Kinematyka relatywistyczna

Fizyka I (B+C)

Wykład VI:

- Transformacja Lorenza
- Interwał czasoprzestrzenny i przyczynowość
- Skrócenie Lorenza

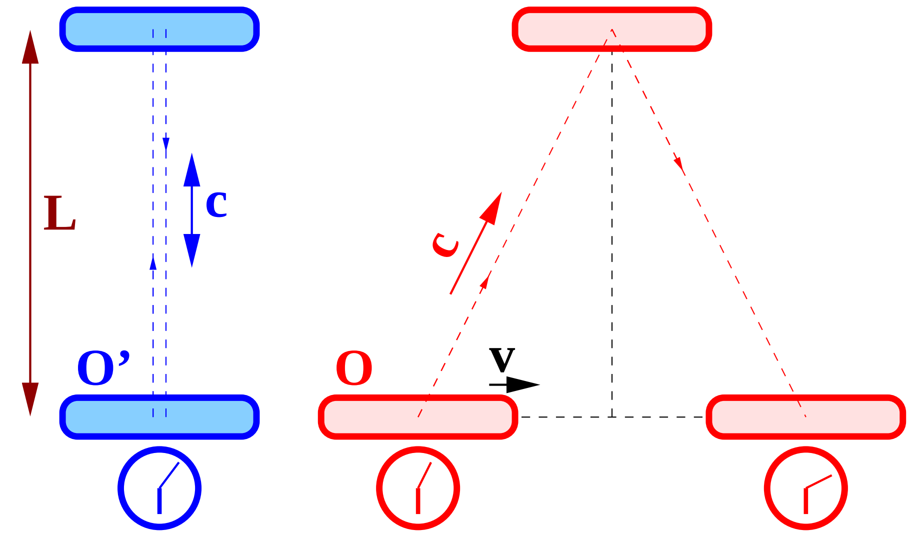
Przypomnienie

Dylatacja czasu

Dla obserwatora O zegar w początku układu O' chodzi wolniej...

Ale układy powinny być równoważne !?

Pozorny paradoks wynika z faktu, że pomiar narusza symetrię między układami: obserwujemy zegar, który jest związany z konkretnym układem odniesienia.



Obserwator O powie, że w układzie O':

Obserwator O' powie, że w układzie O:

- zegary nie są poprawnie zsynchronizowane
- wszystkie zegary chodzą wolniej niż powinny

$\Rightarrow$ pełna symetria

Czy jesteśmy w stanie powiązać pomiary czasu i położenia w obu układach ?

Tak jak to robiliśmy w przypadku klasycznym (transformacja Galileusza)...

Transformacja Lorenza

Transformacja liniowa

Aby zachować niezmienniczość praw przyrody względem przesunięć w czasie i przestrzeni, transformacja współrzędnych między układami powinna mieć postać

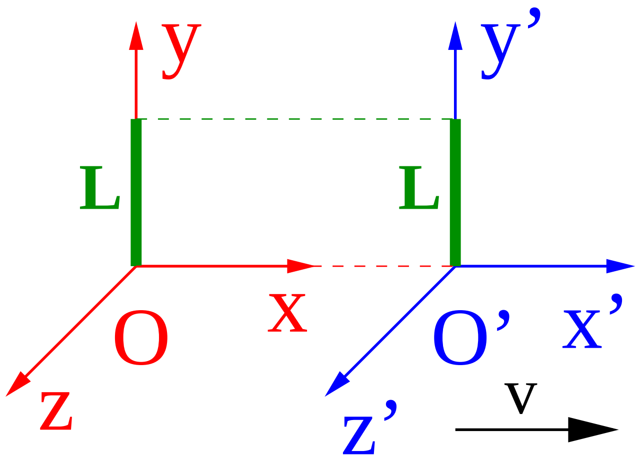
$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad L \text{ - macierz } 4 \times 4$$

Wymiary poprzeczne

Rozawżmy jednostkowe pręty umieszczone w obu układach wzdłuż osi Y (lub Z).

Z symetrii zagadnienia, żaden obserwator nie może stwierdzić, że jego pręt jest dłuższy

$$\Rightarrow \quad y = y'$$
$$z = z'$$



Transformacja Lorenza

Szukamy więc transformacji w ogólnej postaci:

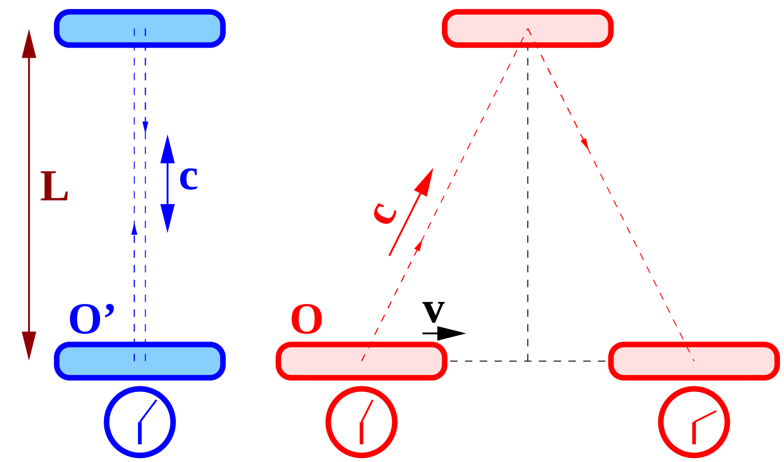
$$t = A\,t' + B\,x'$$
$$x = C\,t' + D\,x' \qquad y = y' \qquad z = z'$$

Dylatacja czasy

Przyjmijmy, że w obu układach pierwsze "tyknięcie" zegara świetlnego ma współrzędne $(0,0,0,0)$.

Drugie "tyknięcie" w układzie O': $(t',0,0,0)$

W układzie O:



$$t = \gamma \cdot t' \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow \quad x = \beta \cdot ct = \beta\gamma \cdot ct' \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow \quad A = \gamma \qquad C = \beta\gamma c$$

Transformacja Lorenza

Predkość światła

Przyjmijmy, że w chwili mijania się obserwatorów $t = t' = 0$
z początku układów emitowane są dwa impulsy światła, zgodnie i przeciwnie do $\vec{v}$.

Dla obu obserwatorów rozchodzą się one z prędkością c.

	O'	O	
pierwszy impuls	$x' = ct'$	$x = ct$	$\Rightarrow Ct' + D(ct') = \ c \cdot \left[At' + B(ct') \right]$
drugi impuls	$x' = -ct'$	$x = -ct$	$\Rightarrow Ct' - D(ct') = -c \cdot \left[At' - B(ct') \right]$

dodając i odejmując stronami otrzymujemy:

$$B = \frac{1}{c^2} C = \frac{1}{c} \beta\gamma$$

$$D = A = \gamma$$

Transformacja Lorenza

Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,\gamma\,t' + \gamma\,\beta\,x' \\ c\,\gamma\,\beta\,t' + \gamma\,x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\,\beta & 0 & 0 \\ \gamma\,\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta & 0 & 0 \\ \sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

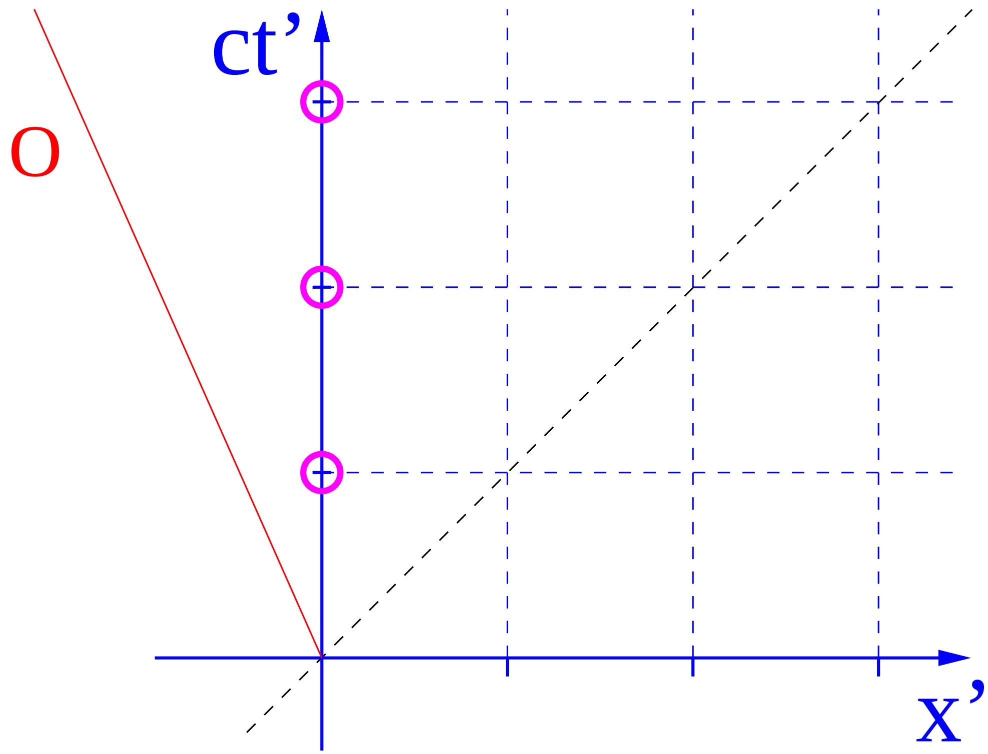
ct traktujemy jako “czwarty” wymiar (zazwyczaj zapisujemy jako wymiar “zerowy” - x_0)

Transformacja Lorenza $\equiv$ “obrót” w “płaszczyźnie” ct-x dla ruchu wzdłuż osi X

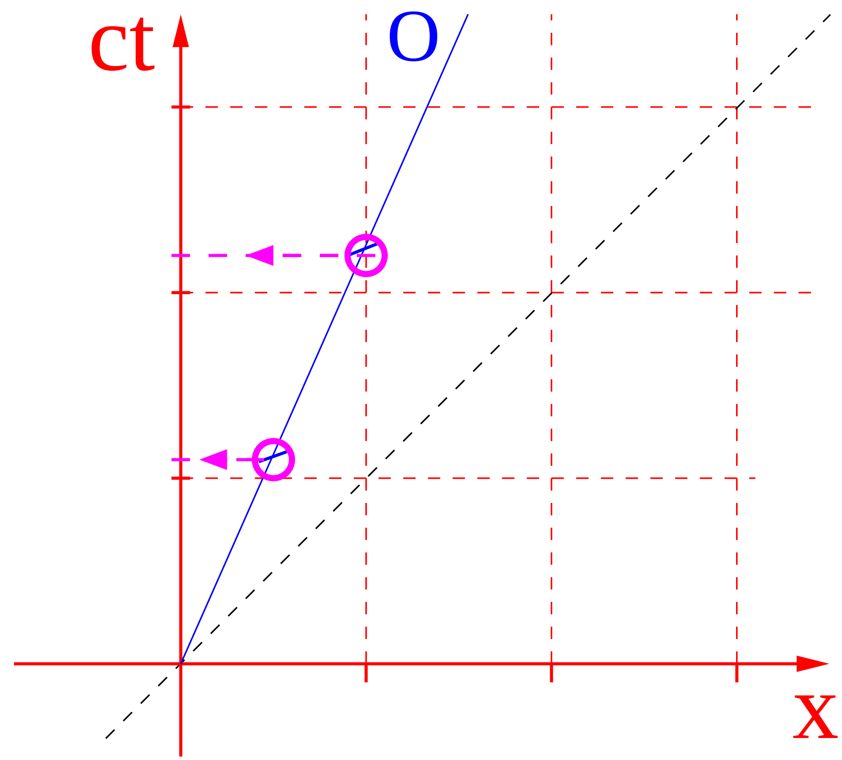
Transformacja Lorenza

Przedstawienie graficzne

“Tyknięcia” zegara O’ rejestrowane w układzie O’:



Te same zdarzenia rejestrowane w układzie O:



“tyknięcia” obrazują nam oś ct’ $\Rightarrow$ obrót ?

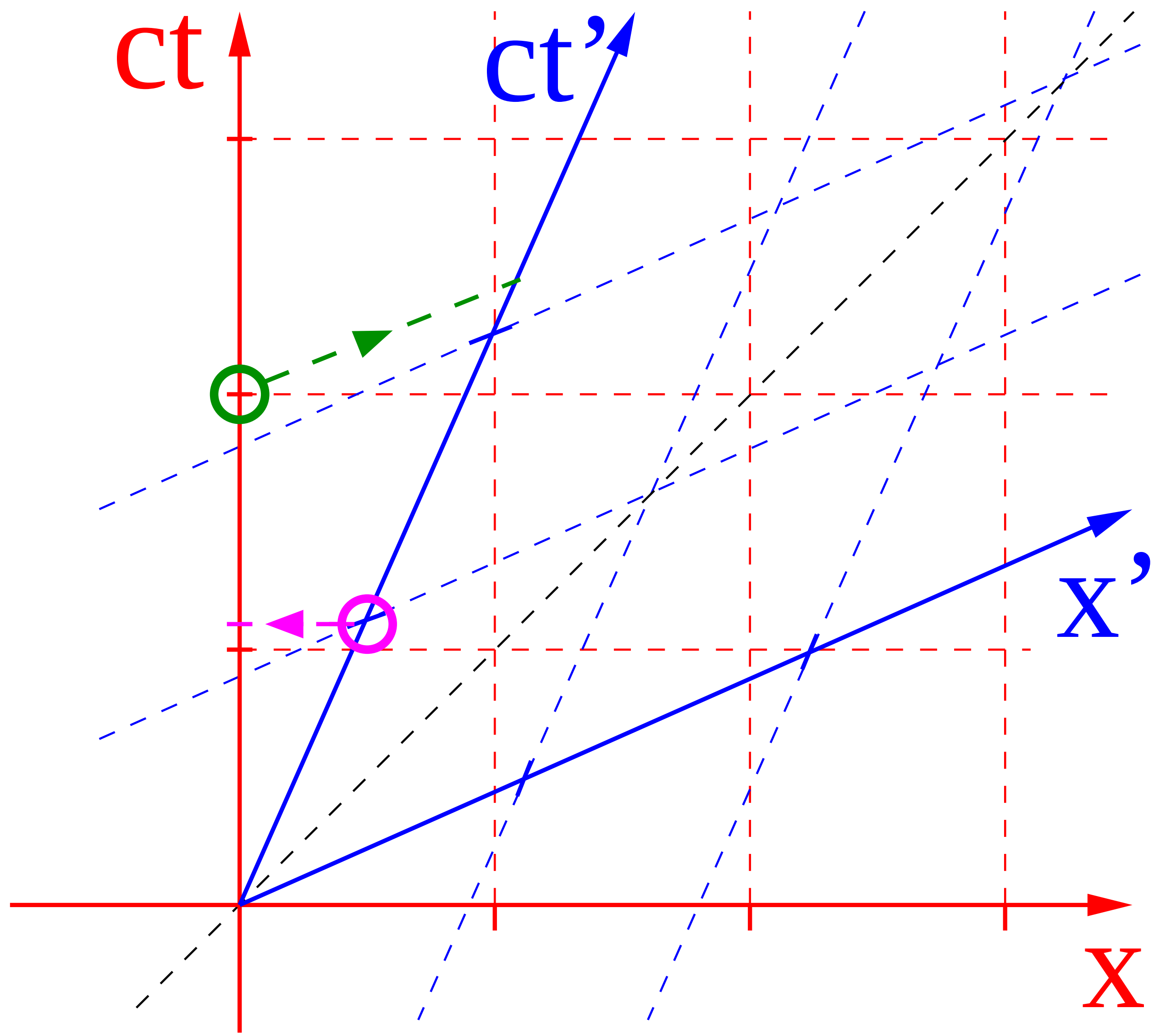
Transformacja Lorenza

Przedstawienie graficzne

Długość jednostki układu O'
w układzie O: $1' = \gamma$
(dylatacja czasu)

Ale także obserwator O' widzi
dylatację czasu O !

wykres Minkowskiego $\Rightarrow$



Transformacja Lorenza

Dodawanie prędkości

Niech ciało porusza się z prędkością $\vec{u} = (u', 0, 0)$ w układzie odniesienia O'.

Przyjmując, że w chwili $t = t' = 0$ ciało znajdowało się w początku układu:

$$x' = u' \cdot t'$$

Transformując równanie ruchu do układu O otrzymamy:

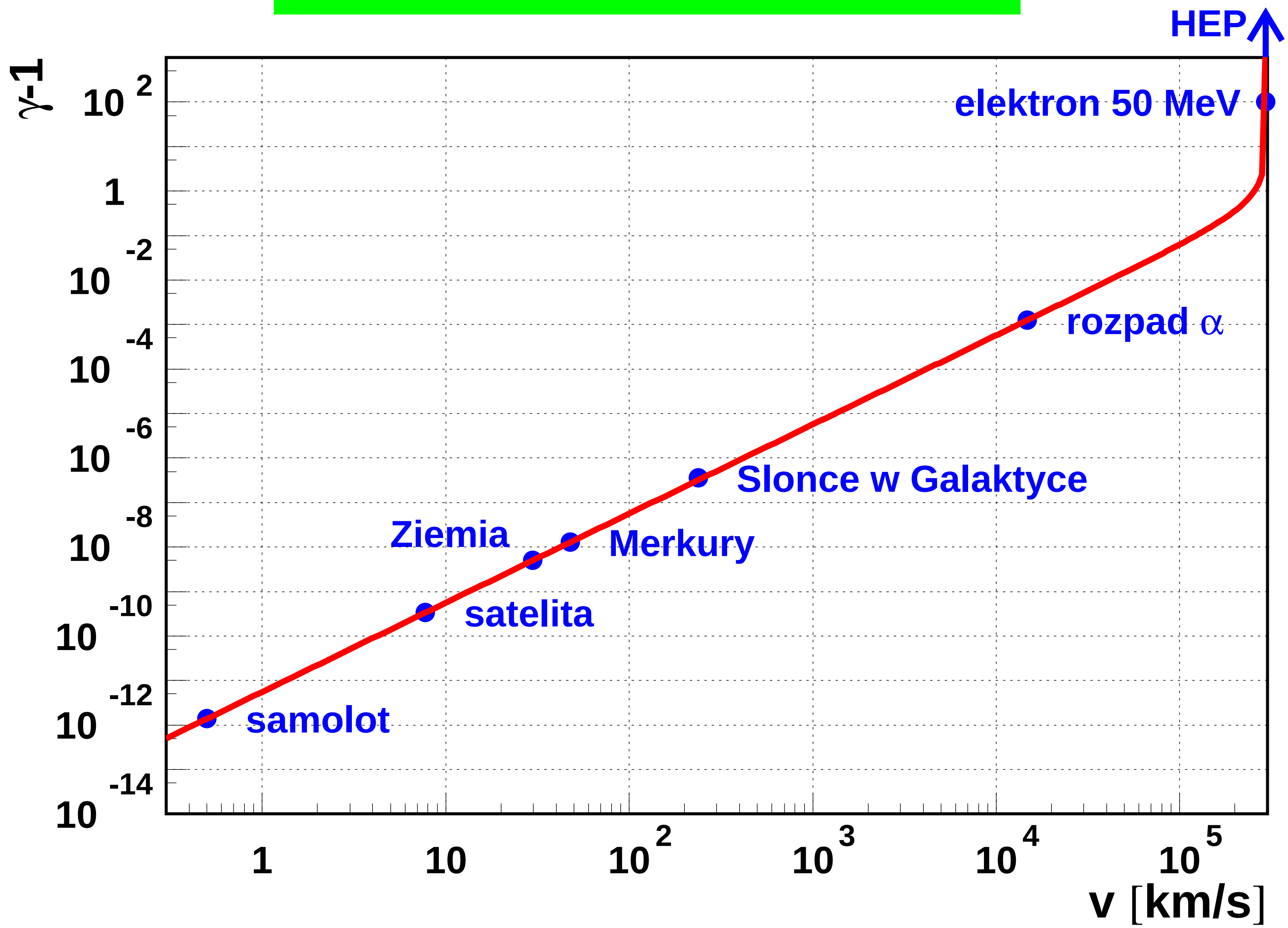
$$\begin{aligned} c\,t &= \gamma\, c\, t' \,(1 + \beta\,\beta') \\ x &= \gamma\, c\, t' \,(\beta + \beta') \end{aligned} \qquad \beta' = \frac{u'}{c}$$

Otrzymujemy relatywistyczne prawo dodawania prędkości $\quad \beta'' = \frac{u}{c}$

$$\boxed{\beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\,\beta'}}$$

$\beta' = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta'' = 1$ (c=const); $\qquad \beta,\ \beta' < 1 \quad \Rightarrow \quad \beta'' < 1$ (prędkość graniczna)

Transformacja Lorenza



$\Rightarrow$ astrofizyka i fizyka cząstek elementarnych (High Energy Physics)

Transformacja Lorenza

Wyrażenia na Transformację Lorenza uzyskaliśmy przy założeniu, że początki układów mijają się w chwili $t = t' = 0$.

$\Rightarrow$ zdarzenie to ma w obu układach współrzędne $(0, 0, 0, 0)$

W ogólności Transformację Lorenza opisuje transformację różnicy współrzędnych dwóch wybranych zdarzeń A i B: $\Delta t = t_B - t_A, \;\; \Delta x = x_A - x_B$ ...

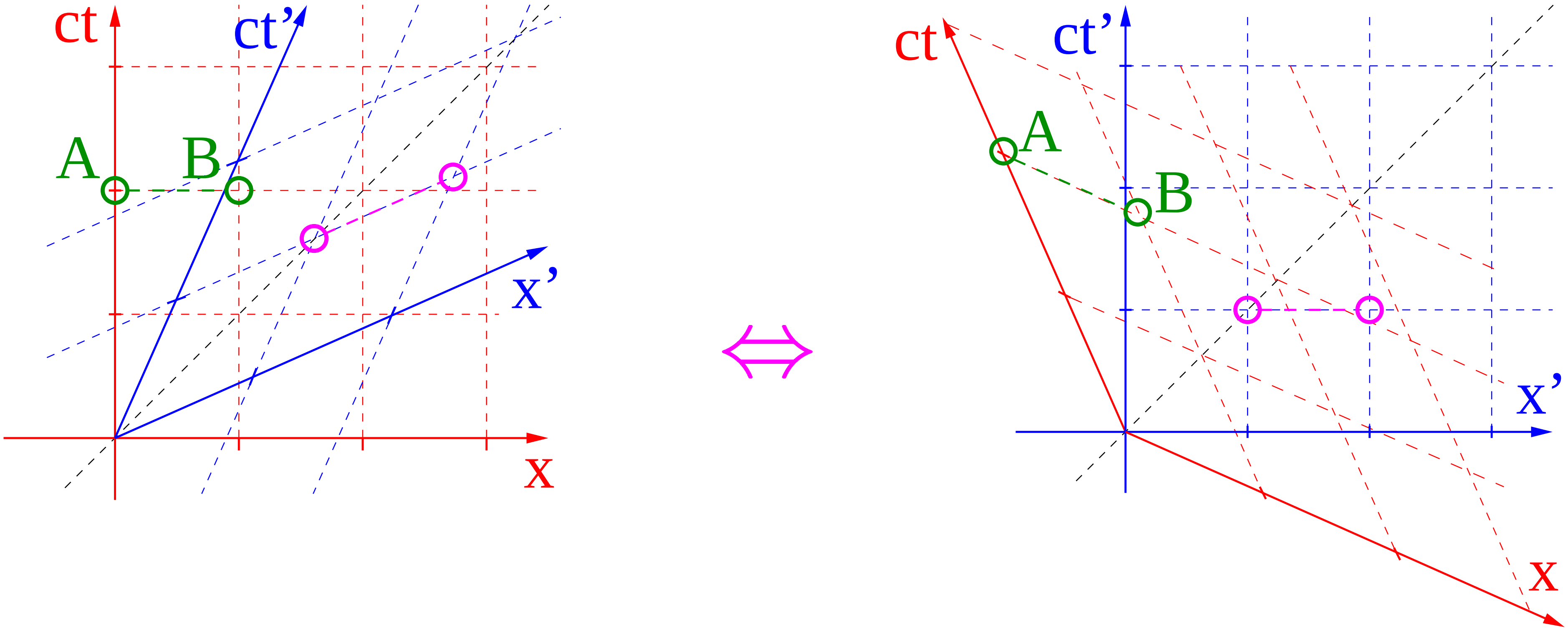
Przyjmując $c \equiv 1$:

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\,\Delta t' + \gamma\,\beta\,\Delta x' \\ \gamma\,\beta\,\Delta t' + \gamma\,\Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\,\beta & 0 & 0 \\ \gamma\,\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix}$$

Jeśli przyjmiemy, że w obu układach A = $(0, 0, 0, 0)$ $\Rightarrow$ transformacja współrzędnych.

Transformacja Lorenza

Względność równoczesności



Dwa zdarzenia równoczesne w układzie O nie są równoczesne w układzie O'

Kolejność w jakiej zaobserwuje je obserwator O' zależy od położenia zdarzeń w stosunku do kierunku ruchu względnego.

Transformacja Lorenza

Interwał

Interwał czasoprzestrzenny między dwoma zdarzeniami definiujemy jako:

$$s_{AB} = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

Interwał jest niezmiennikiem transformacji Lorenza ! “odległość” w czasoprzestrzeni

Nie zależy od układu odniesienia, w którym go mierzymy.

Przyczynowość

Jeśli $s_{AB} > 0$ to można znaleźć taki układ odniesienia, w którym zdarzenia A i B będą zachodzić w tym samym miejscu.

$\sqrt{s_{AB}}$ określa odstęp czasu między zdarzeniami w tym układzie
Jeśli zdarzenia A i B związane są z ruchem jakiejś cząstki $\Rightarrow$ czas własny

$s_{AB} > 0$ - interwał czasopodobny

$\Rightarrow$ Zdarzenia A i B mogą być powiązane przyczynowo.

Ich kolejność jest zawsze ta sama.

Transformacja Lorenza

Przyczynowość

Jeśli $s_{AB} < 0$ to można znaleźć taki układ odniesienia,
w którym zdarzenia A i B będą zachodzić w tej samej chwili.

$\sqrt{-s_{AB}}$ określa odległość przestrzenną między zdarzeniami w tym układzie
np. mierzona długość ciała (A i B - pomiary położenia końców)

$\boxed{s_{AB} < 0 \text{ - interwał przestrzeniopodobny}}$

$\Rightarrow$ Zdarzenia A i B NIE mogą być powiązane przyczynowo !
Kolejność zdarzeń zależy od układu odniesienia.

Jeśli $s_{AB} = 0$ to w żadnym układzie odniesienia
zdarzenia A i B nie będą zachodzić w tej samej chwili ani w tym samym miejscu

$\boxed{s_{AB} = 0 \text{ - interwał zerowy}}$

Zdarzenia A i B może połączyć przyczynowo jedynie impuls świetlny

Transformacja Lorenza

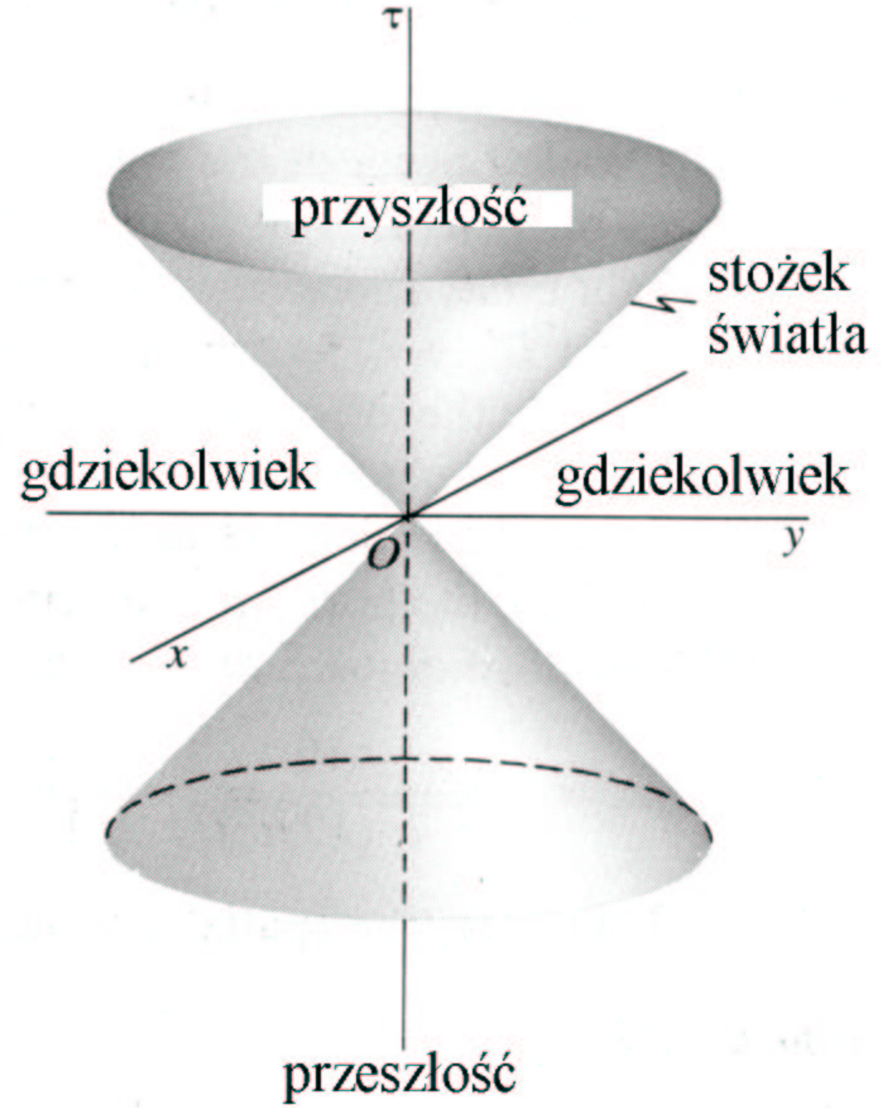
Przyczynowość

O - “tu i teraz”

$s_{OA} > 0$ i $t_A > 0$
bezwzględna przyszłość: zdarzenia na które możemy mieś wpływ

$s_{OA} < 0$
zdarzenia bez związku przyczynowego

$s_{OA} > 0$ i $t_A < 0$
bezwzględna przeszłość: zdarzenia które mogły mieś wpływ na nas



Skrócenie Lorenza

O' - układ związany z rakietą o długości L_0.

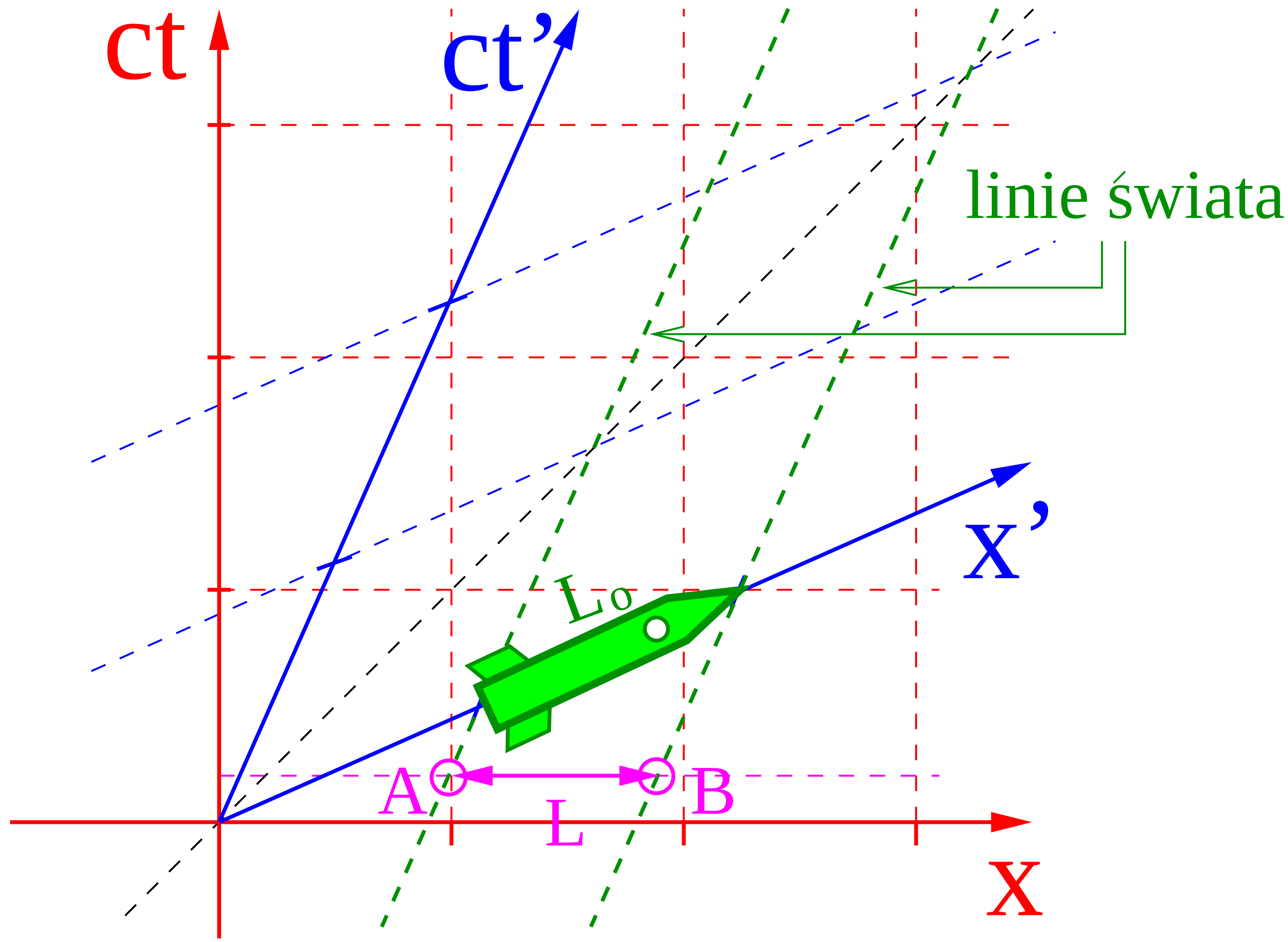
Pomiar długości:
równoczesny pomiar położenia obu końców.

Pomiar AB w układzie O:

$$\Delta x_{AB} = L$$
$$\Delta t_{AB} \equiv 0$$

W układzie O':

$$\Delta x'_{AB} \equiv L_0$$
$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{\gamma} L_0$$



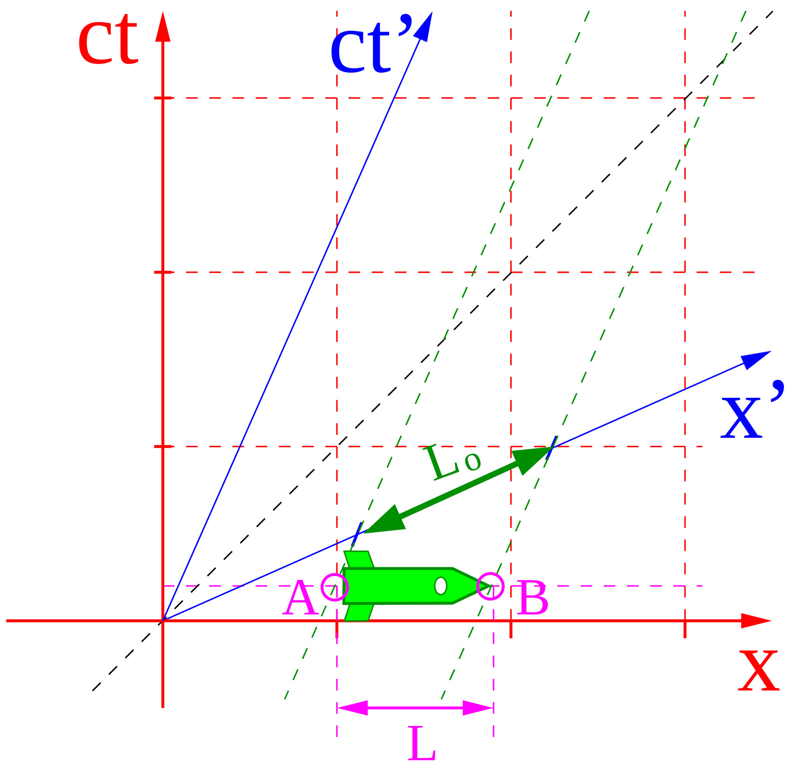
skrócenie Lorenza

$\Delta t'_{AB} \neq 0$!!!

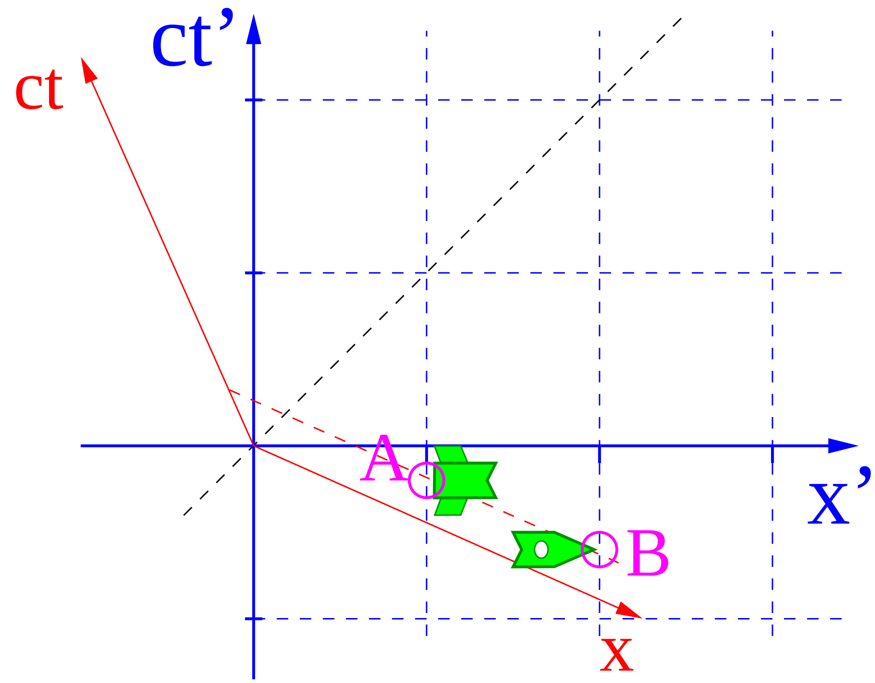
Skrócenie Lorenza

Skrócenie Lorenza ma związek ze względnością równoczesności:

Obserwator O uważa, że równocześnie zmierzył położenie obu końców rakiety (zdarzenia A i B):

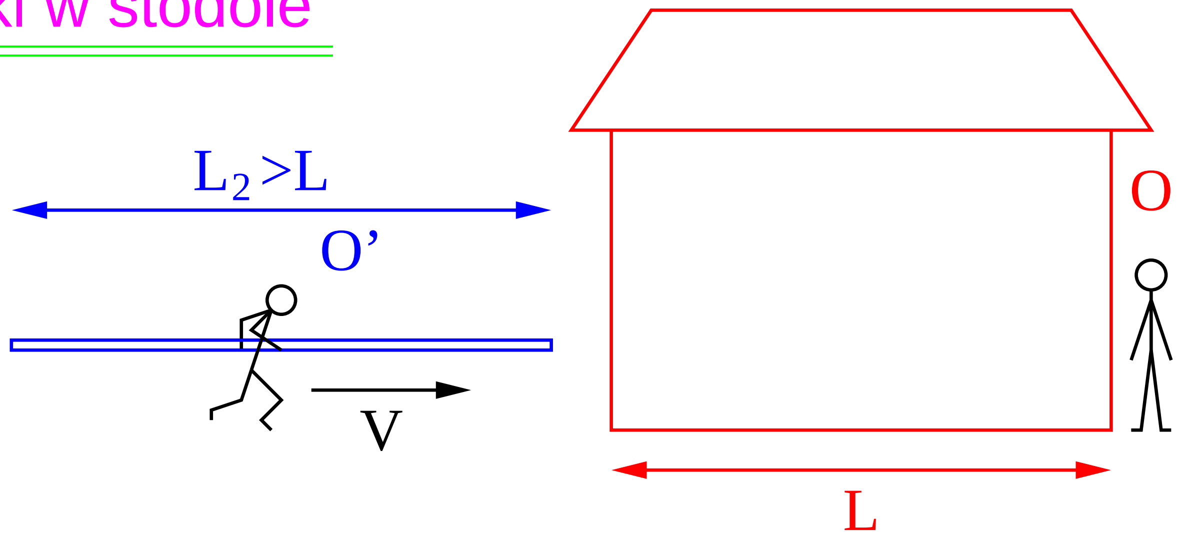


Obserwator O' stwierdzi, że wcześniej zmierzono położenie przodu niż tyłu rakiety $\Rightarrow$ rakieta przesunęła się $\Rightarrow$ zły pomiar



Skrócenie Lorenza

Paradoks “tyczki w stodole”



Obserwator O powie, że tyczka się skóciła i zmieściła w stodole. (jeśli $\frac{L_2}{\gamma} < L$)

Biegacz O’ stwierdzi, że to stodoła się skróciła. Tyczka nie mogła się w niej zmieścić.

Obaj mają rację !!!

Różni ich zdanie na temat kolejności zdarzeń: minięcia wrót stodoły przez końce tyczki.

Zdarzenia te są rozdzielone przestrzennie ($s < 0$) - kolejność zależy od układu...