Kinematyka: opis ruchu

Fizyka I (B+C)

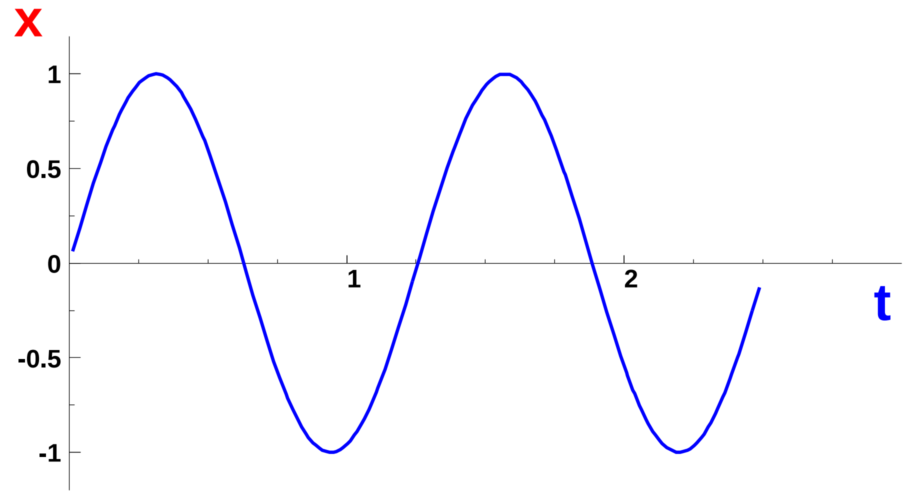
Wykład IV:

- Ruch harmoniczny
- Ruch po okręgu
- Efekt Dopplera
- Transformacja Galileusza

Ruch harmoniczny

Szczególny przykład ruchu drgającego:

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$



Parametry

- amplituda A
- częstość kołowa ω

  okres drgań $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
- faza początkowa ϕ

Prędkość: $V = \dfrac{dx}{dt} = \omega\ A \cdot \cos(\omega t + \phi)$

Przyspieszenie: $a = \dfrac{dV}{dt} = -\omega^2\ A \cdot \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 \cdot x$

Ruch harmoniczny

Równanie oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \, x \quad \text{(ruch w jednym wymiarze)}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2 \, \vec{r} \quad \text{(postać ogólna)}$$

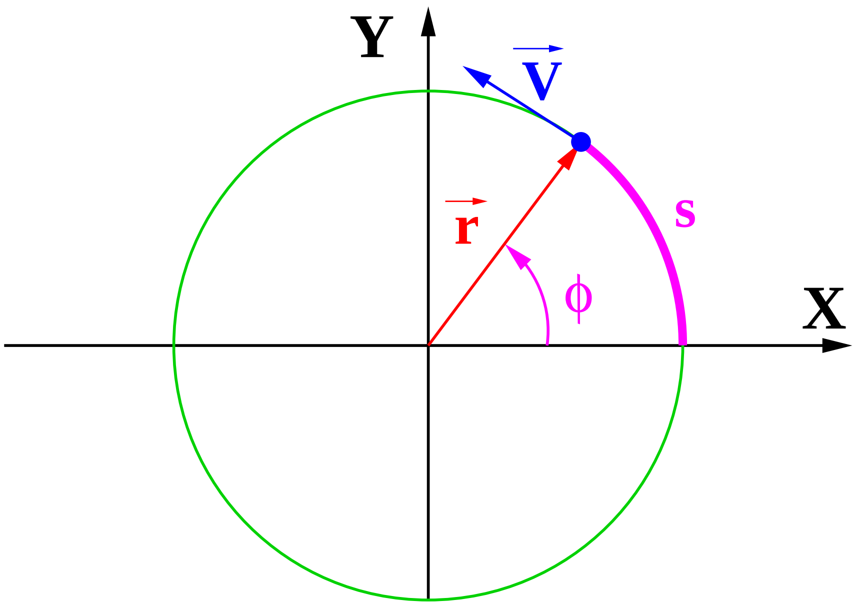
Równanie oscylatora dobrze opisuje zachowanie wielu układów fizycznych:

- ciężarek na sprężynie
- wahadło matematyczne (dla małych wychyleń)
- kamerton, struna, itp...

Ruch po okręgu

Położenie ciała może być opisane jedną zmienną:

- kąt w płaszczyźnie XY - ϕ
- długość łuku okręgu - s = $r \cdot \phi$



Prędkość:

$$V = \frac{ds}{dt} = r\,\frac{d\phi}{dt} = r\,\omega$$

prędkość kątowa $\omega = \frac{d\phi}{dt}$

Przyspieszenie kątowe: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$

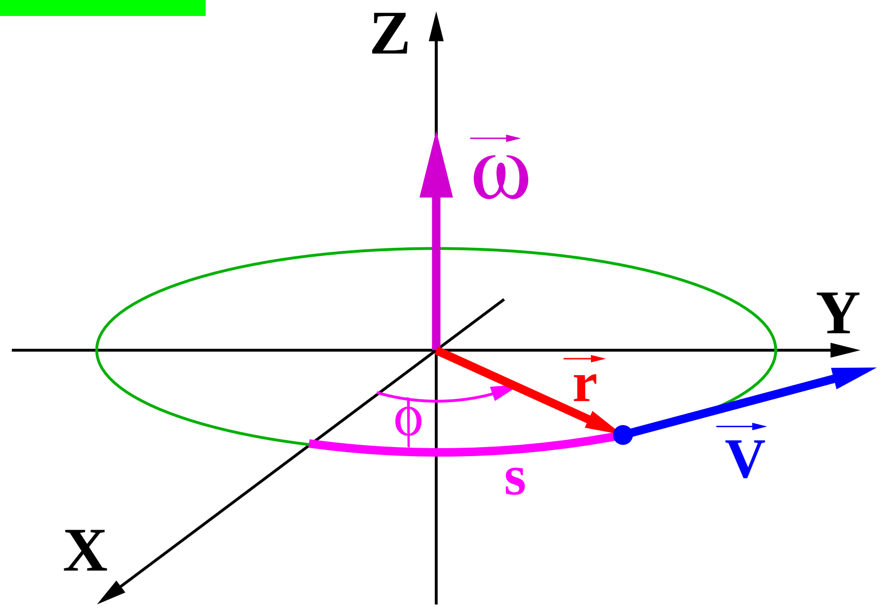
Ruch jednostajny po okręgu: $\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega$ = const $\quad \Rightarrow \quad$ V = const

ale $\vec{V} \neq$ const $\quad \Rightarrow \quad \vec{a} \neq 0$!?

Ruch po okręgu

Prędkość w zapisie wektorowym:

$$\boxed{\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$



Przyspieszenie:

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\
&= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V} \\
&= \vec{a_t} + \vec{a_n}
\end{aligned}$$

Oprócz przyspieszenia stycznego $\vec{a_t} \upuparrows \vec{V}$, opisującego zmianę $|\vec{V}|$, jest też przyspieszenie normalne $\vec{a_n}$, odpowiedzialne za zmianę kierunku $\vec{V}$ w czasie.

$$\vec{a_n} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \cdot \vec{r}$$

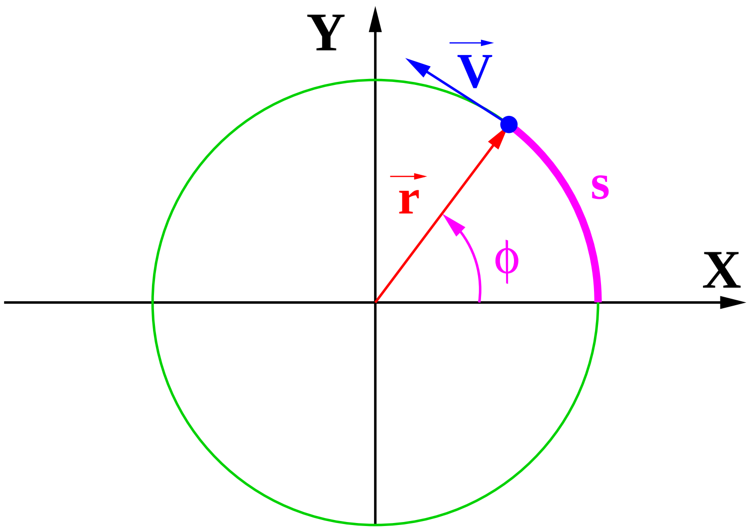
$$A \times (B \times C) = (A \cdot C) \cdot B - (A \cdot B) \cdot C$$

przyspieszenie dośrodkowe

Ruch po okręgu

Ruch jednostajny po okręgu $\Leftrightarrow$ przyspieszenie styczne: $\vec{a_t} = 0$

$$\Rightarrow \qquad \vec{a} = \vec{a_n} = -\omega^2 \cdot \vec{r}$$



Ruch jednostajny po okręgu jest złożeniem dwóch niezależnych ruchów harmionicznych:

$$x = r \cdot \cos(\omega \cdot t) = r \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$$

$$y = r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Ruch po okręgu $\Longleftrightarrow$ różnica faz $\Delta\phi = \pm\frac{\pi}{2}$

Ciekawostka:

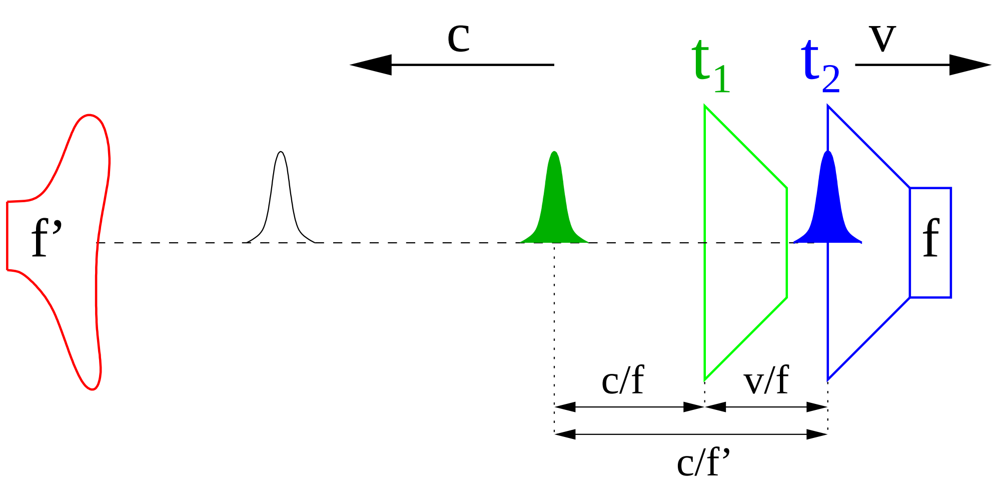
Ruch harminiczny można przedstawić jako złożenie dwóch ruchów po okręgu...

Efekt Dopplera

Ruchome źródło

źródło dźwięku o częstości f poruszające się z prędkością v względem ośrodka w którym prędkość dźwięku wynosi c.

Dla uproszczenia: krótkie impulsy wysyłane co $\Delta t = 1/f$:



t_1 - wysłanie pierwszego impulsu

t_2 - wysłanie drugiego impulsu

odległość między impulsami:

$$\frac{c}{f'} = \lambda' = \underbrace{\frac{c}{f}}_{\text{ruch impulsu}} + \underbrace{\frac{v}{f}}_{\text{ruch źródła}}$$

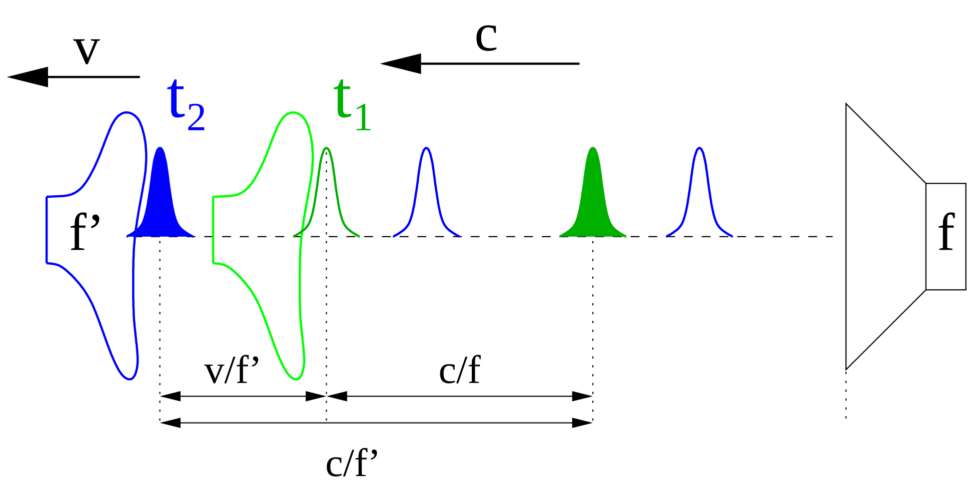
Częstość dźwięku i długość fali
mierzona przez obserwatora nieruchomego względem ośrodka:

$$f' = \frac{f}{1 + \frac{v}{c}} \qquad \lambda' = \lambda \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

Efekt Dopplera

Ruchomy obserwator

obserwator porusza się z prędkością v względem ośrodka i źródła dźwięku



aby dogonić obserwatora impuls musi pokonać odległość

$$\frac{c}{f'} = \lambda' = \frac{c}{f} + \frac{v}{f'}$$

odległość początkowa — ruch obserwatora

Mierzona częstość i długość fali:

$$f' = f\left(1 - \frac{v}{c}\right) \qquad \lambda' = \frac{\lambda}{1 - \frac{v}{c}}$$

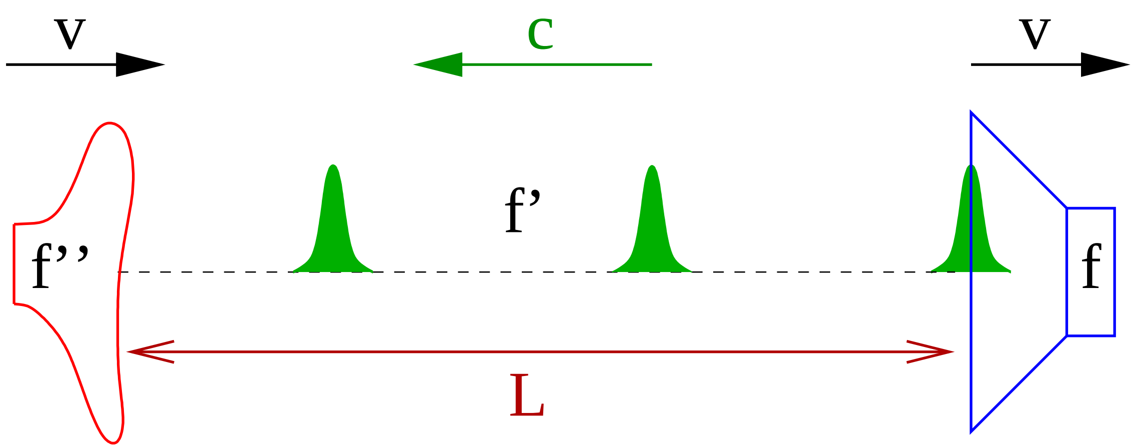
W klasycznym efekcie Dopplera zmiana częstości zależy nie tylko od względnej prędkości źródła i obserwatora ale i ruchu względem ośrodka.

Efekt Dopplera

Ruch ośrodka

Przyjmijmy, że źródło dźwięku i obserwator są względem siebie w spoczynku.

Niech ich prędkość względem ośrodka wynosi v



Częstość mierzona przez obserwatora jest wynikiem złożenia dwóch efektów Dopplera:

$$f'' = f' \left(1 + \frac{v}{c}\right) \; = \; \frac{f}{1+\frac{v}{c}} \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right) = f$$

Częstość się nie zmienia, ale zmienia się czas miedzy wysłaniem a rejestrają impulsu:

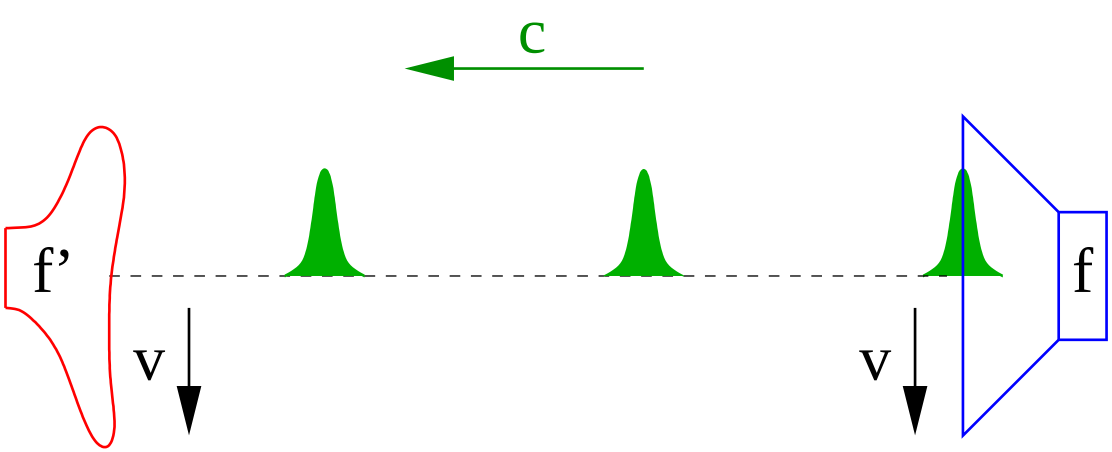
$$\Delta t' = \frac{L}{c+v} = \frac{L}{c} \cdot \frac{c}{c+v} = \frac{\Delta t}{1+\frac{v}{c}} \qquad \Rightarrow \quad \text{przesunięcie w fazie}$$

Efekt Dopplera

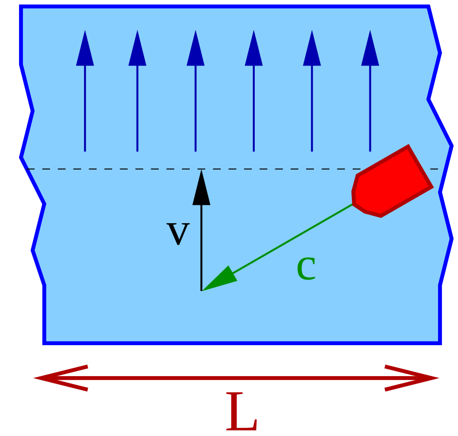
Ruch ośrodka

źródło dźwięku i obserwator nie muszą poruszać się w ośrodku wzdłuż lini je łączącej...

Rozważmy ruch w kierunku prostopadłym:



przeprawa łódką przez rzekę



Częstość mierzona w dowolnym punkcie na lini łączącej źródło i obserwatora wynosi f

Czas miedzy wysłaniem a rejestrają impulsu:

$$\Delta t' = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{L}{c} \cdot \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Czas propagacji zależy od prędkości układu źródło-obserwator względem ośrodka.

Transformacja Galileusza

Efekt Dopplera wiąże się z ruchem źródła względem obserwatora (a nie ośrodka) !

$\Rightarrow$ porównujemy pomiary wykonywane w różnych układach odniesienia...

Zdarzenie

Zdarzenie: jednoczesne określenie czasu i położenia.

Zjawisko zachodzące w pewnym miejscu w przestrzeni i w pewnej chwili czasu.

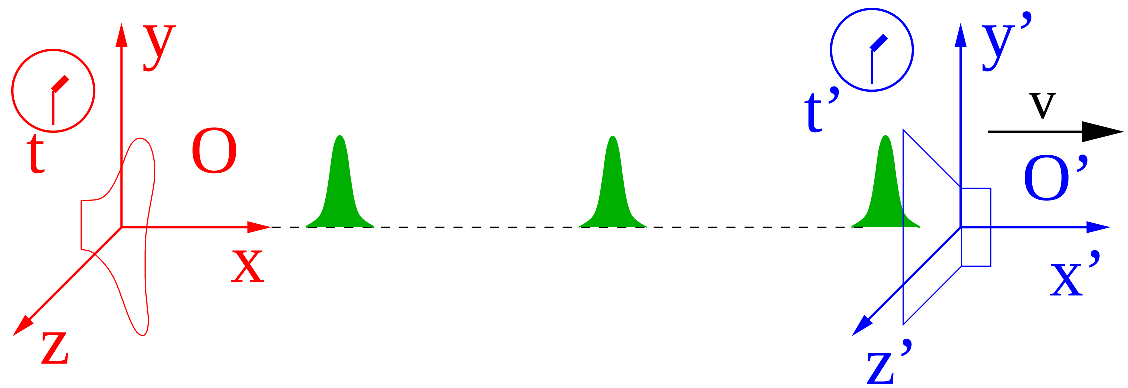
Przykłady:

- **pomiar** położenia ciała (w danej chwili czsu)
- zderzenie kulek
- rozszczepienie jądra atomowego
- wysłanie impulsu (świetlnego, dźwiękowego, itp...)
- rejestracja impulsu

ZDARZENIE = CZAS + POŁOŻENIE

Transformacja Galileusza

Efekt Dopplera



Zdarzeniem jest zarówno wysłanie kolejnego impulsu, jak i jego rejestracja.

Oba typy zdarzeń mogą być zmierzone (czas i położenie) przez obu obserwatorów:
O' związanego ze źródłem i rejestrującego impulsy O.

Dla każdego przekazywanego impulsu mamy łącznie 4 pomiary

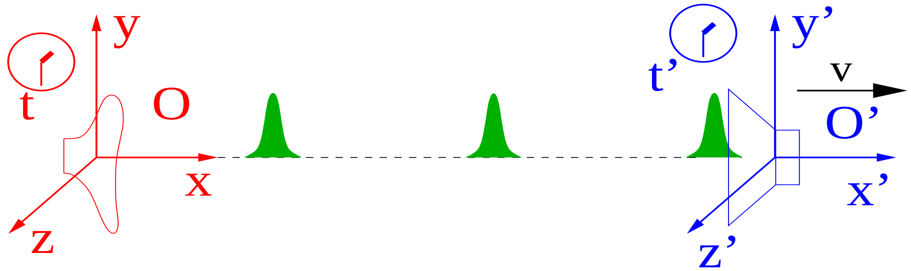
Transformacja ukladu współrzędnych

W przypadku ogólnym obserwując to samo zdarzenie
każdy z obserwatorów może zmierzyć inne współrzędne.

Jeśli wiemy jak obserwatorzy poruszają się względem siebie,
powinniśmy móc wyznaczyć transformacje $(t, x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad (t', x', y', z')$

Transformacja Galileusza

Efekt Dopplera



Przyjmijmy, że obserwatorzy (początki ich układów) mijają się w chwili $t = t' = 0$

Wysłanie imuplsu n w układzie O': $(t', x', y', z') = (n\,T, 0, 0, 0)$ T - okres drgań.

W układzie O: $(t, x, y, z) = (n\,T, n\,T\,V, 0, 0)$ V - prędkość O' w O.

Rejestracja impulsu n w układzie O: $(t, x, y, z) = (n\,T + \frac{n\,T\,V}{c}, 0, 0, 0)$

$\Rightarrow$ Okres mierzony przez O: $\tilde{T} = T(1 + \frac{V}{c})$

Rejestracja impulsu n w układzie O':

$$(t', x', y', z') = (n\,T + \frac{n\,T\,V}{c}, -n\,T\,V - \frac{n\,T\,V^2}{c}, 0, 0)$$

Według obserwatora O' impuls przebył drogę $n\,T\,V + \frac{n\,T\,V^2}{c}$ w czasie $\frac{n\,T\,V}{c}$

$\Rightarrow$ Prędkość impulsu mierzona przez O': $\tilde{c} = c(1 + \frac{V}{c}) = c + V$

Transformacja Galileusza

Uniwersalnosc czasu

Była podstawowym założeniem w fizyce klasycznej (Newtonowskiej)

Czas nie zależał od układu odniesienia.

Transformacja Galileusza $\Rightarrow \begin{cases} t = t' \\ x = x' + V\,t' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

Konsekwencją uniwersalności czasu jest jednak względność prędkości

Każda prędkość, także prędkość światła zmienia się przy zmianie okładu odniesienia

$$\boxed{v = v' + V}$$

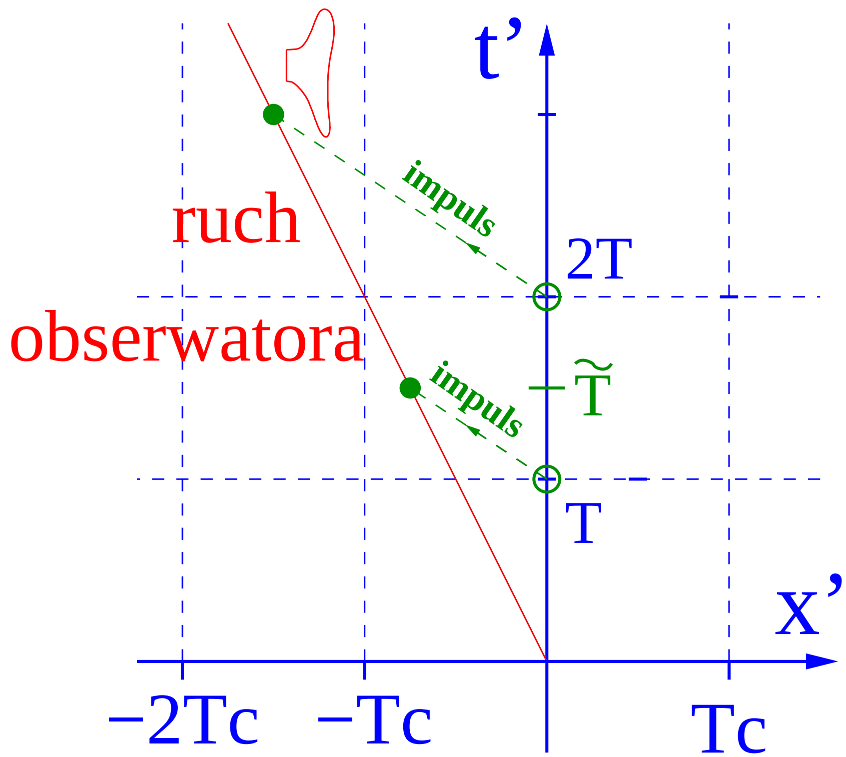
Tr. Galileusza

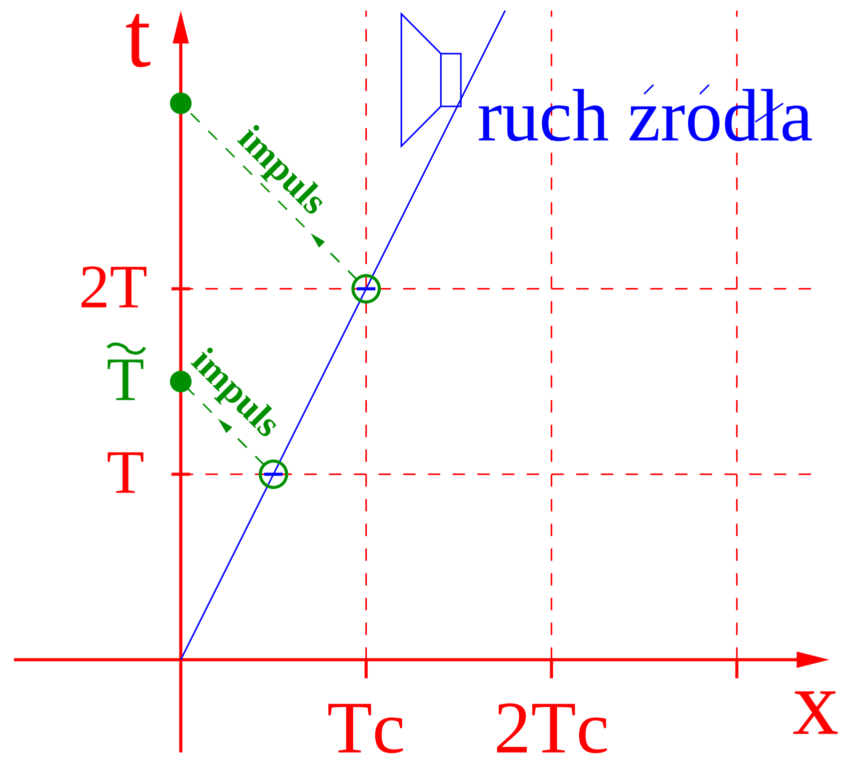
Transformacja Galileusza

Zdarzenia wysłania i odbioru impulsów mierzone z punktu widzenia:

obserwatora związanego ze źródłem

obserwatora rejestrującego impulsy





Większa prędkość propagacji impulsów: $\tilde{c} = c + V$

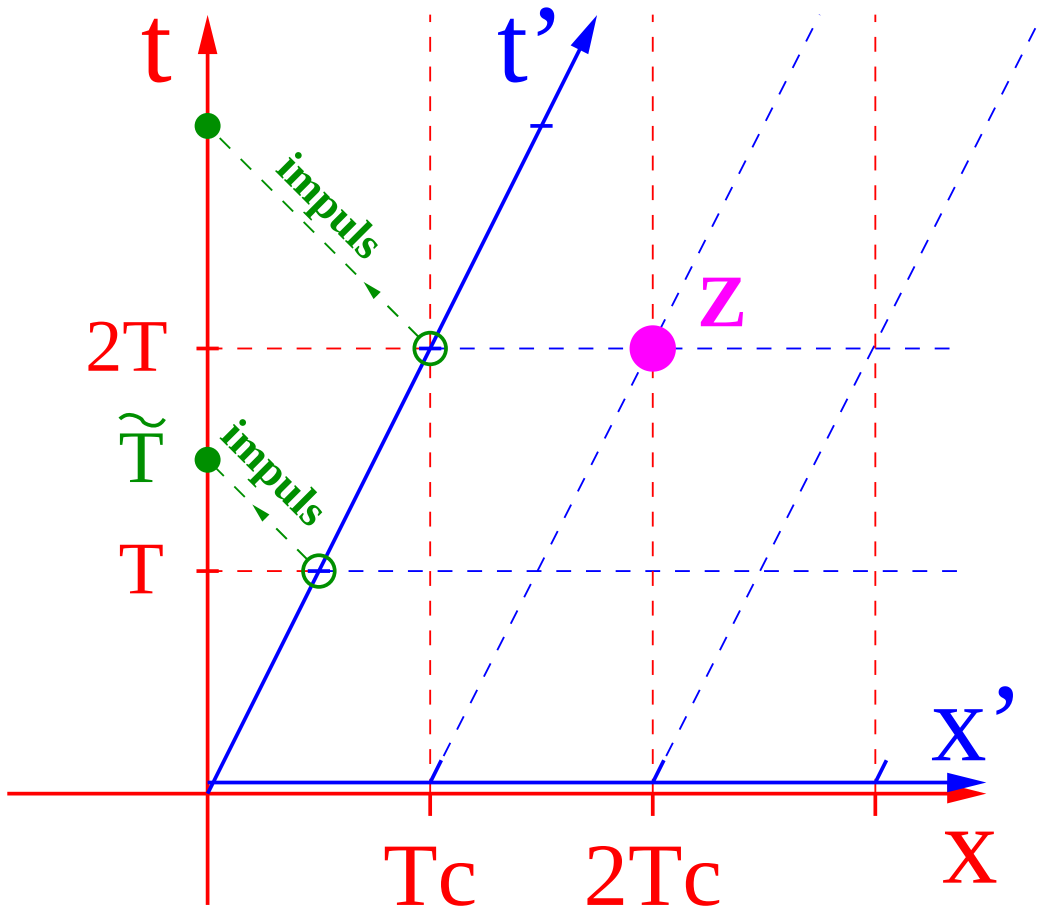
Transformacja Galileusza

Przedstawienie graficzne

Dla dowolnego zdarzenia Z,
czas w obu układach jest ten sam
linie stałego czasu pokrywają się

Obaj obserwatorzy mierzą takie same wartości dla

- czasu pomiędzy emisjami kolejnych impulsów T
- czas pomiędzy rejestracją kolejnych impulsów $\tilde{T}$



Efekt Dopplera wynika z faktu, że inny czas przyjmują za okres drgań...