

# Kinematyka relatywistyczna

Fizyka I (B+C)

## Wykład VII:

- Paradoks bliźniąt
- Relatywistyczny efekt Dopplera

# Przypomnienie

## Transformacja Lorentza

dla różnicy współrzędnych dwóch wybranych zdarzeń A i B:

przyjmując  $c \equiv 1$

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \Delta t' + \gamma \beta \Delta x' \\ \gamma \beta \Delta t' + \gamma \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta & 0 & 0 \\ \gamma \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix}$$

Transformacja odwrotna:  $\beta \Leftrightarrow -\beta$

## Konsekwencje

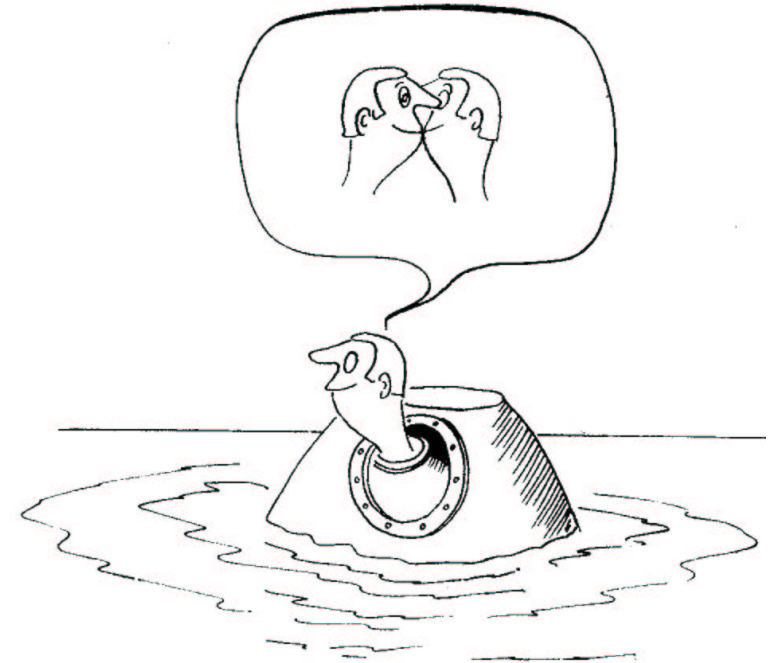
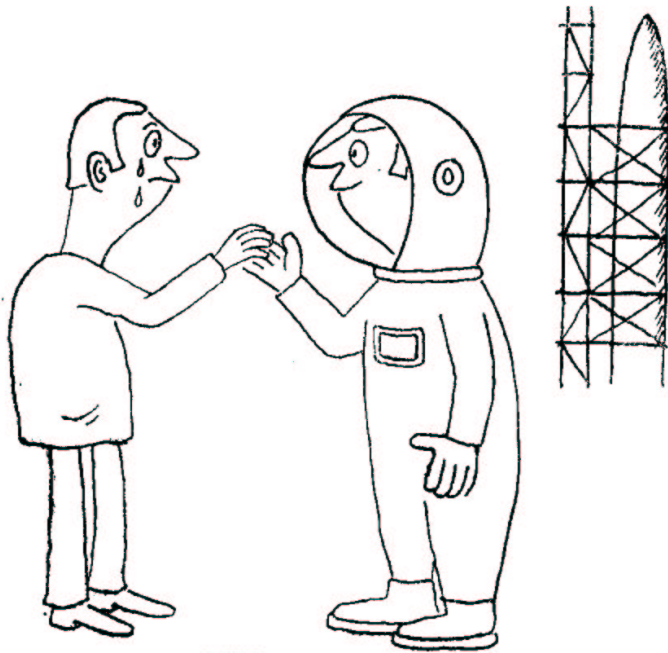
- dylatacja czasu  $\Delta x' \equiv 0 \Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t'$
- skrócenie Lorentza  $\Delta t \equiv 0 \Rightarrow \Delta x' = \gamma \Delta x \Rightarrow \Delta x = \Delta x' / \gamma$

# Paradoks bliźniąt

Dwaj bracia - obserwatorzy mierzą czas pomiędzy dwoma zdarzeniami:

wylotem rakiety

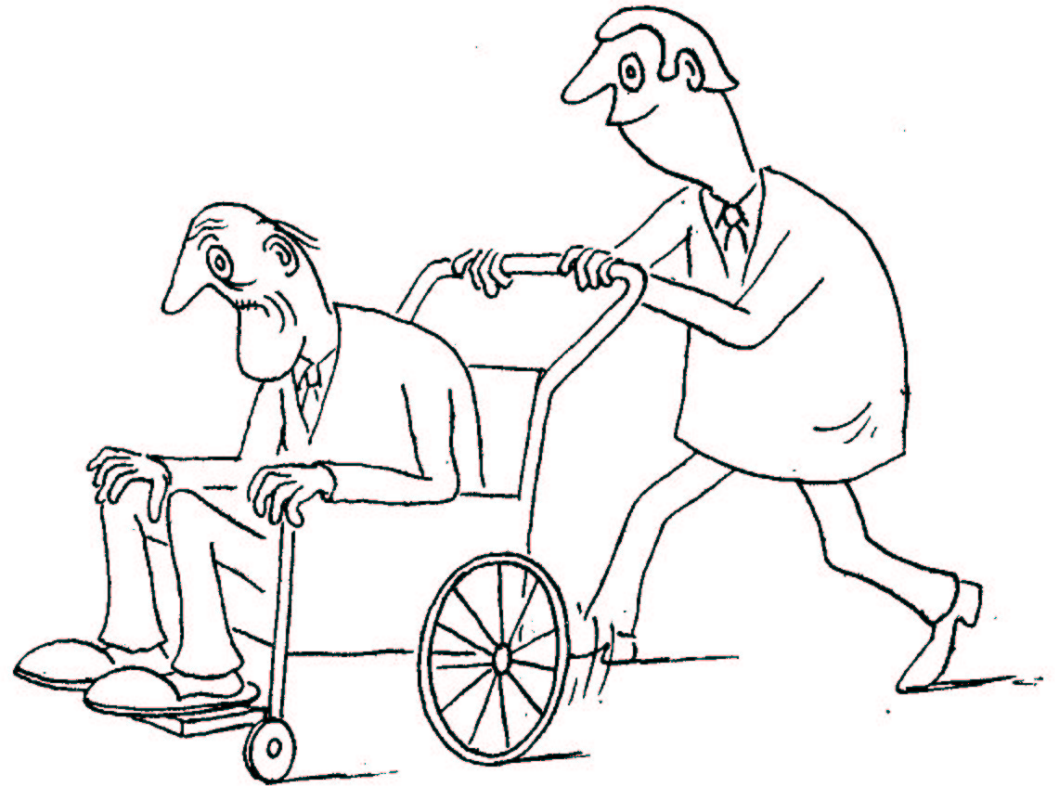
powrotem na Ziemię



Poruszają się względem siebie z prędkością porównywalną z prędkością światła  
⇒ każdy z nich stwierdzi, że jego brat powinien być **młodszy** (dylatacja czasu)

# Paradoks bliźniąt

Ale dla obu z nich oba zdarzenia zaszły  
też w tym samym miejscu  
⇒ powinni być w tym samym wieku !  
(z niezmienniczości interwału)



Jak rozstrzygnąć czy i który z braci będzie młodszy ?

## Paradoks bliźniąt

Przyjmijmy, że podróż odbywa się z prędkością  $v = 0.745 c$  ( $\gamma = 1.5$ )

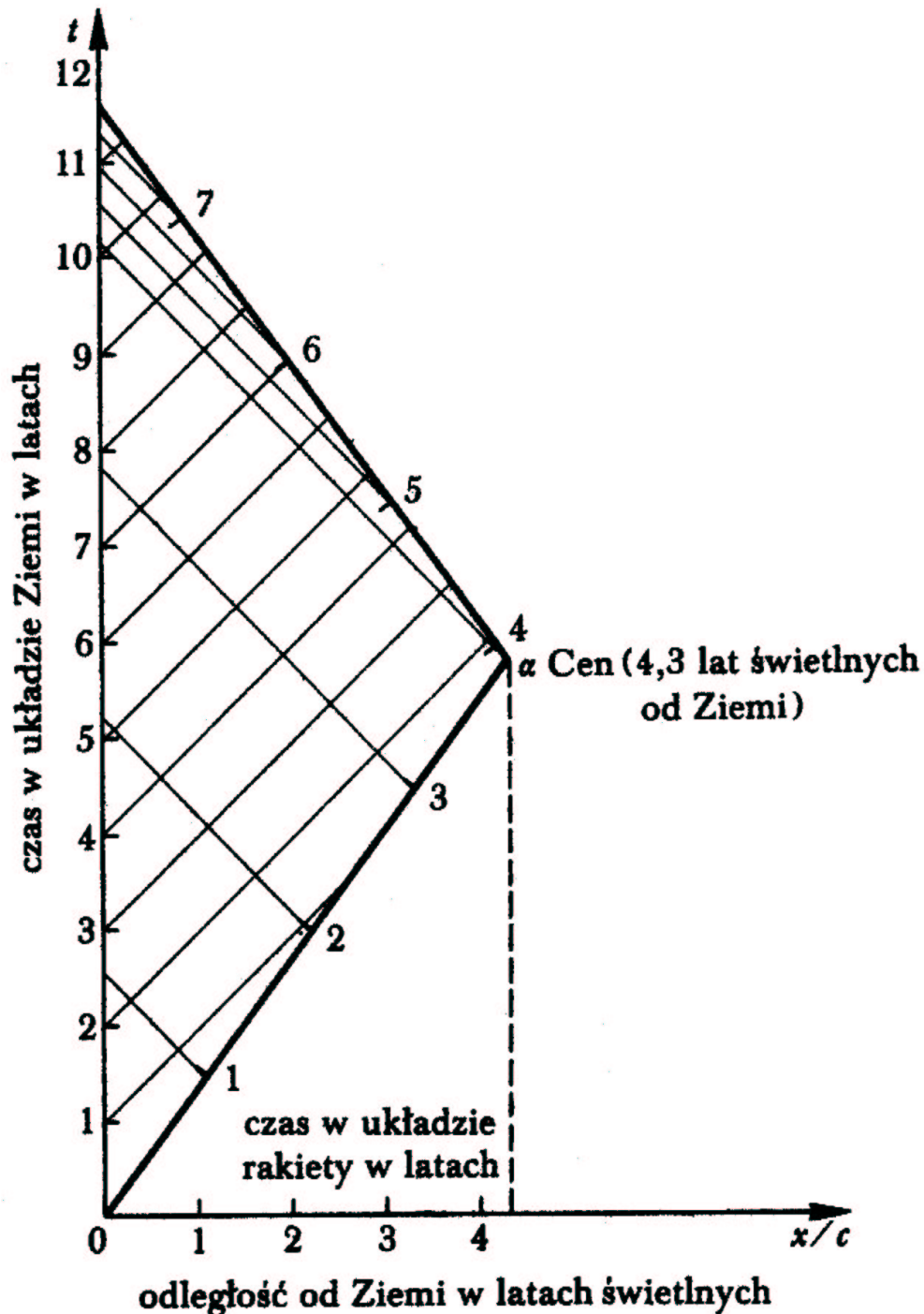
Według obserwatora na Ziemi podróż zajmie

$$\frac{2 \times 4.3}{0.745} \approx 11.5 \text{ lat}$$

Dzięki dylatacji czasu, mierzony przez kosmonautę czas podróży skróci się do:

$$\frac{11.5 \text{ lat}}{1.5} \approx 7.7 \text{ lat}$$

⇐ impulsy świetlne wysyłane przez obu braci co rok



## Paradoks bliźniąt

Dla kosmonauty odległość skróci się do  $\frac{4.3}{1.5} \approx 2.9$  lat świetlnych (skrócenie Lorentza)

Podróż będzie jego zdaniem trwała  $\frac{2 \times 2.9}{0.745} \approx 7.7$  lat (to samo powiedział jego brat)

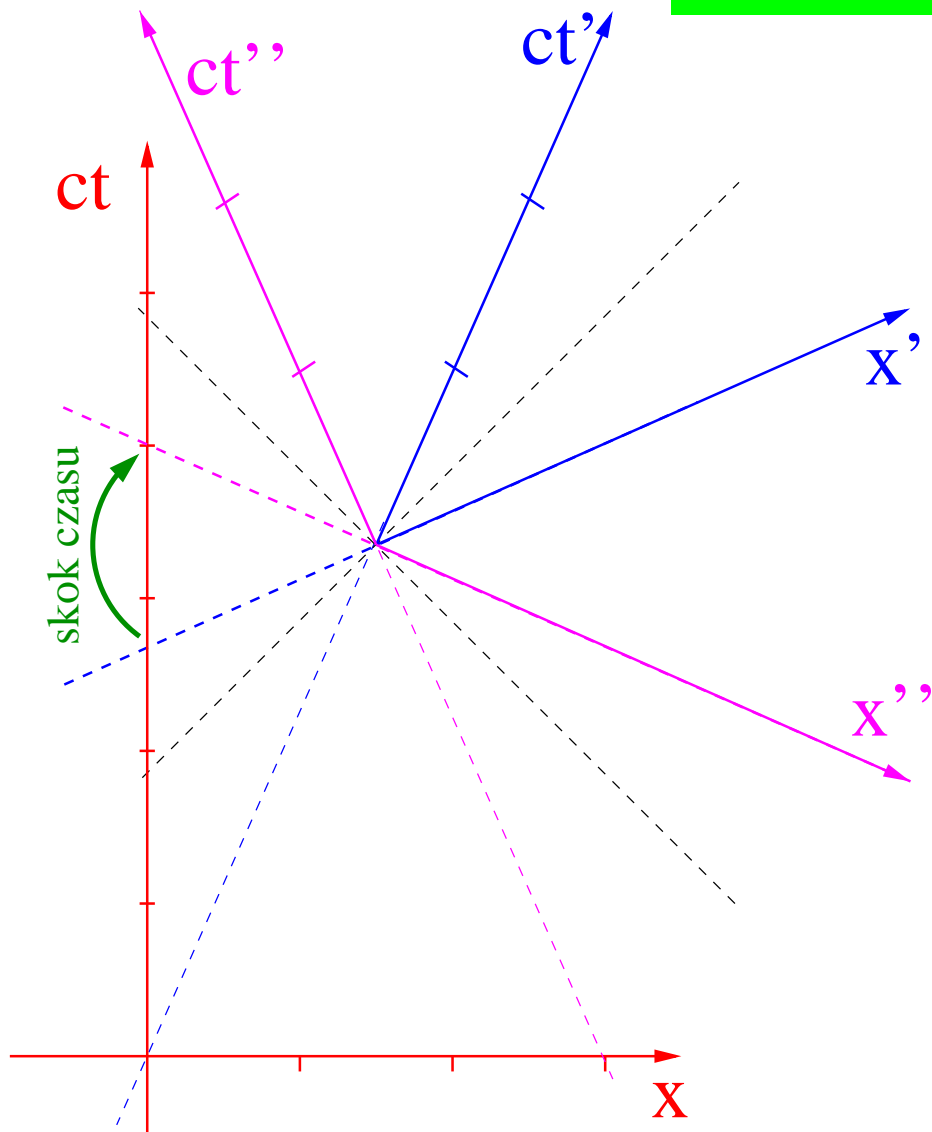
Ale dla kosmonauty bieg zegarów na Ziemi ulega spowolnieniu (dylatacja czasu)

W czasie jego lotu do układu  $\alpha$ -Centaura na Ziemi mija tylko  $\frac{0.5 \times 7.7 \text{ lat}}{1.5} \approx 2.6$  lat,  
tyle samo czasu mija na Ziemi w czasie jego podróży powrotnej.

Łącznie powinno minąć  $\frac{7.7 \text{ lat}}{1.5} \approx 5.1$  lat, ale brat na Ziemi stwierdzi, że minęło 11.5 lat

Gdzie znika ponad 6 lat !?

# Paradoks bliźniąt



Kosmonauta obserwuje wskazania zegara na Ziemi.

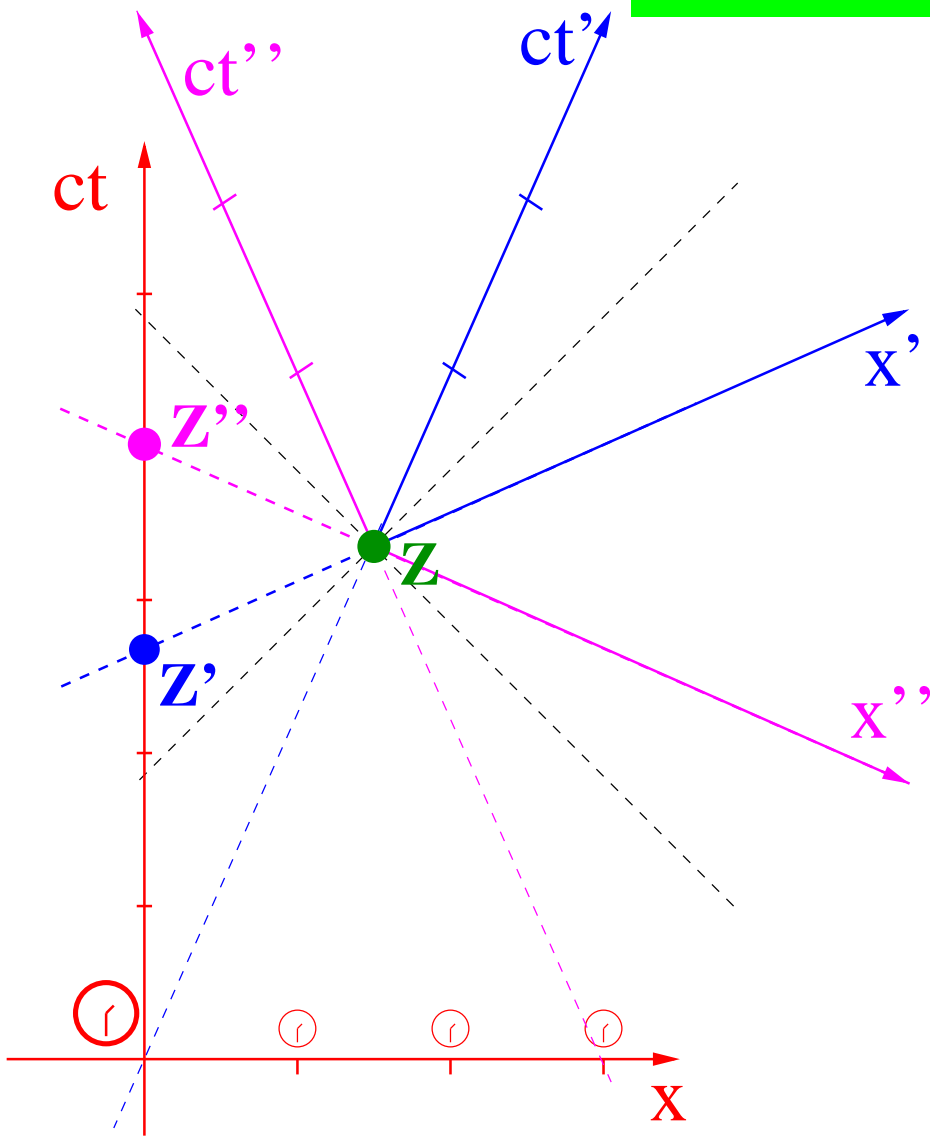
Na zegarze tym przybywa “skokowo” ponad 6 lat w momencie zmiany przez kosmonautę układu współrzędnych.

Zegar na Ziemi nie może być wprost porównywany z zegarem kosmonauty  
⇒ zawsze porównywany jest z najbliższym zegarem układu współporuszającego się.

⇒ Istotna jest synchronizacja zegarów

Synchronizacja zmienia się przy zmianie układu odniesienia.

# Paradoks bliźniąt



Kosmonauta obserwuje wskazania zegara na Ziemi porównując go zawsze z najbliższym zegarem jego układu.

W chwili startu ( $t = t' = 0$ ) jest to jego własny zegar **Z**.

Gdy dotrze do celu są to zegary **Z'** (przed) i **Z'''** (po zawróceniu).

Także obserwator na Ziemi może obserwować wskazania zegarów kosmonauty (**Z**, **Z'** i **Z'''**) porównując je ze swoją siatką zegarów.



# Paradoks bliźniąt

## Rakieta

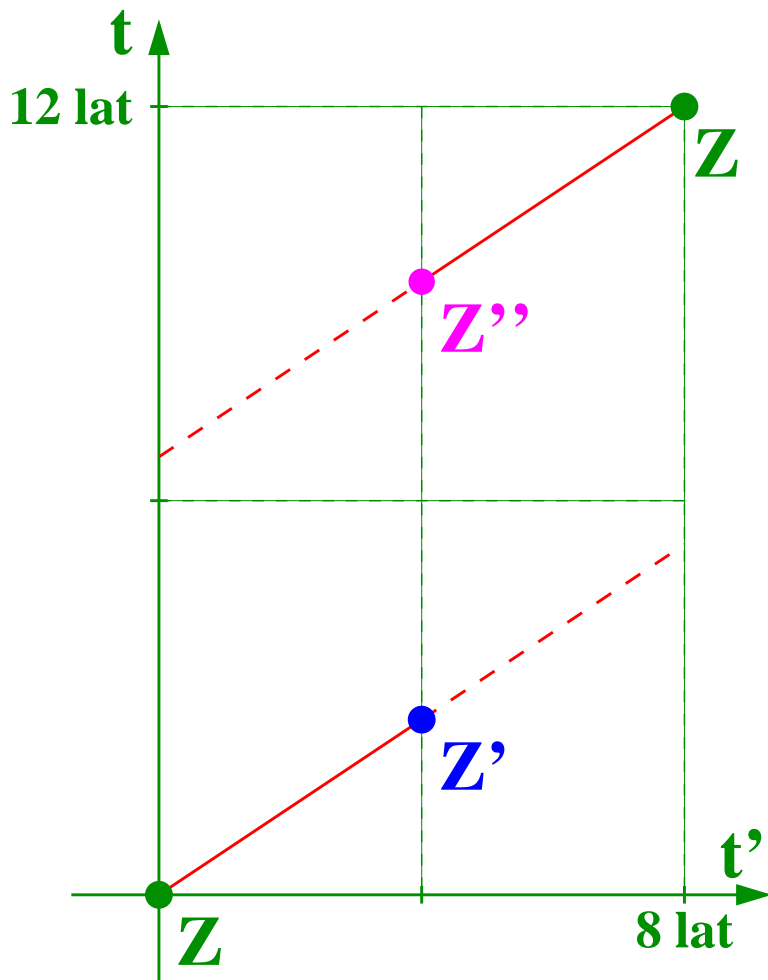
Dolatuując do celu, po  $t' \sim 4$  latach (według swojego zegara **Z**), kosmonauta stwierdza, że na Ziemi minęło  $t < 3$  lata.

Kosmonauta opiera się na wskazaniach zegara **Z'** zsynchronizowanego z **Z**.

Po zawróceniu informacja o wskazaniach zegara na Ziemi pochodzi od zegara **Z''**, też zsynchronizowanego z **Z** ale w nowym układzie odniesienia.

Według zegara **Z''** w chwili zawracania zegar na Ziemi wskazywał  $t > 9$  lat.

Czas na Ziemi według kosmonauty



# Paradoks bliźniąt

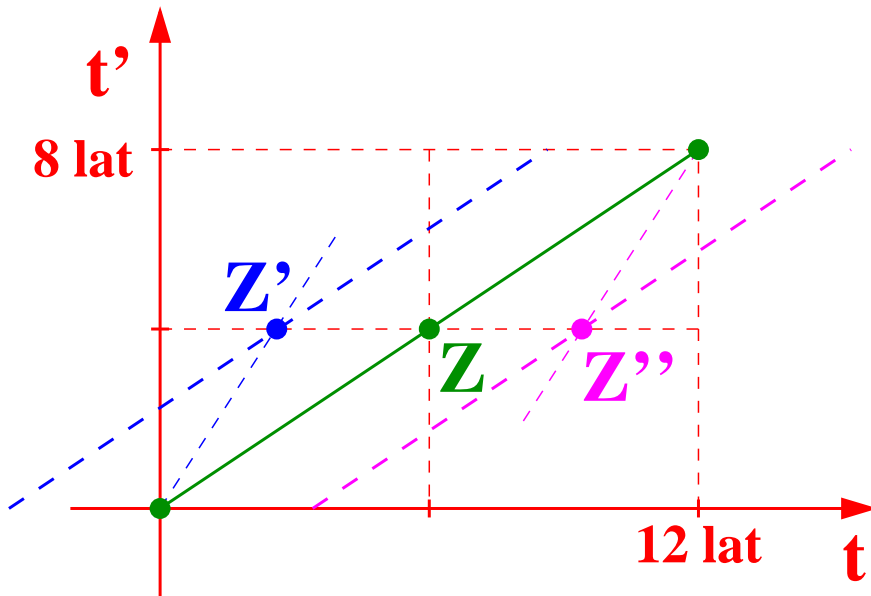
## Ziemia

Według obserwatora na Ziemi bieg zegara **Z** kosmonauty jest spowolniony na skutek **dylatacji czasu**.

Kosmonauta źle ocenił bieg czasu na Ziemi gdyż:

- najpierw użył zegara **Z'** który spieszył się względem **Z**
- potem użył zegara **Z''** który spóźniał się względem **Z**

Wskazania zegarów kosmonauty rejestrowane przez obserwatora na Ziemi



Według obserwatora na Ziemi, zawrót rakiety **Z**, oraz zdarzenia porównania czasu na Ziemi z przelatującymi zegarami **Z'** i **Z''** nie były równoczesne.

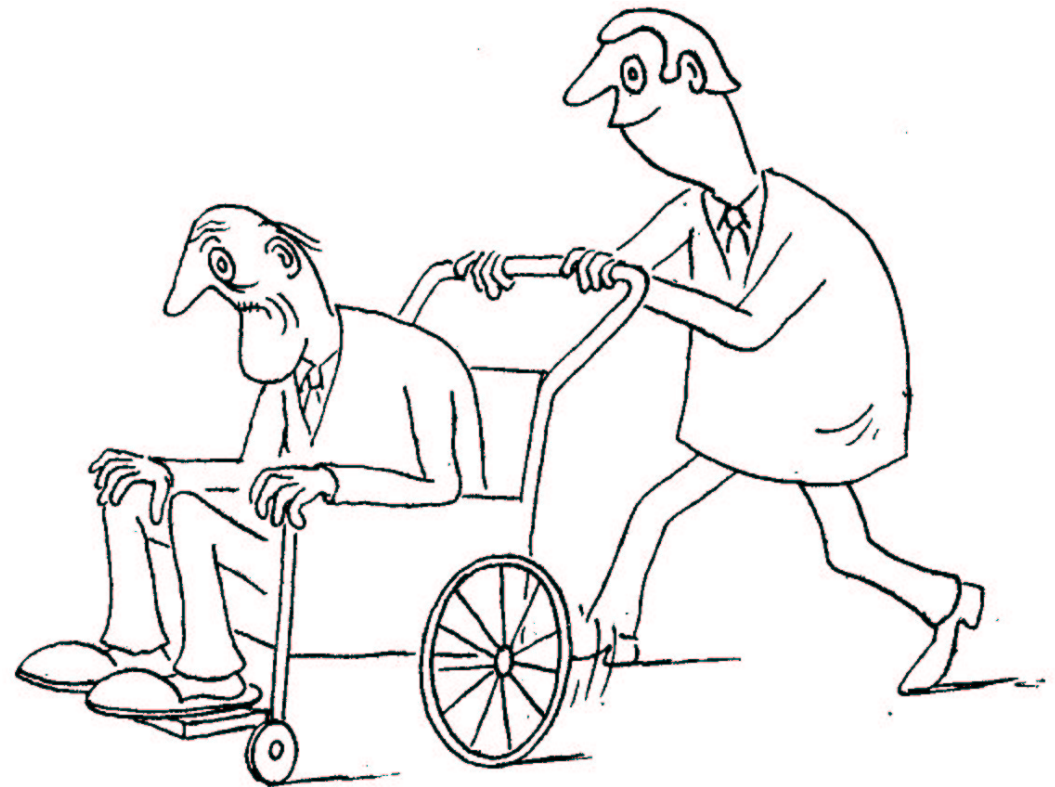
W chwili **zawracania** zegar **Z'** dawno minął Ziemię, a zegar **Z''** jeszcze do niej nie doleciał.

## Paradoks bliźniąt

Dokonany przez kosmonautę pomiar czasu jaki upłynął na Ziemi jest **nieprawidłowy**, ze względu na **zmianę układu** odniesienia.

Na ziemi minęło **11.5 lat**.

Obaj obserwatorzy zgadzają się, że dla kosmonauty minęło **7.7 lat**.



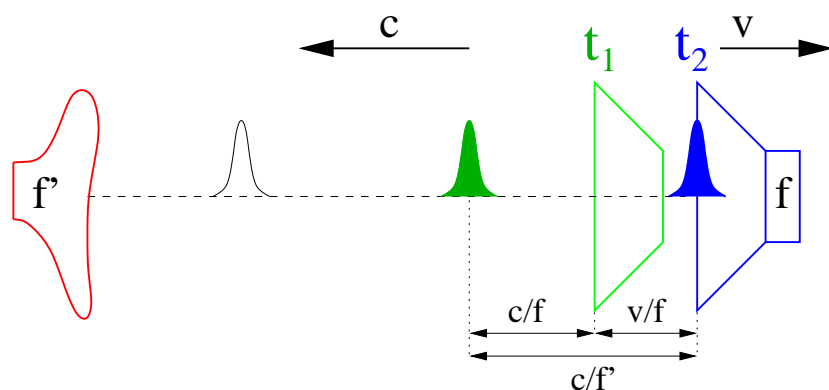
“Ziemianin”

kosmonauta

# Efekt Dopplera

Dwa przypadki “klasyczne”:

## Ruchome źródło

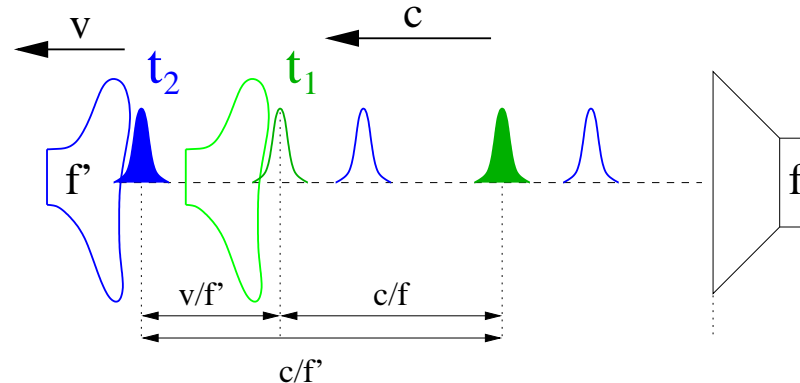


Częstość dźwięku i **długość fali** mierzona przez obserwatora nieruchomego względem ośrodka:

$$f' = \frac{f}{1 + \beta}$$

$$\lambda' = \lambda (1 + \beta)$$

## Ruchomy obserwator



Częstość i **długość fali** mierzona przez ruchomego obserwatora:

$$f' = f (1 - \beta)$$

$$\lambda' = \frac{\lambda}{1 - \beta}$$

Ale światło nie potrzebuje “ośrodka”. Powinien się liczyć tylko ruch względny !...

# Efekt Dopplera

Jeśli źródło i/lub obserwator poruszają się z dużymi prędkościami

⇒ należy uwzględnić dylatację czasu

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)}}$$

## Ruchome źródło

Poruszające się źródło drga z częstotliwością  $\gamma$  razy mniejszą:

$$f' = \frac{f/\gamma}{1 + \beta} = f \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

## Ruchomy obserwator

Dla poruszającego się obserwatora czas biegnie wolniej, mierzona częstotaść jest  $\gamma$  razy większa:

$$f' = \gamma f (1 - \beta) = f \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

⇒ Pełna symetria !

# Efekt Dopplera

## Ruch źródła

Wysłanie impulsu w układzie  $O'$ :

$$A : (T, 0, 0, 0)$$

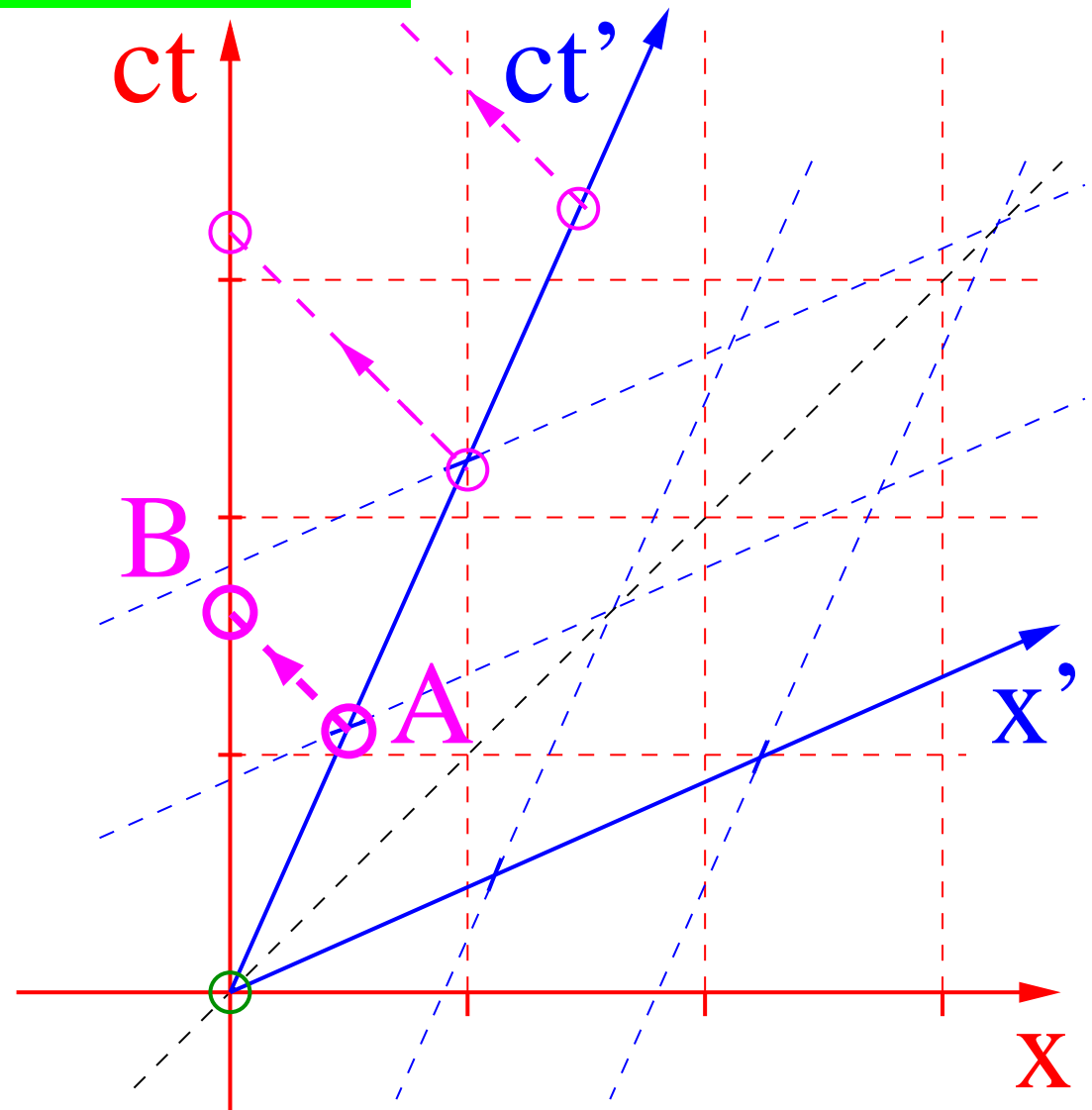
W układzie  $O$ : ( $c = 1$ )

$$A : (\gamma T, \beta\gamma T, 0, 0)$$

Na pokonanie odległości  $\beta\gamma T$  światło potrzebuje  $\beta\gamma T$  czasu  
 $\Rightarrow$  dotarcie impulsu światła do obserwatora  $O$ :

$$B : (\gamma T + \beta\gamma T, 0, 0, 0)$$

$$T' = \gamma(1 + \beta) T = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} T$$



# Efekt Dopplera

Wysłanie impulsu w układzie  $O$ :

$$A : (T, 0, 0, 0)$$

Dotarcie impulsu do obserwatora  $O'$ :

$$B : (T + \Delta T, \Delta T, 0, 0)$$

Prędkość  $O'$  względem  $O$ :

$$\beta = \frac{\Delta T}{T + \Delta T} \Rightarrow \Delta T = \frac{\beta}{1 - \beta} T$$

Współrzędne dotarcia impulsu w  $O$ :

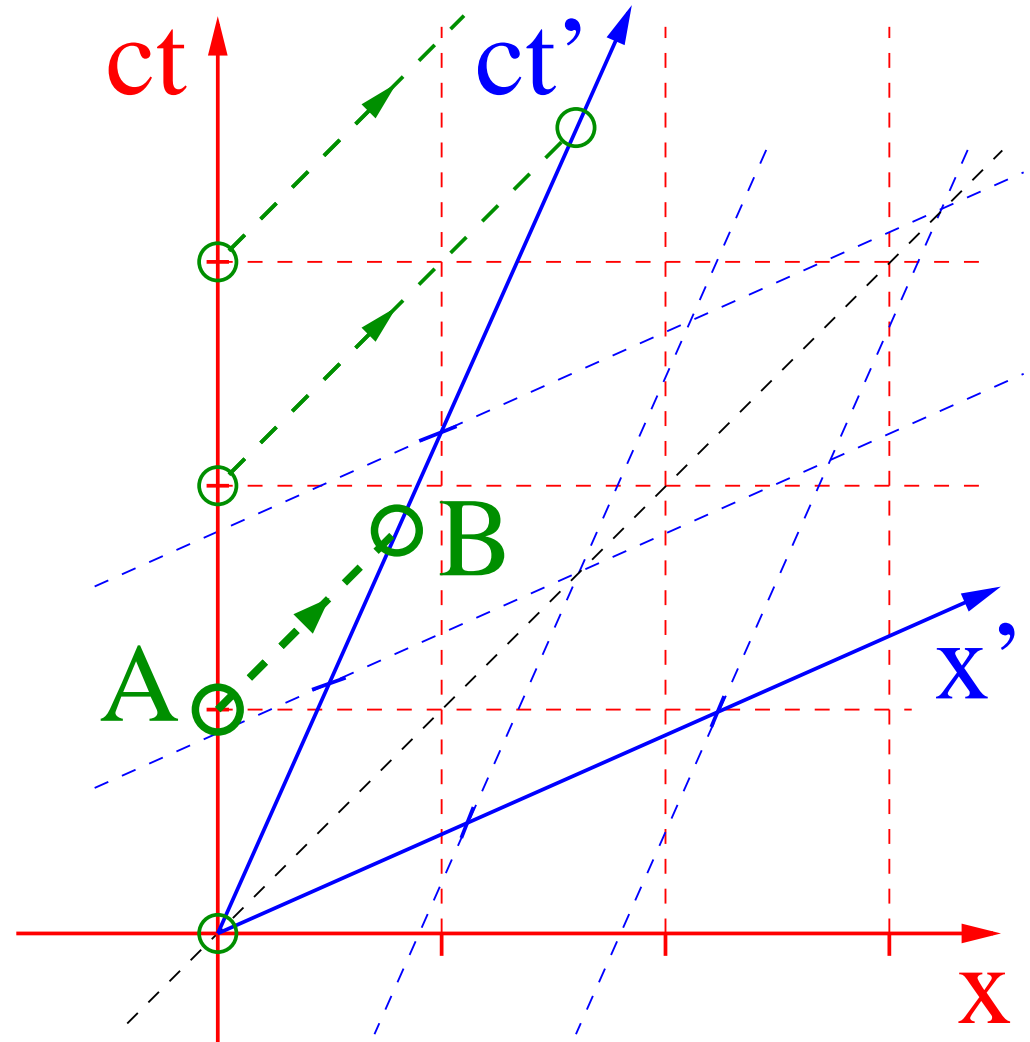
$$B : \left( \frac{T}{1 - \beta}, \frac{\beta T}{1 - \beta}, 0, 0 \right)$$

$\Rightarrow$  według  $O'$  (dylatacja czasu)

$$B : \left( \frac{T}{\gamma(1 - \beta)}, 0, 0, 0 \right)$$

$$\Rightarrow T' = \frac{T}{\gamma(1 - \beta)} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} T$$

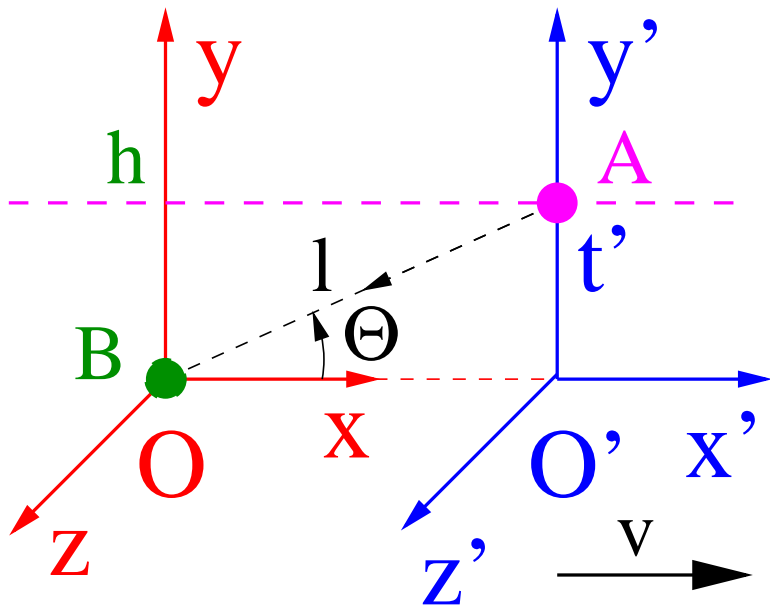
## Ruch obserwatora



# Efekt Dopplera

## Przypadek ogólny

Źródło światła przelatuje w odległości  $h$  od obserwatora:



$t$  - czas wysłania impulsu mierzony w układzie  $O'$ :

$$A : (t, 0, h, 0)$$

Współrzędne tego zdarzenia w układzie  $O$ :

$$A : (\gamma t, \gamma \beta t, h, 0)$$

$\Rightarrow$  czas dotarcia impulsu do obserwatora  $O$  (B):

$$t' = \gamma t + l = \gamma t + \sqrt{(\gamma \beta t)^2 + h^2}$$

Różnica  $dt'$  między czasami dotarcia dwóch impulsów wysłanych w odstępie czasu  $dt$

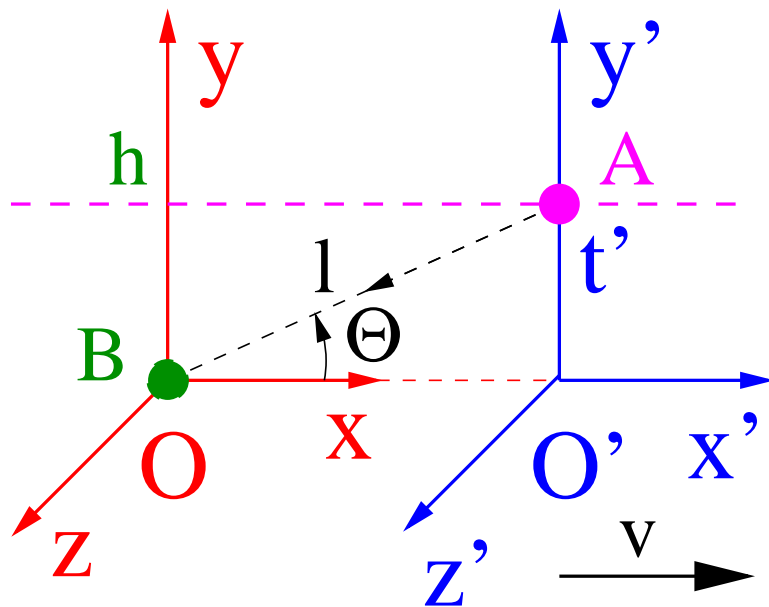
$\Rightarrow$  współczynnik przesunięcia dopplerowskiego:

$$\text{mierzona emitowana } \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{dt'}{dt} = \gamma + \frac{\gamma^2 \beta^2 t}{\sqrt{(\gamma \beta t)^2 + h^2}} = \gamma \left( 1 + \beta \frac{x}{l} \right) = \gamma (1 + \beta \cos \Theta)$$



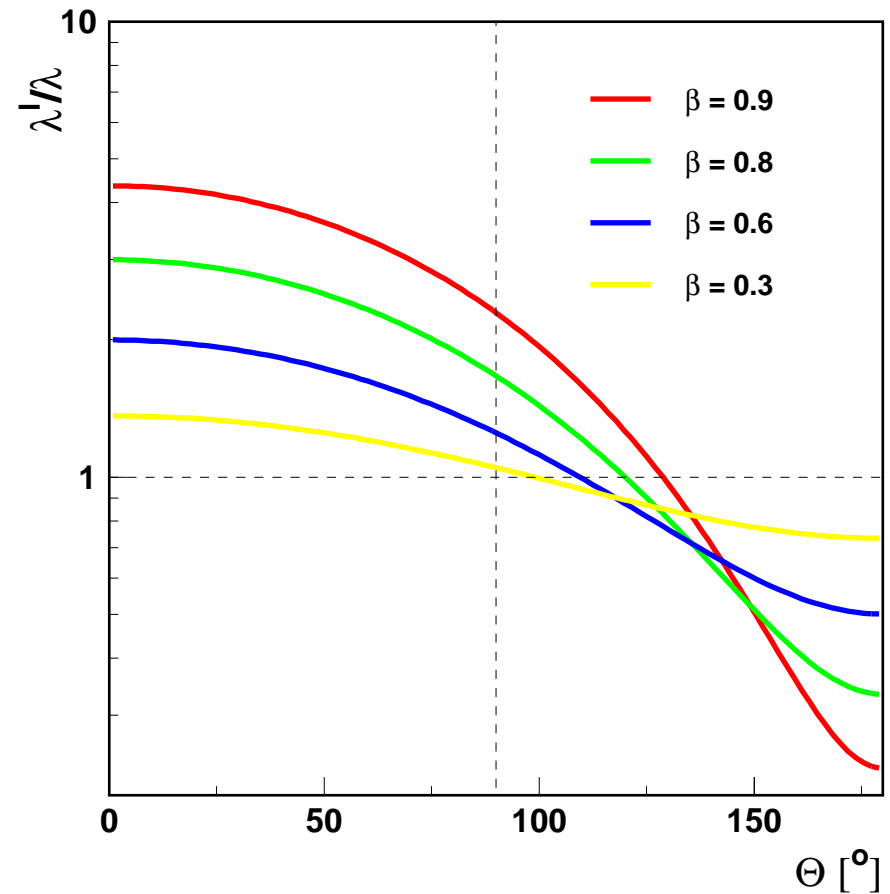
# Efekt Dopplera

## Przypadek ogólny



Przesunięcie długości fali:

mierzona emitowana  $\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{T'}{T} = \gamma(1 + \beta \cos \Theta)$



Zmiana częstości także dla  $\Theta = 90^\circ$  !!!

Klasycznie nie ma zmiany częstości...

# Efekt Dopplera

W warunkach ziemskich efekt Dopplera dla światła jest istotny tylko w wyjątkowych przypadkach.

Przesunięcie ku czerwieni w widmach odległych galaktyk zaobserwował po raz pierwszy **Hubble w 1929 r.**

Zauważył on, że prędkość 'ucieczki' rośnie z odległością (**prawo Hubbla**):

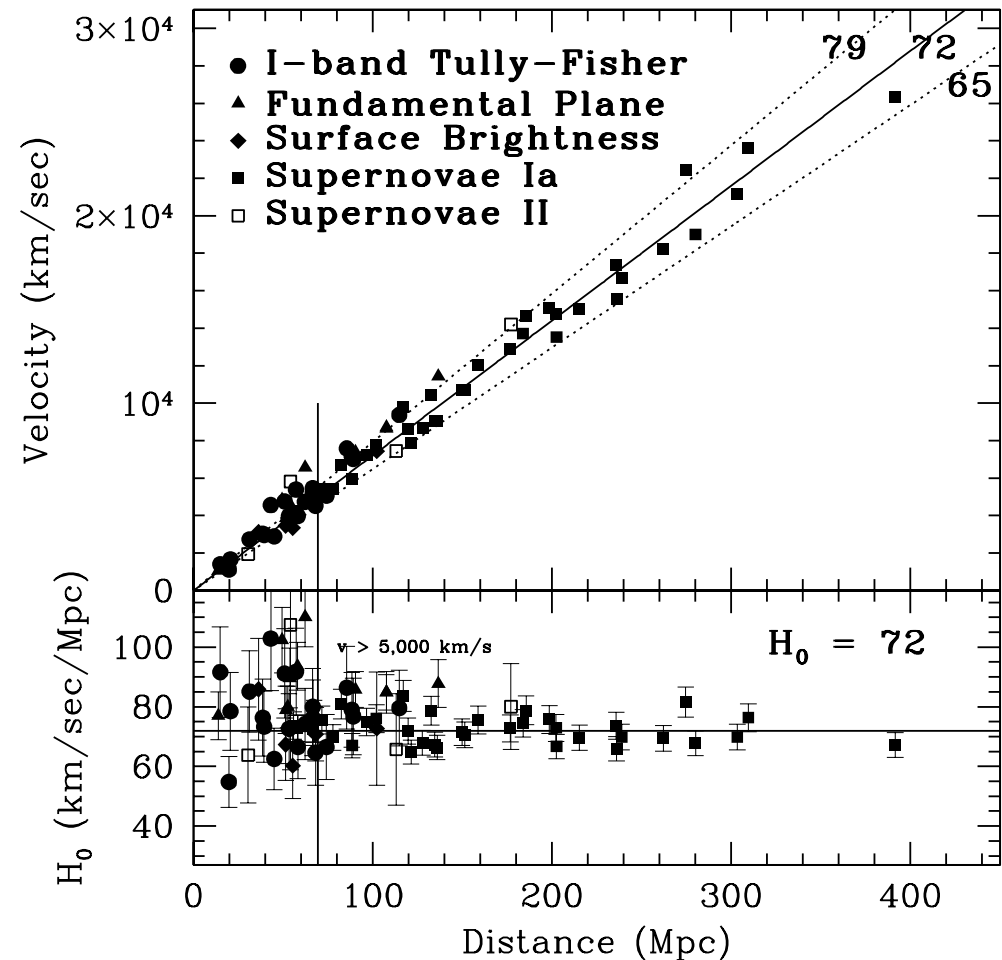
$$v = H r$$

$r$  - odległość od Ziemi,  $H$  - stała Hubbla

⇒ wiek Wszechświata:

$$T = 13.7 \pm 0.2 \text{ GYr}$$

## Obecne pomiary



$$H = 71_{-3}^{+4} \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})$$