp do Fizyki I (B+C)

Wykład IX:

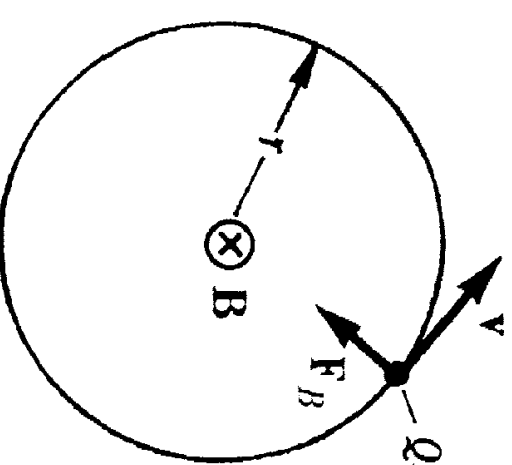
- Dynamika ruchu po okręgu
 - ⇒ siła dośrodkowa
- Prawa ruchu w układzie nieinercyjnym
 - ⇒ siły bezwładności
- Prawa ruchu w układzie obracającym się
 - ⇒ siła odśrodkowa
 - ⇒ siła Coriolissa

Ruch po okręgu

Zasada bezwładności

“Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszają ciała do zmiany tego stanu.” **I. Newton**

⇒ aby ciało pozostawało w ruchu po okręgu konieczne jest działanie siły ⇒ **siła dośrodkowa**



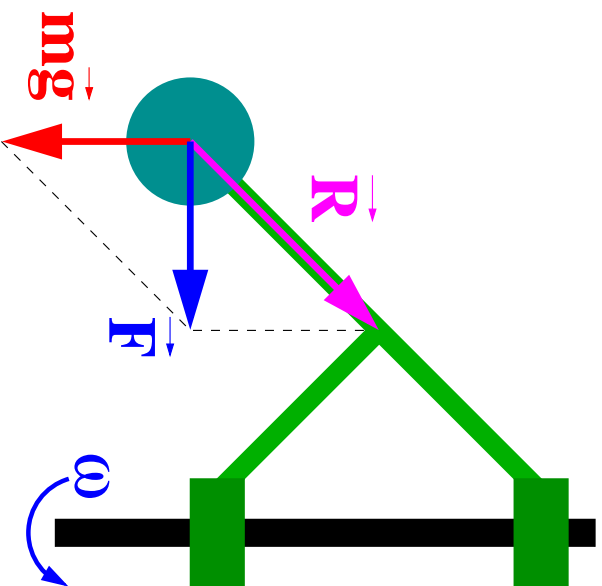
Ruch po okręgu może być wynikiem działania różnego rodzaju sił:

- siły zewnętrzne
 - ⇒ siła Lorentza (pole magnetyczne)
 - ⇒ siły sprężystości
- siły reakcji więzów (kulka na nitce)
- wypadkowej sił reakcji i sił zewnętrznych (regulator Watta, kulka w wirującym naczyniu...)

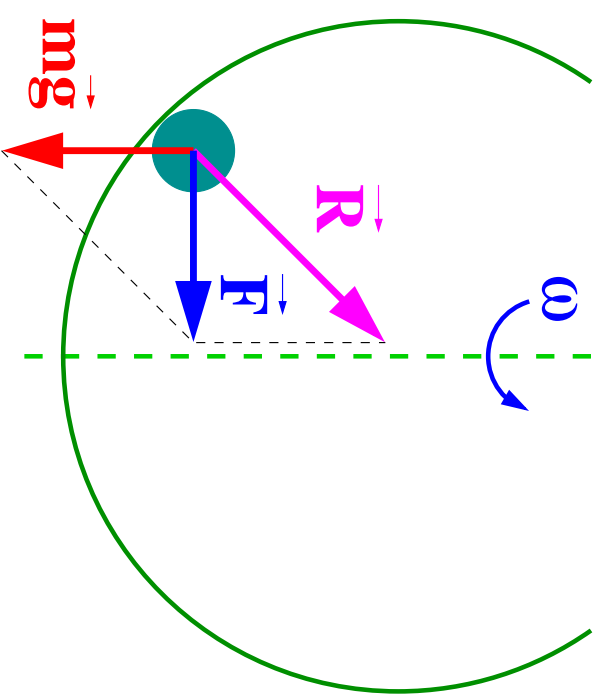
Ruch po okręgu

Siła dośrodkowa

Regulator Watt



Kulka w wirującym naczyniu



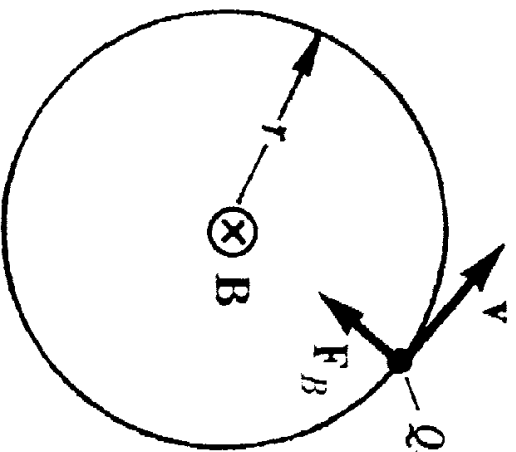
Siła dośrodkowa jest wypadkową siły reakcji i siły ciężkości:

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R}$$

Ruch po okręgu

Siła dośrodkowa

Cząstka naładowana w polu magnetycznym



Siła Lorentza:

$$\vec{F}_B = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Dla $\vec{v} \perp \vec{B}$:

$$F_B = Q v B$$

\Rightarrow

$$F_B = \frac{Q B}{m v} m v^2 = \frac{1}{r} m v^2$$

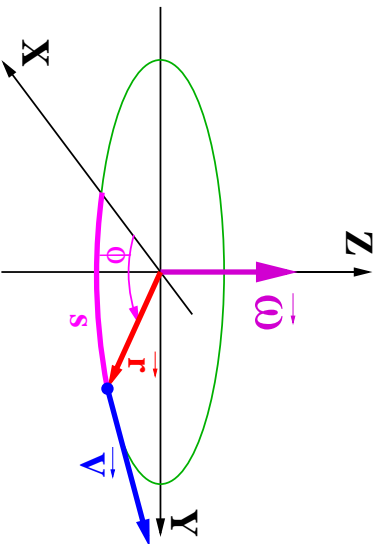
Promień cyklotronowy:

$$r = \frac{m v}{Q B} = \frac{p}{Q B}$$

$$F_B = \frac{m v^2}{r} = m \omega^2 r$$

Ruch po okręgu

Przyspieszenie dośrodkowe



$$x = r \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$y = r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$z \equiv 0$$

$$\Rightarrow a_x = -\omega^2 r \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

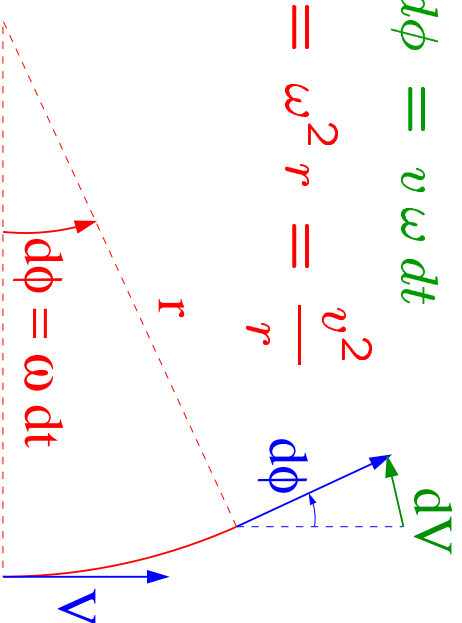
$$a_y = -\omega^2 r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$dv = v \cdot d\phi = v \omega dt$$

$$a = v \omega = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$



W zapisie wektorowym: $\vec{\omega} = const$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

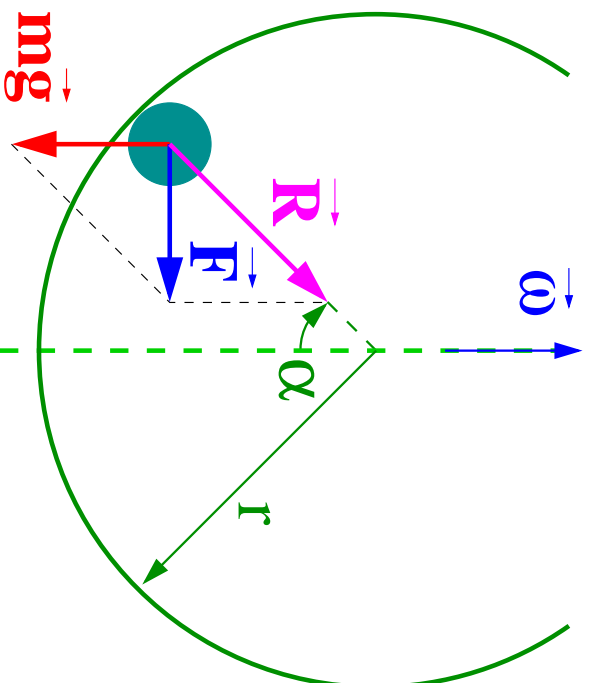
$$= \vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= -\omega^2 \cdot \vec{r}_{\perp} \quad \vec{r}_{\perp} = (x, y, 0)$$

Ruch po okręgu

Siła dośrodkowa

Kulka w wirującym naczyniu



$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R}$$

Siła dośrodkowa skierowana poziomo ze składania sił:

$$\Rightarrow R \cdot \cos \alpha - mg = 0$$

$$F = R \cdot \sin \alpha = mg \cdot \tan \alpha$$

Z równania ruchu:

$$F = m \omega^2 r_{\perp} = m \omega^2 r \cdot \sin \alpha$$

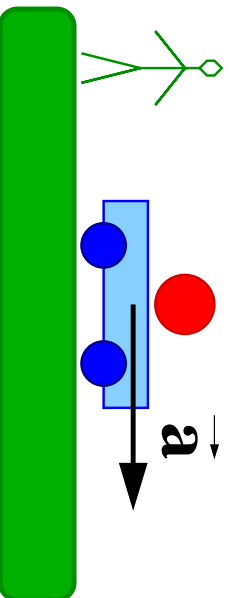
$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 r}$$

Kulka odchyli się dopiero dla $\omega > \sqrt{\frac{g}{r}} = \omega_0$
 ω_0 - częstość drgań wahadła matematycznego o długości r

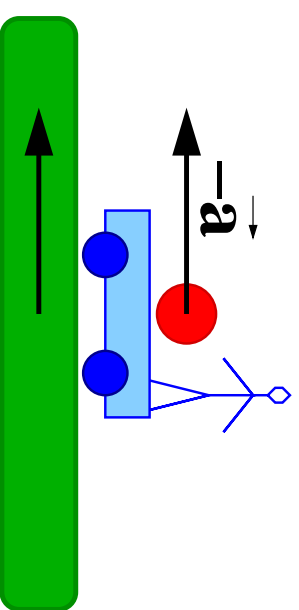
Układy nieinercjalne

Opis ruchu

Wózek porusza się z przyspieszeniem \vec{a} względem stołu



Z punktu widzenia obserwatora związanego ze stołem kulka pozostaje w spoczynku.



Z punktu widzenia obserwatora związanego z wózkiem kulka porusza się z przyspieszeniem $-\vec{a}$

Wynika to z **zasady bezwładności** -

siły działające na kulkę **równoważą się**

$$\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$$

\Rightarrow **prawa Newtona nie są spełnione !?**

Oba układy nie mogą być inercjalne.

Prawa ruchu w układzie nieinercjalnym wymagają modyfikacji

Układy nieinercjalne

Prawa ruchu

Przyjmijmy, że układ O' porusza się z przyspieszeniem \vec{a}_0 względem układu inercjalnego O .

Osie obu układów pozostają cały czas równoległe (brak obrotów)

Przyspieszenie punktu materialnego mierzone w układach O i O' :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$$

Prawa ruchu w układzie inercjalnym O :

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R$$

\Rightarrow w układzie nieinercjalnym O' :

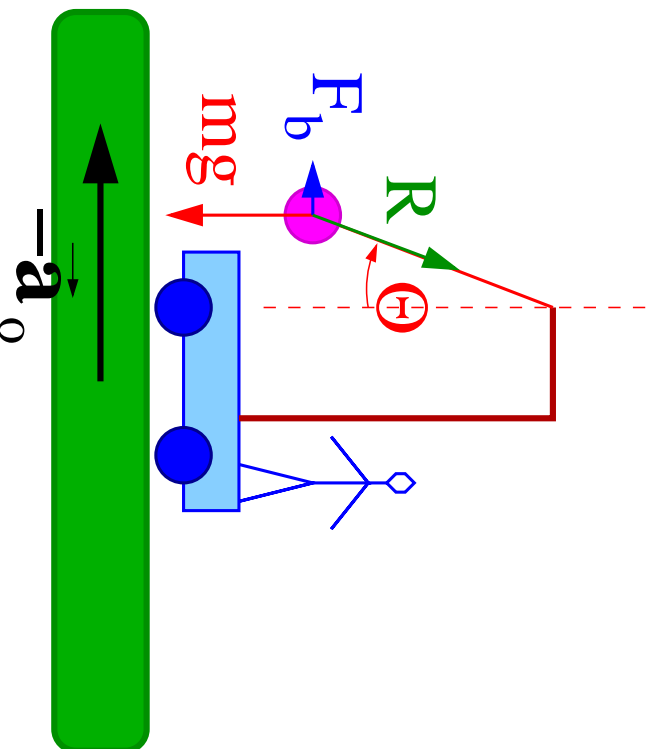
$$m\vec{a}' = \vec{F}(\vec{r}', \vec{v}', t) + \vec{F}_R - m\vec{a}_0$$

\Rightarrow w układzie nieinercjalnym musimy wprowadzić siłę bezwładności $\vec{F}_b = -m\vec{a}_0$

Układy nieinercjalne

Prawa ruchu

Wahadło w układzie nieinercyjnym poruszającym się z przyspieszeniem \vec{a} względem układu inercyjnego



Oprócz siły ciężkości $m\vec{g}$ i reakcji \vec{R} musimy uwzględnić pozorną siłę bezwładności $\vec{F}_b = -m\vec{a}_0$

Opis ruchu można uprościć wprowadzając **efektywne** przyspieszenie ziemskie:

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_0$$

siły bezwładności \equiv siły grawitacji

\Rightarrow odchylenie położenia równowagi:

$$\tan \theta = \frac{a_0}{g}$$

Przyspieszenie drgań:

$$\omega'^2 = \frac{g'}{l} = \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l}$$

Układ obracający się

Niech układ O' obraca się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ względem układu inercyjnego O .

Dla uproszenia przyjmijmy, że początki obu układów pokrywają się.

Rozważmy ruch punktu materialnego spoczywającego w układzie O' :

Z punktu widzenia obserwatora O ciało porusza się po okręgu i musi na nie działać siła dośrodkowa:

$$\vec{F} = -m \omega^2 \vec{r}_\perp$$

W układzie O' , aby opisać równowagę sił (ciało pozostaje w spoczynku) musimy wprowadzić siłę bezwładności:

$$\vec{F}_b = +m \omega^2 \vec{r}_\perp$$

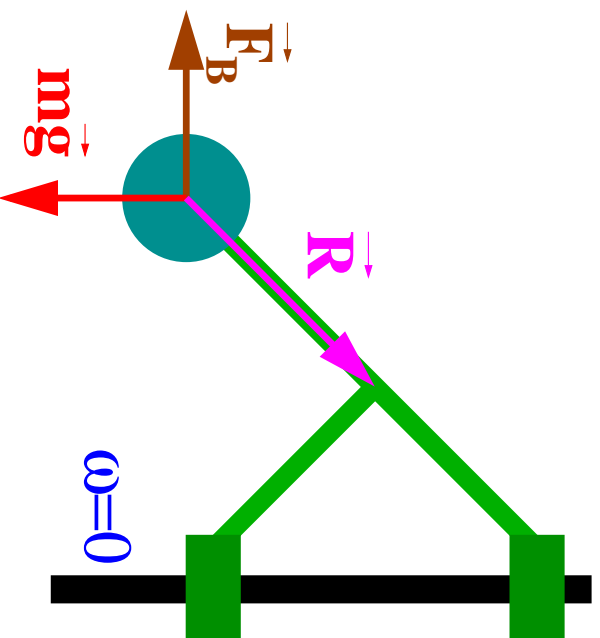
⇒ siła odśrodkowa

Siły bezwładności są siłami pozornymi, wynikającymi z nieinercyjnego charakteru układu odniesienia

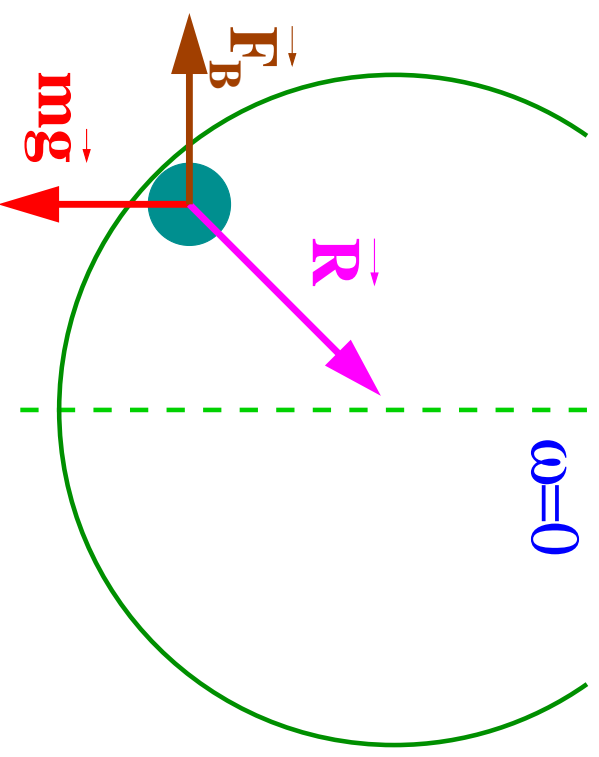
Układ obracający się

Siła odśrodkowa

Regulator Watta



Kulka w wirującym naczyniu



Równowaga sił w układzie obracającym się:

$$m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_b = m\vec{a}' = 0$$

Układ obracający się

Układ O' obraca się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ względem układu inercyjnego O .

Rozważmy teraz ruch punktu materialnego spoczywającego w układzie O' :

Z punktu widzenia obserwatora O' ciało porusza się po okręgu i musi na nie działać siła dośrodkowa:

$$\vec{F} = -m \omega^2 \vec{r}_\perp$$

W układzie O' działa tymczasem pozorna siła odśrodkowa

$$\vec{F}_b = +m \omega^2 \vec{r}_\perp$$

\Rightarrow musimy wprowadzić kolejną siłę ?!

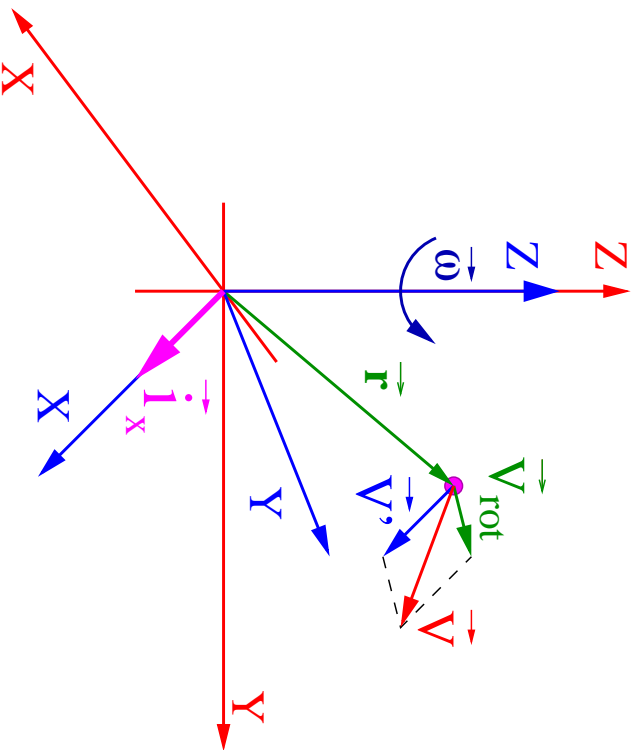
Aby “uratować” równania ruchu potrzebujemy

$$\vec{F}_c = -2 m \omega^2 \vec{r}_\perp$$

\Rightarrow czy to w ogóle ma sens ?...

Układ obracający się

Układ O' obraca się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ względem układu inercjalnego O .



Dodawanie prędkości:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{rot} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Przyspieszenie:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Pochodna dla wektora \vec{o} z układu O' : $(\vec{r}' \dot{\vec{r}}')$

$$\frac{d\vec{o}'}{dt} = \frac{d\vec{o}'}{dt'} + \vec{\omega} \times \vec{o}'$$

pochodna w O' + obrót osi O'

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \text{przysp. w } O' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \text{przysp. dośrodkowe} + 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}' + \text{przysp. Coriolisa}$$

Układ obracający się

Równanie ruchu

W układzie inercyjnym O:

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R$$

⇒ w układzie nieinercyjnym O':

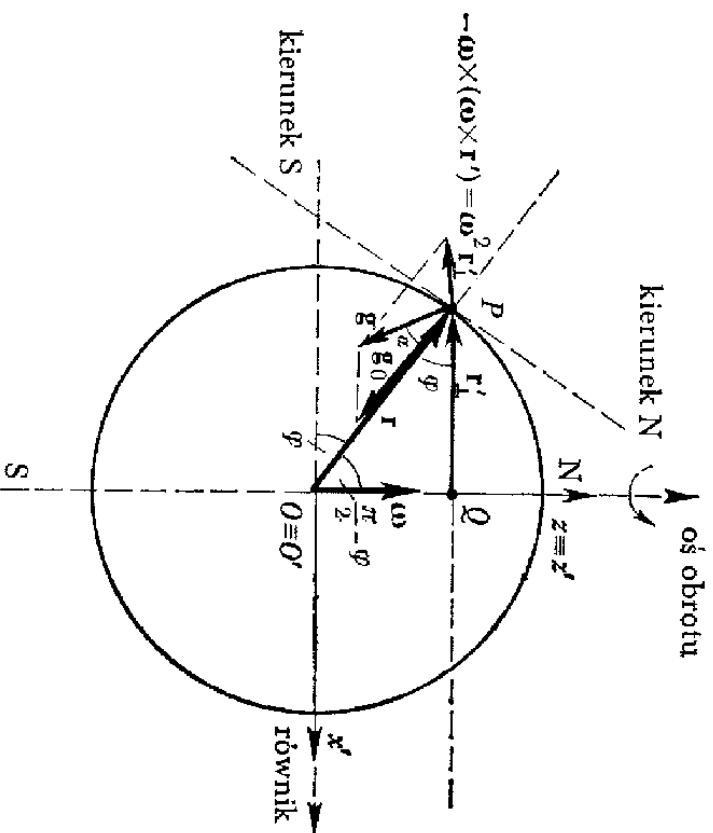
$$m\vec{a}' = \vec{F}(\vec{r}', \vec{v}', t) + \vec{F}_R - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2 \cdot m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

W układzie obracającym się wprowadzamy dwie pozorne siły bezwładności:

- siłę odśrodkową $\vec{F}_O = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = +\omega^2 r'_{\perp}$
- siłę Coriolisa $\vec{F}_C = -2 \cdot m\vec{\omega} \times \vec{v}'$

Układ obracający się

Ruch obrotowy Ziemi



$$\omega \approx \frac{2\pi}{23^h 56^m 04^s} \approx 7.3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s}$$

Ciała nieruchome względem powierzchni Ziemi.
Zmiana efektywnego przyspieszenia ziemskiego związana z ruchem obrotowym Ziemi:

$$\Delta g = -\omega^2 r_{\perp} \cos \phi = -\omega^2 r_Z \cos^2 \phi$$

$$\approx -0.033 \frac{m}{s^2} \cdot \cos^2 \phi \quad \phi - \text{szerokość geo.}$$

Wyniki pomiarów:

biegun N	$g = 9.83216 \frac{m}{s^2}$
Warszawa	$g = 9.81230 \frac{m}{s^2}$
równik	$g = 9.78030 \frac{m}{s^2}$

Efekt większy ze względu na spłaszczenie Ziemi

Układ obracający się

Ruch obrotowy Ziemi

Spadek swobodny z dużej wysokości

Spadek swobodny z wysokości **5.5 km**,
z prędkością $v \approx 55 \text{ m/s}$:

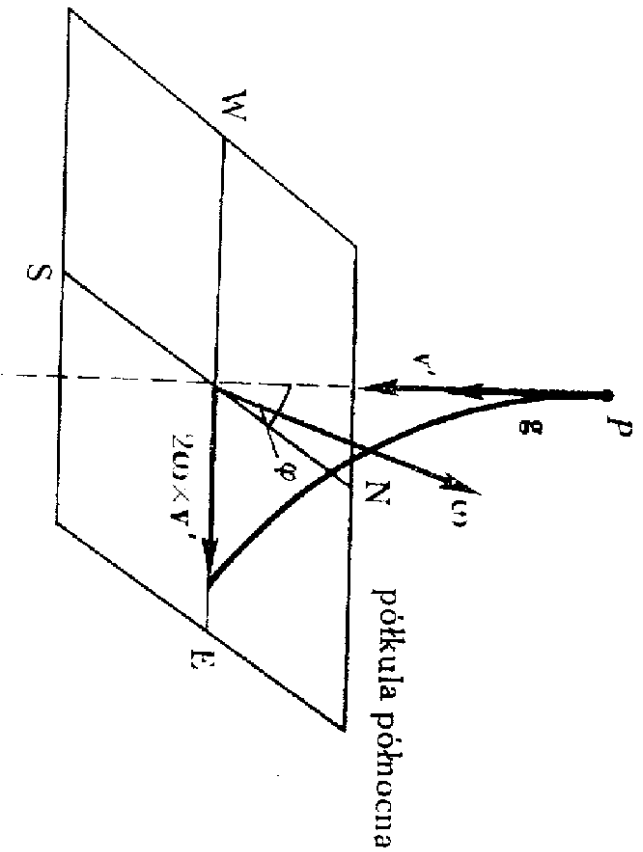
$$\begin{aligned} a_c &= 2 \omega v \cos \phi \\ &\approx 0.008 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos \phi \end{aligned}$$

Spadek z **5.5 km** zajmie $t = 100 \text{ s}$.

Końcowe odchylenie toru od pionu:

$$\Delta = \frac{a_c t^2}{2} \approx 40 \text{ m} \cdot \cos \phi$$

w Warszawie około 25 m



Siła Coriolisa odchyła tor ciała

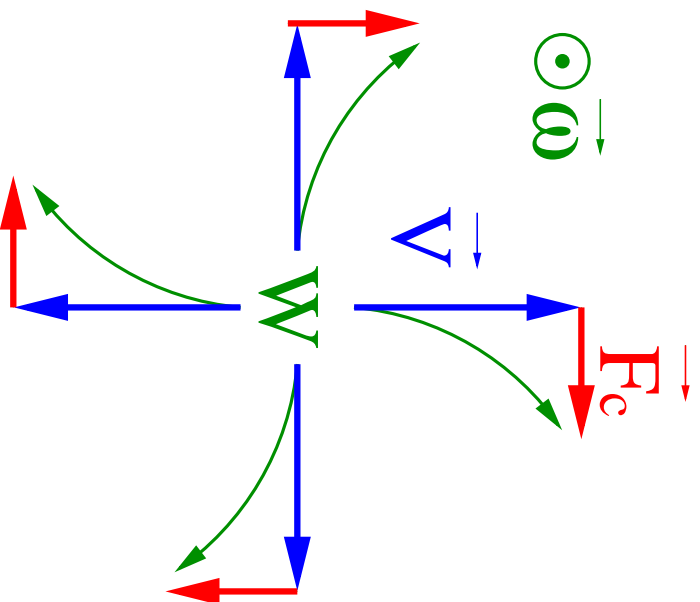
w kierunku wschodnim (półkula północna)

Układ obracający się

Siła Coriolisa

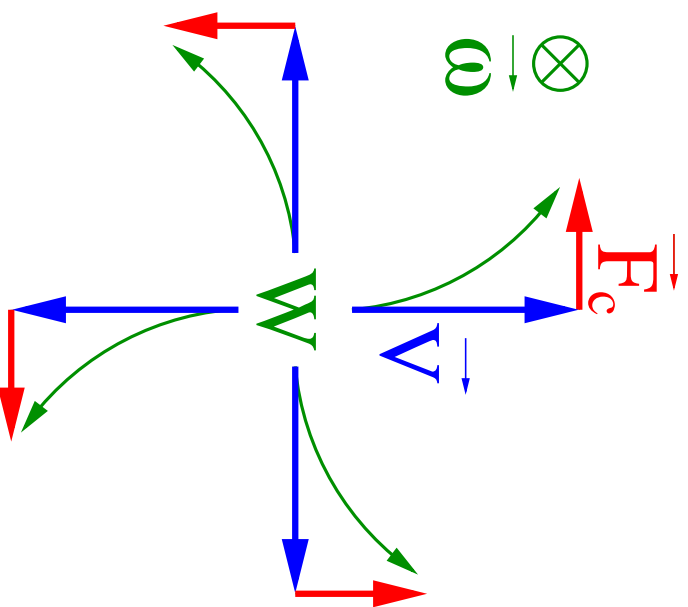
$$\vec{F}_c = -2 \cdot m \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Półkula północna



Wiatry zakręcają “w prawo”; wyż “kręci się” zgodnie z ruchem wskazówek zegara

Półkula południowa

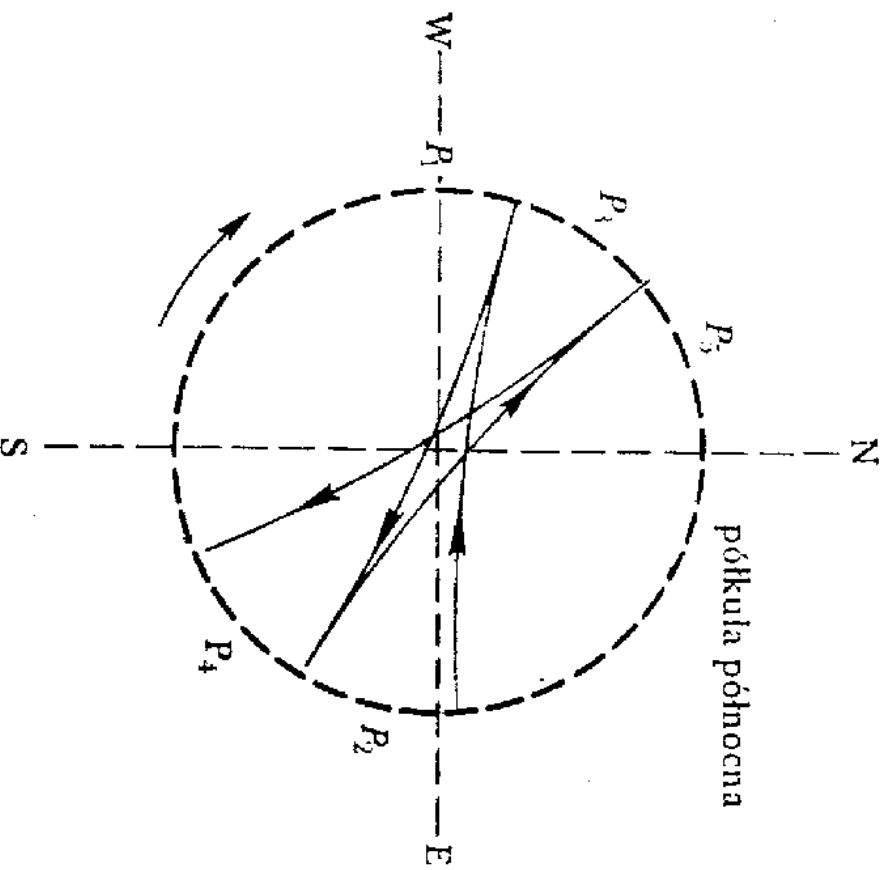


Wiatry zakręcają “w lewo”; wyż “kręci się” przeciwnie do ruchu wskazówek zegara

Układ obracający się

Wahadło Foucault'a

1851 r.



start z wychylenia maksymalnego

Dla obserwatora na Ziemi płaszczyzna ruchu
wahadła obraca się z prędkością kątową

$$\omega_1 = \omega \cdot \sin \phi$$

w Warszawie ($\phi = 52^\circ$): $\omega_1 \approx 12^\circ/h$

dla startu z położenia równowagi:

