Prawa ruchu: dynamika

Fizyka I (B+C)

Wykład IX:

- Więzy
- Rozwiązywanie równań ruchu
  - $\Rightarrow$ oscylator harminiczny, wahadło
  - $\Rightarrow$ ruch w jednorodnym polu elektrycznym i magnetycznym
  - $\Rightarrow$ spektroskop
- III zasada dynamiki
- Siły sprężyste

Równania ruchu

Przypomnienie

Podstawowym zagadnieniem dynamiki jest rozwiązywanie równań ruchu, czyli określanie ruchu ciała ze znajomości działających na nie sił.

Siła zależeć od położenia i prędkości cząstki oraz czasu: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$

$\Rightarrow$ równanie ruchu:

$$\boxed{m \, \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \; = \; \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)}$$

wektorowe $\Rightarrow$ układ trzech równań różniczkowych drugiego rzędu

Ogólne rozwiązanie ma sześć stałych całkowania: $\vec{r} = \vec{r}\,(t, C_1, C_2, \ldots, C_6)$

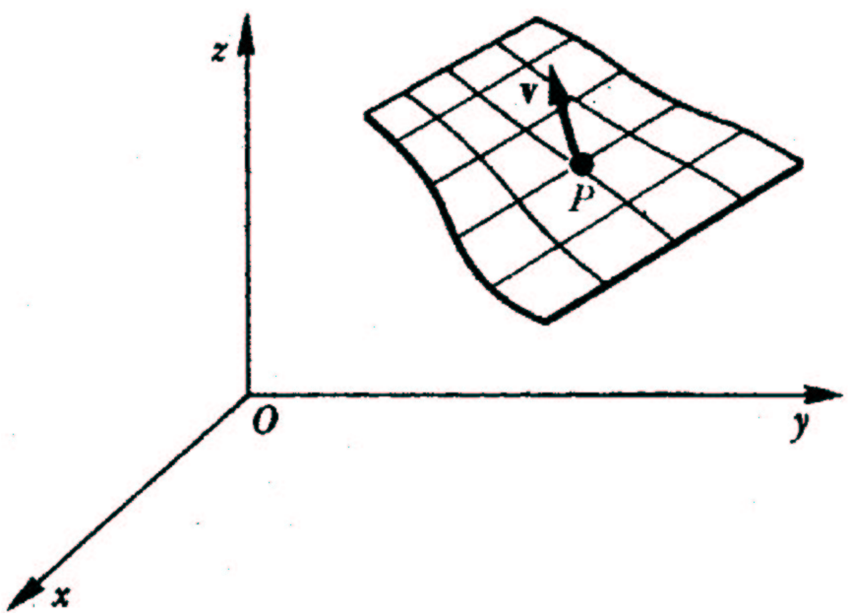
Jeśli znamy równania ruchu oraz dokładnie poznamy warunki początkowe ($\vec{r}_0 = \vec{r}\,(t_0)$ i $\vec{v}_0 = \vec{v}\,(t_0)$) możemy jednoznacznie określić stan układu w przeszłości i w przyszłości.

Równania ruchu

Do tej pory rozważaliśmy ruch ciała, które może się przemieszczać bez ograniczeń w całej trójwymiarowej przestrzeni - trzy stopnie swobody: f=3.

W każdej chwili stan ciała opisuje sześć parametrów (dwa wektory: $\vec{r}$ i $\vec{v}$)

Więzy



W wielu przypadkach ruch ciała jest jednak ograniczony $\Rightarrow$ cząstka nieswobodna

$\Leftarrow$ powierzchnia więzów

Ogólny warunek opisujący powierzchnie:

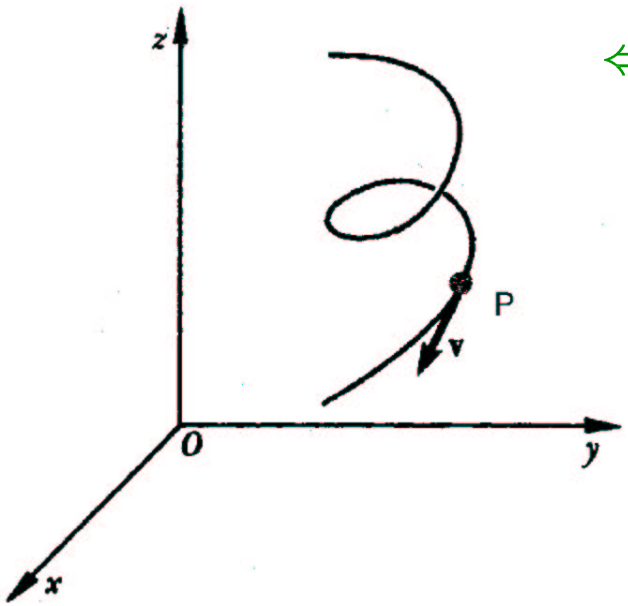
$$h(x, y, z, t) \;=\; 0$$

$\Rightarrow$ dwa stopnie swobody f=2

cztery parametry początkowe

Równania ruchu

Więzy



$\Leftarrow$ krzywa więzów

Krzywą w przestrzeni możemy opisać porzez dwa warunki:

$$h_1(x, y, z, t) = 0$$
$$h_2(x, y, z, t) = 0$$

$\Rightarrow$ jeden stopień swobody f=1,
dwa parametry początkowe

Do równania ruchu musimy wprowadzić dodatkową siłę reakcji więzów

$$\boxed{m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R}$$

gdzie: $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ - siły zewnętrzne, $\vec{F}_R$ - reakcja więzów

Rówanania ruchu

Więzy

Przy braku oporów ruchu (więzy idealne) siła reakcji więzów jest zawsze prostopadła do powierzchni lub krzywej więzów.

Więzy mogą być stacjonarne (*skleronomiczne*), niezależne od czasu:

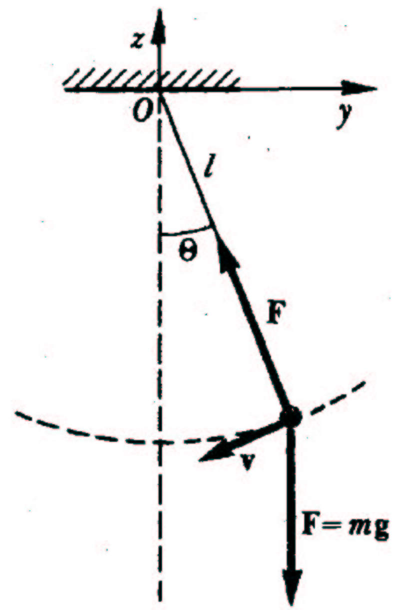
$$h(x, y, z) \;=\; 0$$

lub zależne od czasu (*reonomiczne*):

$$h(x, y, z, t) \;=\; 0$$

Przykład

Wahadło jednowymiarowe



Równania więzów:

$$l^2 - x^2 - y^2 - z^2 \;=\; 0 \text{ - sfera}$$
$$x \;=\; 0 \text{ - płaszczyzna}$$

Rówanania ruchu

Siła sprężysta: $\vec{F} = -k\,\vec{r}$

Siła centralna - działająca zawsze w kierunku środka układu (zawsze możemy tak wybrać)

Przy braku więzów równanie ruchu sprowadza się do postaci:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\,\vec{r} \quad \text{gdzie:} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\Rightarrow$ oscylator harmoniczny. Ogólne rozwiązanie równań ruchu:

$$\vec{r}(t) \;=\; \vec{A}\cdot\cos\omega t \;+\; \vec{B}\cdot\sin\omega t$$

Wartości $\vec{A}$ i $\vec{B}$ możemy wyznaczyć z warunków początkowych:

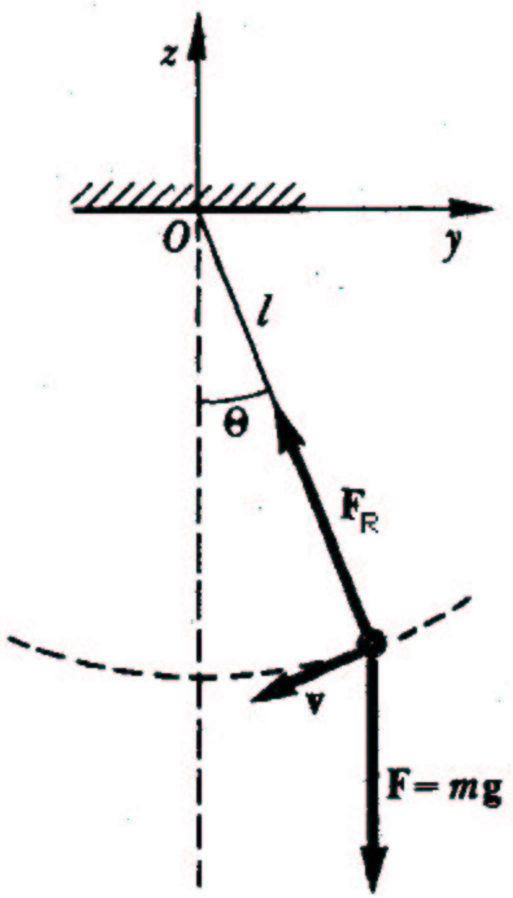
$$\vec{r}_0 = \vec{r}(0) = \vec{A} \qquad\qquad \vec{v}_0 = \vec{v}(0) = \omega\vec{B}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(t) \;=\; \vec{r}_0\cdot\cos\omega t \;+\; \frac{\vec{v}_0}{\omega}\cdot\sin\omega t$$

Ruch jest płaski, odbywa się w płaszczyźnie wyznaczonej przez $\vec{r}_0$ i $\vec{v}_0$.
Torem ruchu w ogólnym przypadku jest elipsa.

Rówanania ruchu

Wahadło



Warunki narzucone przez więzy najłatwiej uwzględnić opisując położenie kulki przez kąt Θ:

$$y = l \sin\Theta \qquad z = -l \cos\Theta$$

O sile reakcji $F_R(t)$ wiemy jedynie tyle, że działa wzdłuż nitki.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{F_R}{m}\sin\Theta \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -g + \frac{F_R}{m}\cos\Theta$$

$\Rightarrow$ przyspieszenie styczne nie zależy od F_R:

$$a_\Theta \equiv \cos\Theta\,\frac{d^2y}{dt^2} + \sin\Theta\,\frac{d^2z}{dt^2} = -g\cdot\sin\Theta$$

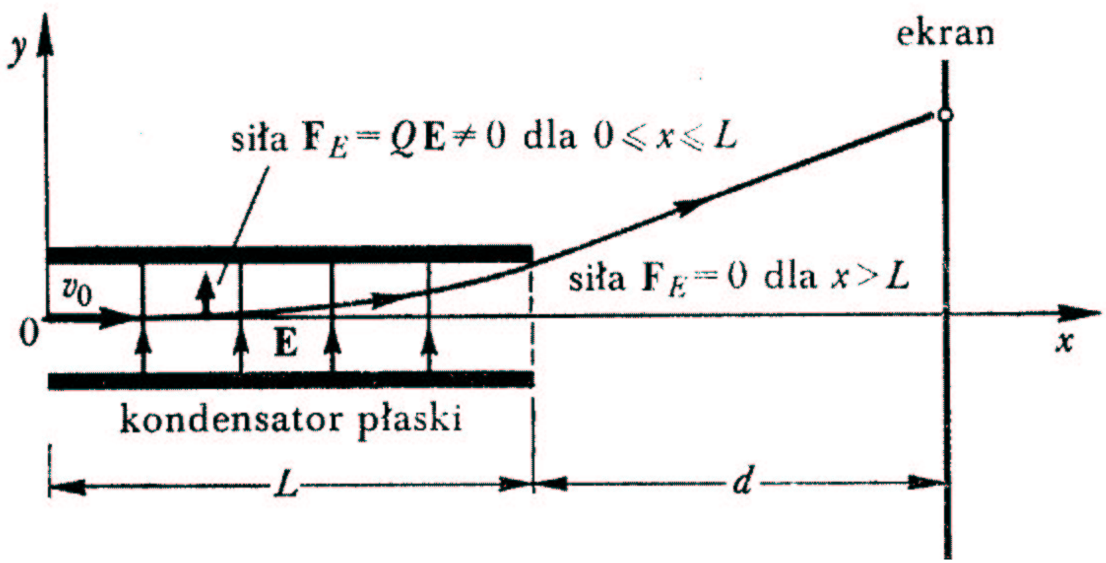
W przybliżeniu małych kątów ($\sin\theta \approx \theta$) otrzymujemy:

$$l\,\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -g\cdot\Theta$$

$\Rightarrow$ oscylator harmoniczny częstość $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, okres $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Rówanania ruchu

Pole elektryczne



Stałe pole elektryczne $\vec{E} = (0, E, 0)$

W pole wlatuje z prędkością $\vec{v_0} = (v_0, 0, 0)$

cząstka o masie m i ładunku Q

$$\vec{F}_E = Q\,\vec{E}$$

Równania ruchu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Q\,E$$

Całkowanie + warunki początkowe

$$\Rightarrow \quad x(t) = v_0 \cdot t$$

$$y(t) = \frac{Q\,E}{2m} \cdot t^2$$

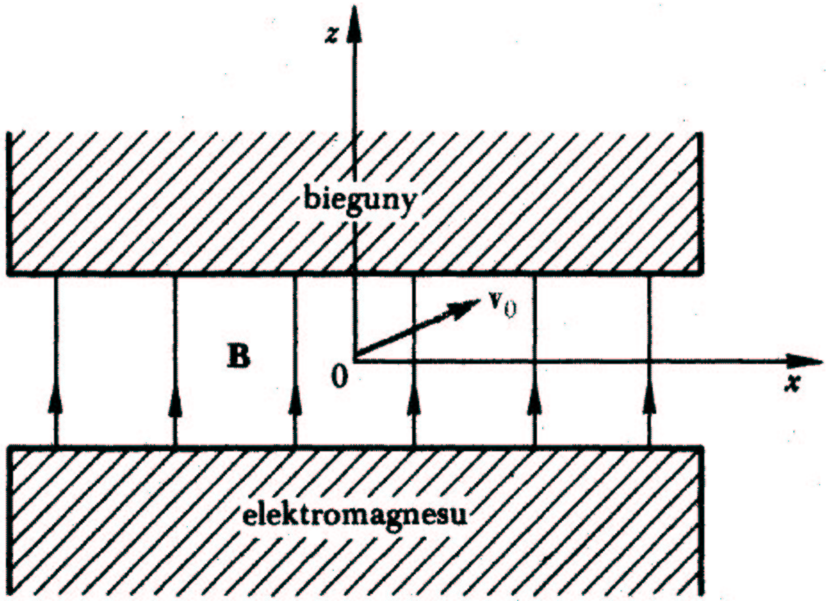
$\Rightarrow$ równanie toru: $y = \frac{Q\,E}{2mv_0^2} \cdot x^2$

Kąt odchylenia:

$$\tan\theta = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L} = \frac{Q\,E\,L}{m\,v_0^2}$$

Rówanania ruchu

Pole magnetyczne



Stałe pole magnetyczne $\vec{B} = (0, 0, B)$

W pole wlatuje z prędkością $\vec{v_0} = (0, v_0, 0)$
cząstka o masie m i ładunku Q

$$\vec{F}_B = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

siła Lorenza

Z definicji iloczynu wektorowego

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = Q \cdot \begin{pmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

Układ dwóch równań:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = Q\, B \frac{dy}{dt}$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -Q\, B \frac{dx}{dt}$$

Całkując pierwsze równanie

$$m \frac{dx}{dt} = Q\, B\, (y - y_0)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\frac{Q\, B}{m}\right)^2 (y - y_0)$$

Rówanania ruchu

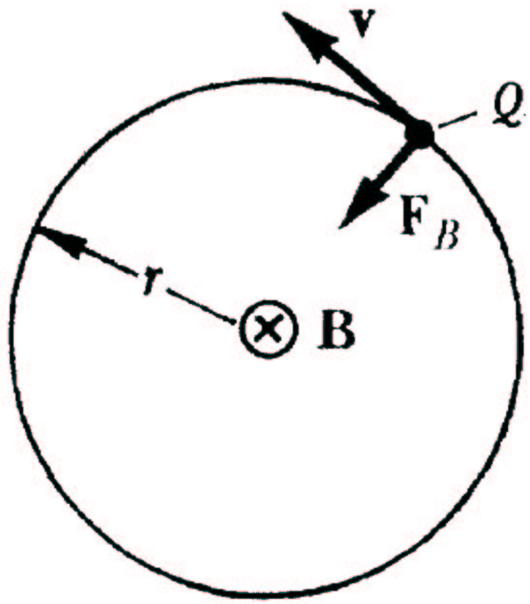
Pole magnetyczne

Otrzymujemy równania ruchu:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 (y - y_0) \quad \text{oscylator}$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega (y - y_0) \qquad \omega = \frac{Q\,B}{m}$$

$\Rightarrow$ ruch po okręgu ω - częstość cyklotronowa



Rozwiązanie:

$$x = r \cdot \sin \omega t$$
$$y = r \cdot (\cos \omega t - 1)$$

Promień cyklotronowy:

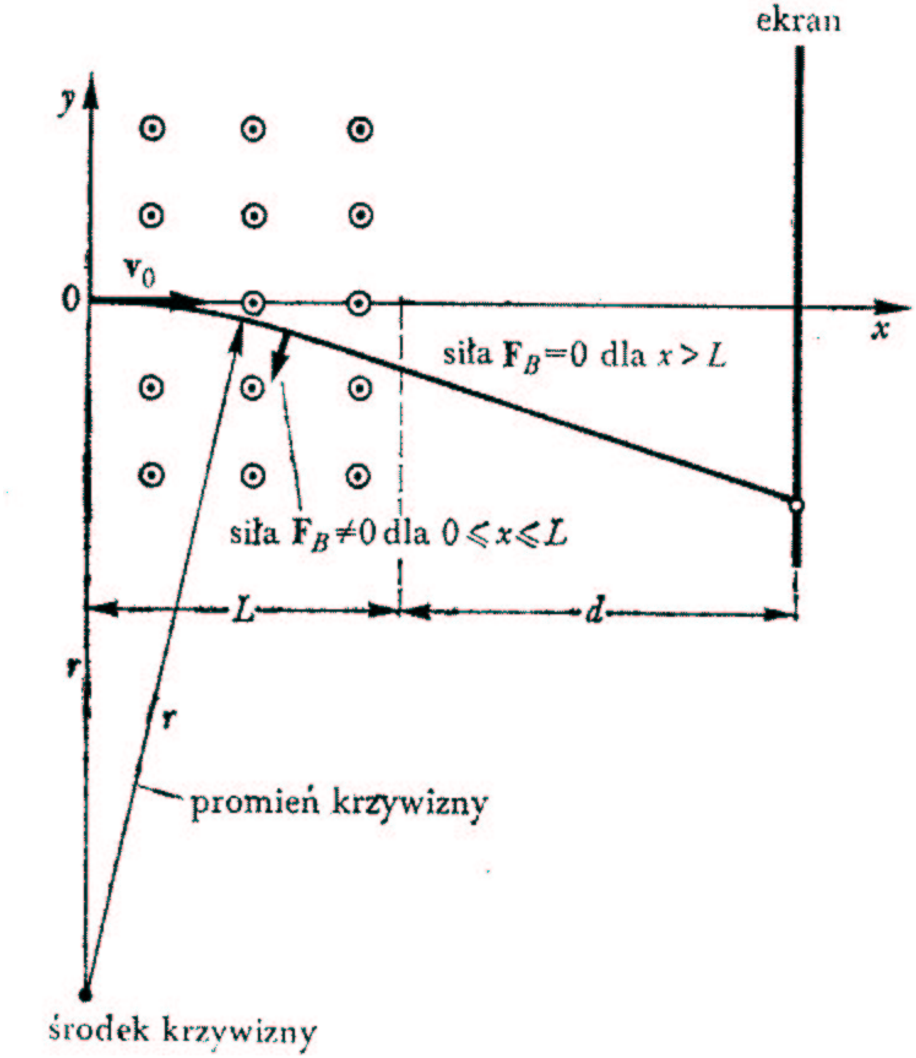
$$r = \frac{m\,v_0}{Q\,B}$$

Ruch w polu magnetycznym jest jednostajny: $v = const$

$$r = \frac{m\,v}{Q\,B} = \frac{p}{Q\,B}$$

Rówanania ruchu

Pole magnetyczne



Odchylenie cząstki przelatującej przez wąski obszar jednorodnego pola zakładamy $\omega t \ll 1$:

$$x \approx r \cdot \omega t$$

$$y \approx r \cdot \left[\left(1 - \frac{(\omega t)^2}{2} \right) - 1 \right]$$

$$= - \frac{x^2}{2\,r}$$

Kąt odchylenia:

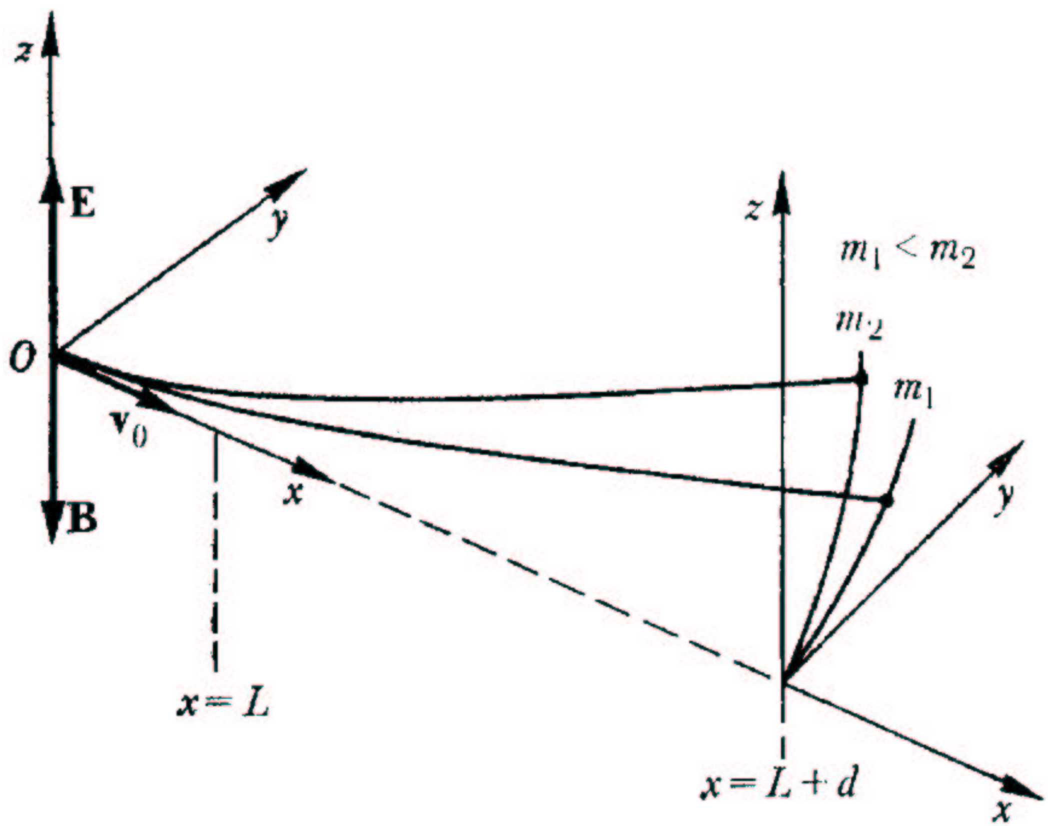
$$\tan\theta = \left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} = \frac{L}{r} = \frac{Q\,B\,L}{m\,v_0}$$

Rówanania ruchu

Spektroskop Thomsona (1913)

Cząstki przelatują przez obszar jednorodnych pól $\vec{E}$ i $\vec{B}$

$$\vec{E} \;\upharpoonleft\!\downharpoonright\; \vec{B}$$



Pozycja cząstki na ekranie $\quad d \gg L$

$$y_e \approx d \cdot \tan\theta_B = \frac{Q\,B\,L\,d}{m\,v_0}$$

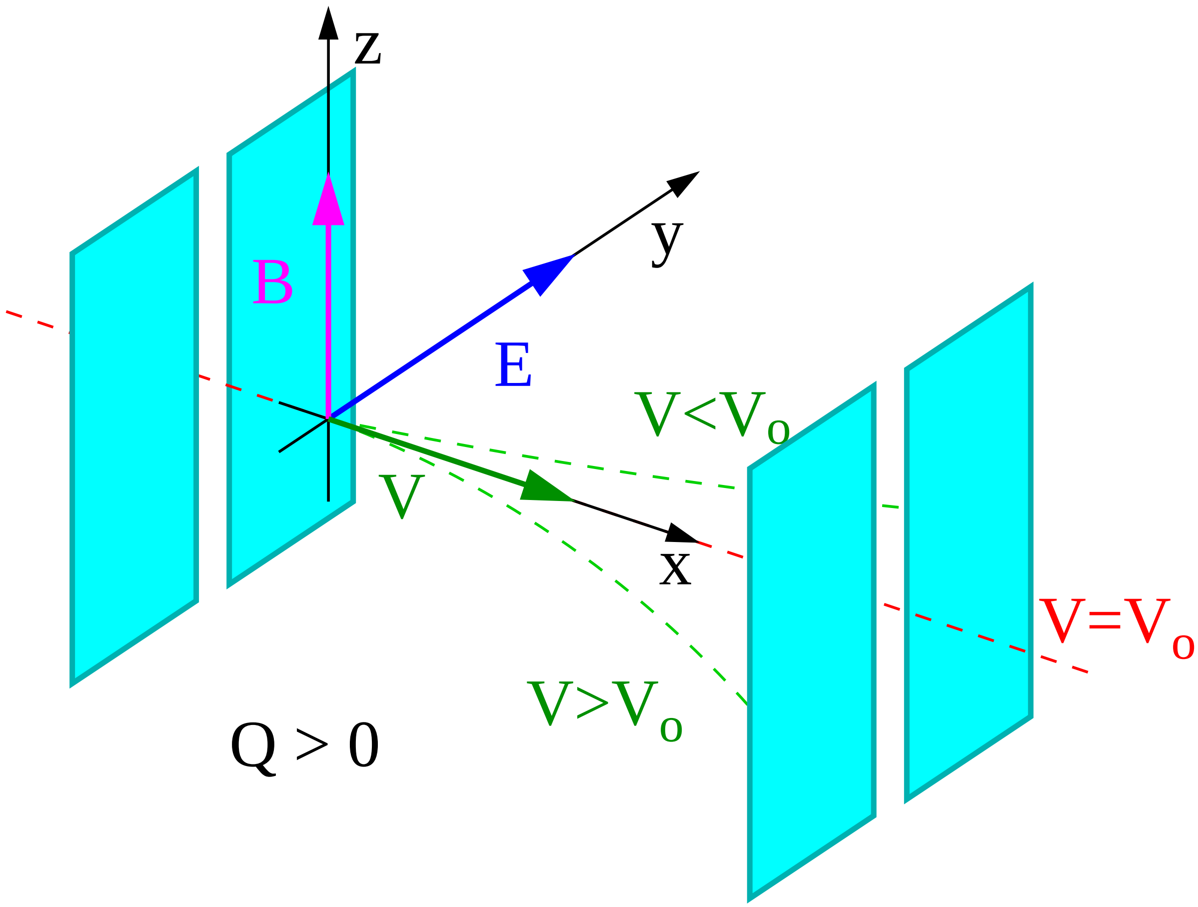
$$z_e \approx d \cdot \tan\theta_E = \frac{Q\,E\,L\,d}{m\,v_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad z_e = \frac{m}{Q} \cdot \frac{E}{B^2\,L\,d} \cdot y_e^2$$

Cząstki o róznych v_0 układają się na parabolach odpowiadających ich $\frac{m}{Q}$
$\Rightarrow$ separacja izotopów o różnych masach - **spektroskopia masowa**

Rówanania ruchu

Selektor prędkości



Cząstka w skrzyżowanych jednorodnych polach $\vec{E} \perp \vec{B}$

$$\begin{aligned} \vec{F}_E &= Q \cdot \vec{E} \\ \vec{F}_B &= Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \end{aligned}$$

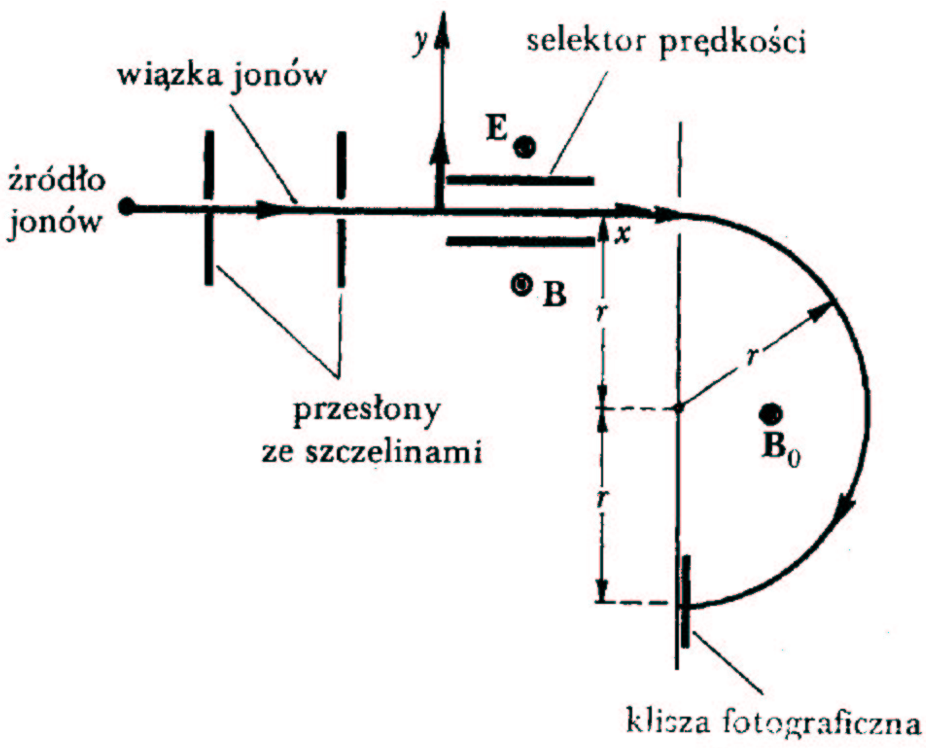
Dla prędkości $V_0 = \frac{E}{B}$ wypadkowa sił $\vec{F}_E + \vec{F}_B = 0$

$\Rightarrow$ tor prostoliniowy

$\Rightarrow$ metoda selekcji cząstek o ustalonej prędkości niezależnie od ich Q i m

Rówanania ruchu

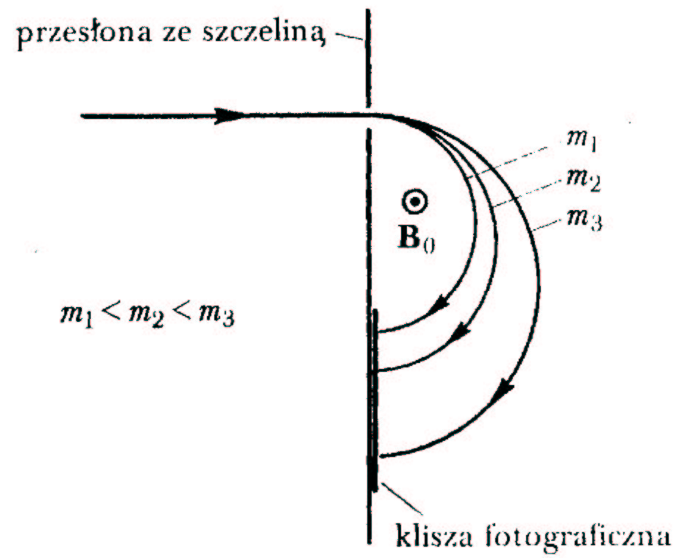
Spektrometr Bainbridge'a



Mierzymy promień cyklotronowy $r = \frac{m\, v_0}{Q\, B}$

dla cząstek o ustalonej prędkości $v_0 = \frac{E}{B}$

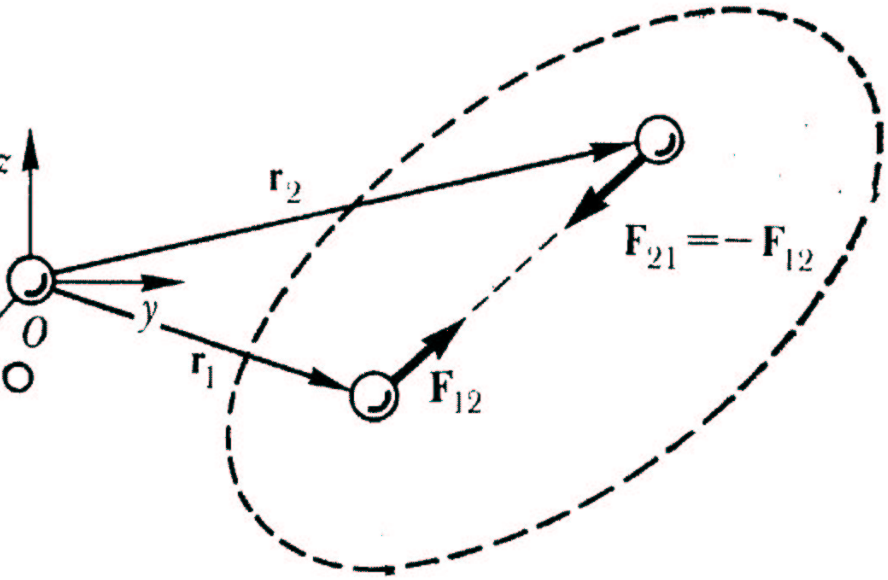
$\Rightarrow$ pomiar $\frac{m}{Q}$



Cząstki o różnych masach zaczernią kliszę w różnych odległościach od szczeliny

III zasada dynamiki

Zasada akcji i reakcji



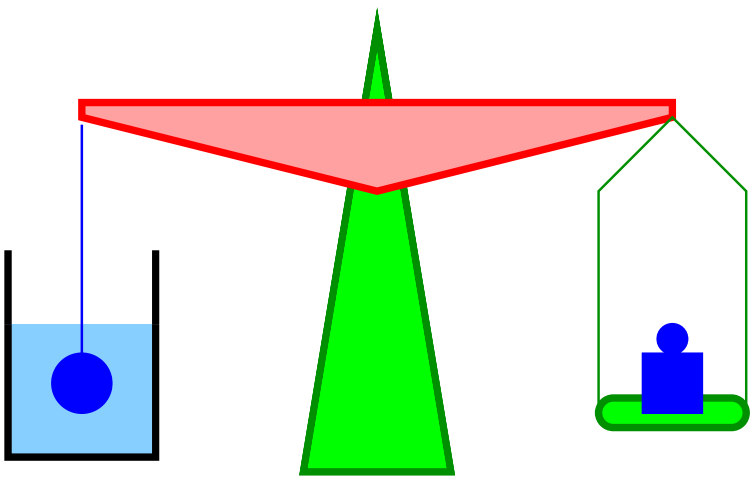
“Każdemu działaniu towarzyszy równe i przeciwnie skierowane przeciwdziałanie.

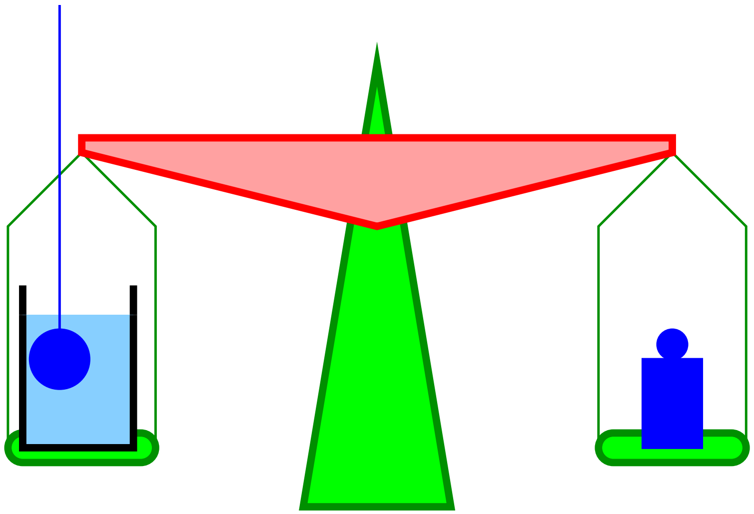
Wzajemne oddziaływania dwóch ciał są zawsze równe sobie i skierowane przeciwnie.”

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

III zasada dynamiki

Siła wyporu





Ciało zanurzone w cieczy traci na wadze...

⇒ Ciecz działa na ciało siłą wyporu

Ale ciecz w której ciało zanurzamy "przybiera" na wadze...

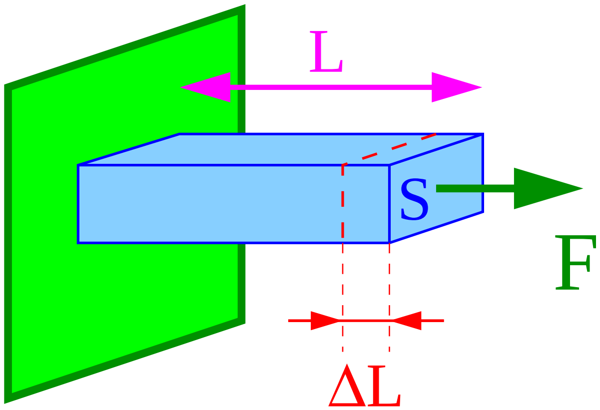
⇒ ciało działa na ciecz...

Łączny ciężar cieczy i ciała musi pozostać niezmieniony...

Siła sprężysta

Prawo Hooke'a

Opisuje zależność siły sprężystej od odkształcenia ciała:



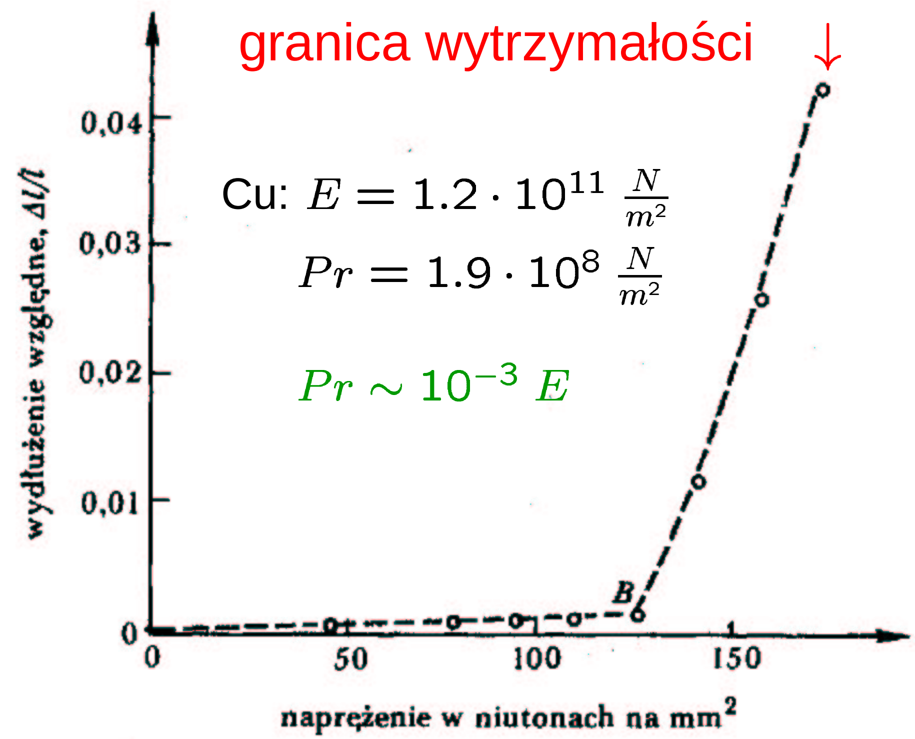
$$F = E\,S\,\frac{\Delta L}{L}$$

E - moduł Younga $[N/m^2]$

naprężenie odpowiadające dwukrotnemu wydłużeniu

Prawo Hooke'a jest prawem empirycznym.

Jest słuszne tylko dla małych naprężeń.



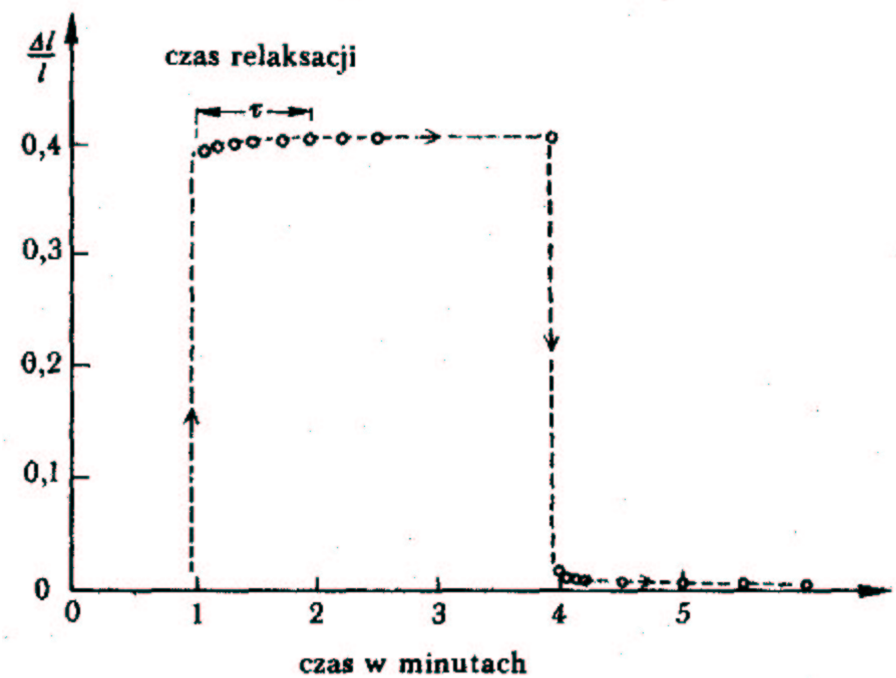
granica proporcjonalności ↑ (Pr)

Siła sprężysta

Relaksacja

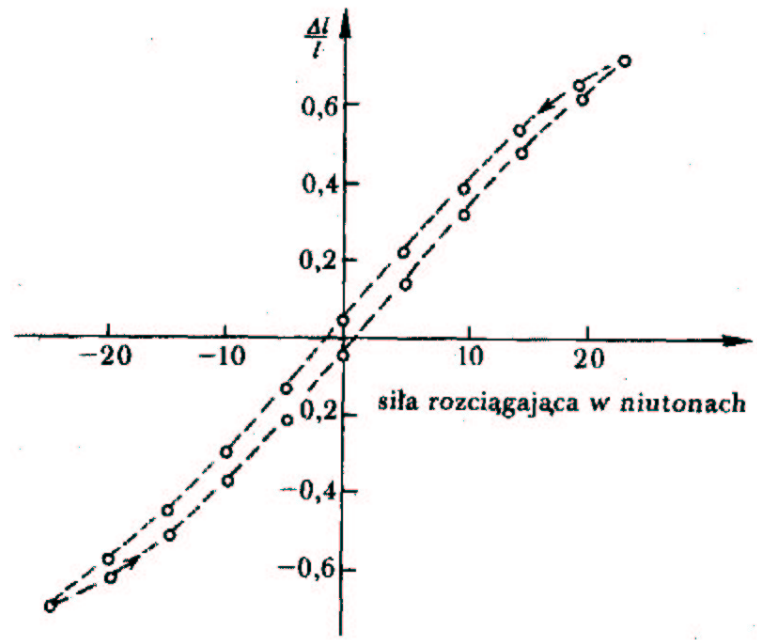
Prawo Hooke'a odnosi się do sytuacji statycznej.

Od momentu przyłożenia siły do osiągnięcia odpowiedniego odkształcenie mija skończony czas - czas relaksacji



podobnie gdy siła przestanie działać

Histereza



Przyłożenie dużej siły, nawet na krótki czas może powodować trwałe odkształcenie

⇒ trzeba przyłożyć siłę przeciwnie skierowaną