Zadanie 2 Wersja A

Armata ustawiona na równiku wystrzeliwuje pocisk pionowo do góry. W jakiej odległości (w metrach) od lufy armaty spadnie pocisk i w jakim kierunku, jeśli prędkość początkowa pocisku wynosi $V_0 = 120m/s$. Opory powietrza pominąć. Przyjąć, że ruch pocisku odbywa się w jednorodnym polu grawitacyjnym $g = 9.81m/s^2$, a odchylenie toru pocisku od pionu jest małe.

Rozwiązanie

Lokalny układ współrzędnych związany z armatą: oś X pionowo do góry, oś Y poziomo na wschód, oś Z poziomo na północ (układ prawoskrętny).

Wektory przyspieszenia ziemskiego, prędkości kątowej Ziemi i prędkości początkowej pocisku w tym układzie:

$$\begin{aligned}\vec{g} &= (-g, 0, 0) \\ \vec{\omega} &= (0, 0, \omega_Z) \qquad \omega_Z = \frac{2\pi}{24h} = \frac{2\pi}{86400s} \\ \vec{V_0} &= (V_0, 0, 0)\end{aligned}$$

W przybliżeniu małych odchyleń od toru, siła Coriolisa działa poziomo i nie ma wpływu na ruch pionowy. Dla ruchu pionowego mamy więc (rzut pionowy):

$$\begin{aligned} a_X(t) &= -g \\ \Rightarrow\ V_X(t) &= -gt + V_X(0) = -gt + V_0 \\ \Rightarrow\ x(t) &= -\frac{gt^2}{2} + V_0 t + x(0) = -\frac{gt^2}{2} + V_0 t\end{aligned}$$

Czas t_s po jakim pocisk spadnie na ziemie:

$$x(t_s) = 0 \ \Rightarrow\ t_s = \frac{2V_0}{g}$$

W płaszczyźnie poziomej działa siła Coriolisa. Zaniedbując składowe poziome prędkości:

$$\begin{aligned}\vec{a}_C &= -2\vec{\omega} \times \vec{V}(t) \\ \vec{a}_C &= (0, -2\omega_Z V_x(t), 0)\end{aligned}$$

Ruch pocisku wzdłuż osi Y (dwukrotnie całkując po czasie; $V_y(0) = y(0) = 0$):

$$\begin{aligned} a_Y(t) &= -2\omega_Z V_x(t) = 2\omega_Z(gt - V_0) \\ V_Y(t) &= \omega_Z g t^2 - 2\omega_Z V_0 t \\ y(t) &= \frac{1}{3}\omega_Z g t^3 - \omega_Z V_0 t^2 = \omega_Z t^2 (\frac{1}{3} gt - V_0)\end{aligned}$$

Spadek na ziemie ($t = t_s = \frac{2V_0}{g}$):

$$y(t_s) = \omega_Z \left(\frac{2V_0}{g}\right)^2 (\frac{1}{3} g \frac{2V_0}{g} - V_0) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{\omega_Z V_0^3}{g^2}$$

Pocisk spadnie na zachód od armaty ($y(t_s) < 0$), w odległości:

$$|y(t_s)| = \frac{4}{3} \cdot \frac{2\pi}{86400s} \cdot \frac{(120m/s)^3}{(9.81m/s^2)^2} \approx 1.74m$$

Zadanie 2 Wersja B

Z balonu zawieszonego nad równikiem, na wysokości $h = 3600m$, zrzucono kamień (bez prędkości początkowej). W jakiej odległości (w metrach) i w jakim kierunku od punktu zaczepienia liny utrzymującej balon spadnie kamień. Opory powietrza pominąć. Przyjąć, że ruch kamienia odbywa się w jednorodnym polu grawitacyjnym $g = 9.81m/s^2$, a odchylenie toru kamienia od pionu jest małe.

Rozwiązanie

Lokalny układ współrzędnych związany z punktem zaczepienia balonu: oś X pionowo do góry, oś Y poziomo na wschód, oś Z poziomo na północ (układ prawoskrętny).

Wektory przyspieszenia ziemskiego i prędkości kątowej Ziemi w tym układzie:

$$\begin{aligned}\vec{g} &= (-g, 0, 0) \\ \vec{\omega} &= (0, 0, \omega_Z) \qquad \omega_Z = \frac{2\pi}{24h} = \frac{2\pi}{86400s}\end{aligned}$$

W przybliżeniu małych odchyleń od toru, siła Coriolisa działa poziomo i nie ma wpływu na ruch pionowy. Dla ruchu pionowego mamy więc (rzut pionowy):

$$\begin{aligned} a_X(t) &= -g \\ \Rightarrow\ V_X(t) &= -gt + V_X(0) = -gt \\ \Rightarrow\ x(t) &= -\frac{gt^2}{2} + x(0) = -\frac{gt^2}{2} + h\end{aligned}$$

Czas t_s po jakim kamień spadnie na ziemie:

$$x(t_s) = 0 \ \Rightarrow\ t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

W płaszczyźnie poziomej działa siła Coriolisa. Zaniedbując składowe poziome prędkości:

$$\begin{aligned}\vec{a}_C &= -2\vec{\omega} \times \vec{V}(t) \\ \vec{a}_C &= (0, -2\omega_Z V_x(t), 0)\end{aligned}$$

Ruch kamienia wzdłuż osi Y (dwukrotnie całkując po czasie; $V_y(0) = y(0) = 0$):

$$\begin{aligned} a_Y(t) &= -2\omega_Z V_x(t) = 2\omega_Z g t \\ V_Y(t) &= \omega_Z g t^2 \\ y(t) &= \frac{1}{3}\omega_Z g t^3\end{aligned}$$

Spadek na ziemie ($t = t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}}$):

$$y(t_s) = \frac{1}{3}\omega_Z g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_Z \frac{h^{3/2}}{\sqrt{g}}$$

Kamien spadnie na wschód od punktu zaczepienia ($y(t_s) > 0$), w odległości:

$$y(t_s) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2\pi}{86400s} \cdot \frac{(3600m)^{3/2}}{\sqrt{9.81m/s^2}} \approx 4.73m$$