Prawa ruchu: dynamika

Fizyka I (B+C)

Wykład X:

- Dynamika ruchu po okręgu

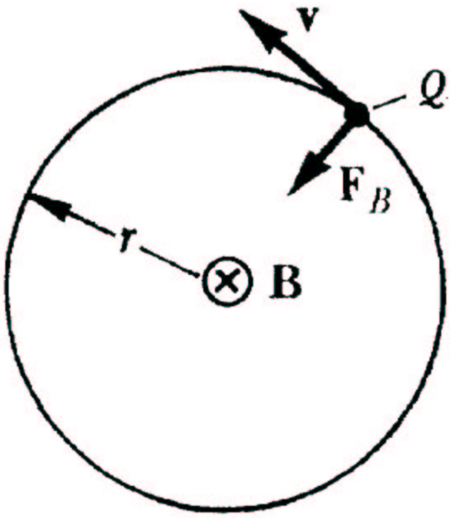
  $\Rightarrow$ siła dośrodkowa
- Prawa ruchu w układzie nieinercjalnym

  $\Rightarrow$ siły bezwładności
- Prawa ruchu w układzie obracającym się

  $\Rightarrow$ siła odśrodkowa

  $\Rightarrow$ siła Coriolissa

Ruch po okręgu



Zasada bezwładności

"Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszajż ciała do zmiany tego stanu." I.Newton

⇒ aby ciało pozostawało w ruchu po okręgu konieczne jest działanie siły ⇒ **siła dośrodkowa**

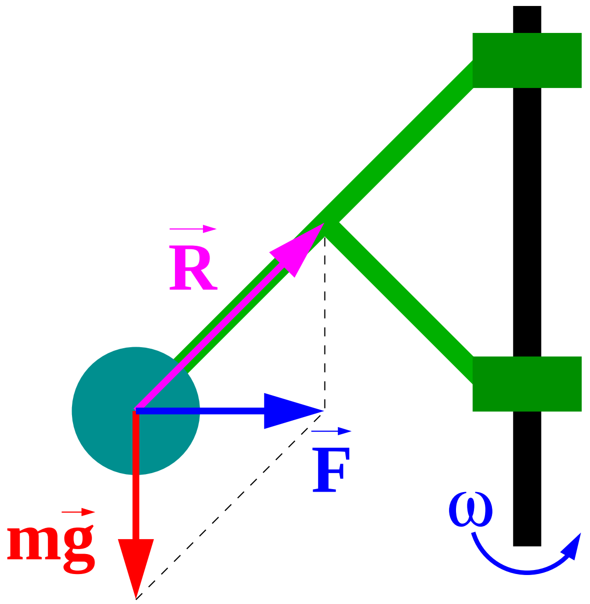
Ruch po okręgu może być wynikiem działania różnego rodzaju sił:

- siły zewnętrzne
  - ⇒ siła Lorenza (pole magnetyczne)
  - ⇒ siły sprężystości
- siły reakcji więzów (kulka na nitce)
- wypadkowej sił reakcji i sił zewnętrznych (regulator Watta, kulka w wirującym naczyniu...)

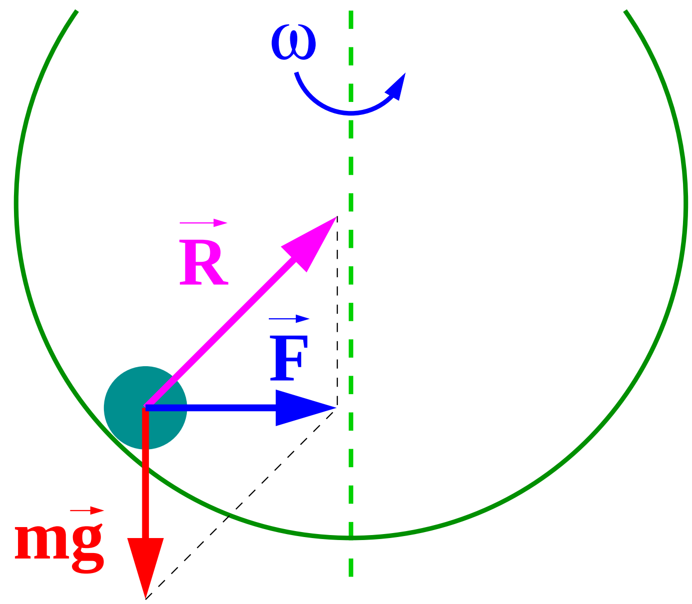
Ruch po okręgu

Siła dośrodkowa

Regulator Watta



Kulka w wirującym naczyniu



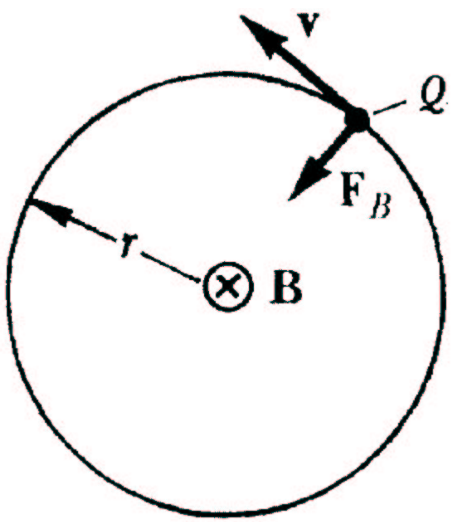
Siła dośrodkowa jest wypadkową siły reakcji i siły ciężkości:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R}}$$

Ruch po okręgu

Siła dośrodkowa

Cząstka naładowana w polu magnetycznym



Siła Lorenza:

$$\vec{F}_B = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Dla $\vec{v} \perp \vec{B}$:

$$F_B = Q\, v\, B$$

$\Rightarrow$

$$F_B = \frac{Q\,B}{m\,v}\, m\, v^2 = \frac{1}{r}\, m\, v^2$$

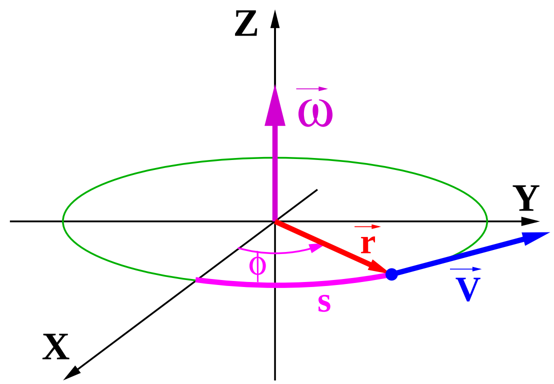
$$\boxed{F_B = \frac{m\,v^2}{r} = m\,\omega^2\, r}$$

Promień cyklotronowy:

$$r = \frac{m\,v}{Q\,B} = \frac{p}{Q\,B}$$

Ruch po okręgu

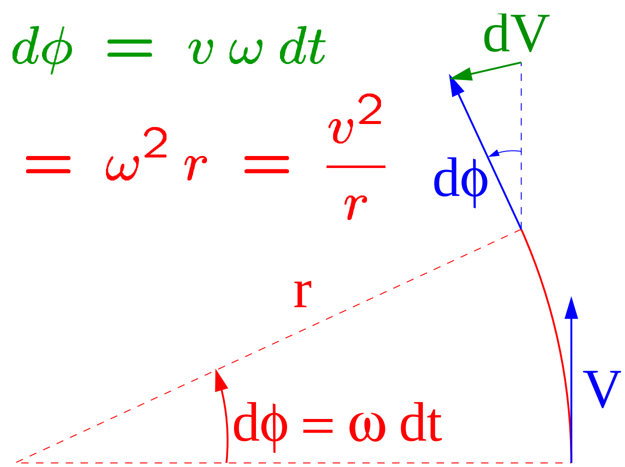
Przyspieszenie dośrodkowe



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$dv = v \cdot d\phi = v\,\omega\,dt$$

$$a = v\,\omega = \omega^2\,r = \frac{v^2}{r}$$



$$x = r \cdot \cos(\omega \cdot t)$$
$$y = r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$
$$z \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad a_x = -\omega^2\,r \cdot \cos(\omega \cdot t)$$
$$a_y = -\omega^2\,r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$
$$\Rightarrow \quad \vec{a} = -\omega^2\,\vec{r}$$

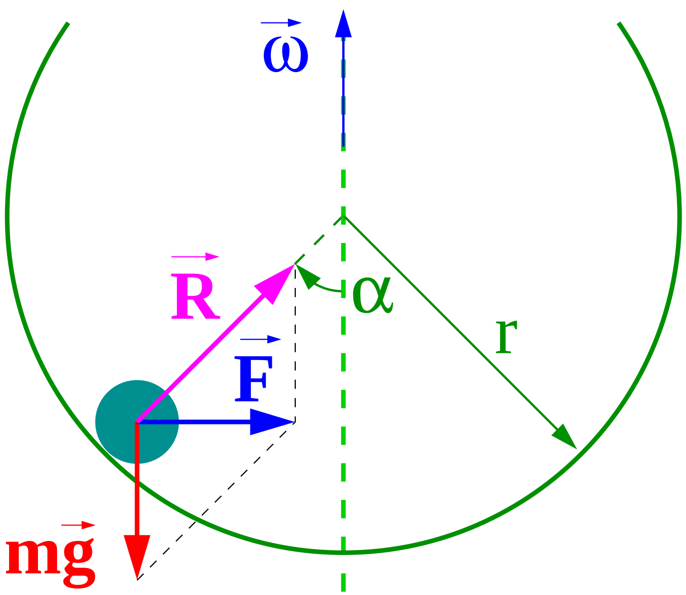
W zapisie wektorowym: $\vec{\omega} = const$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$= \vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$
$$= -\omega^2 \cdot \vec{r}_\perp \qquad \vec{r}_\perp = (x, y, 0)$$

Ruch po okręgu

Siła dośrodkowa

Kulka w wirującym naczyniu



$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R}$$

Siła dośrodkowa skierowana poziomo ze składania sił:

$$\Rightarrow \quad R \cdot \cos\alpha - mg = 0$$

$$F = R \cdot \sin\alpha = mg \cdot \tan\alpha$$

Z równania ruchu:

$$F = m\,\omega^2 r_\perp = m\,\omega^2 r \cdot \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 r}$$

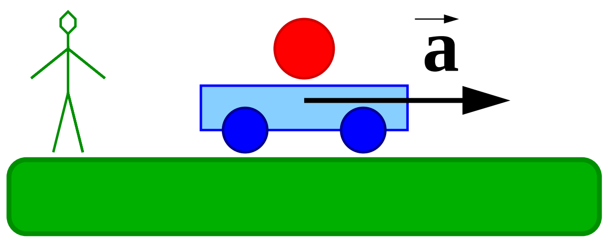
Kulka odchyli się dopiero dla $\omega > \sqrt{\frac{g}{r}} = \omega_\circ$

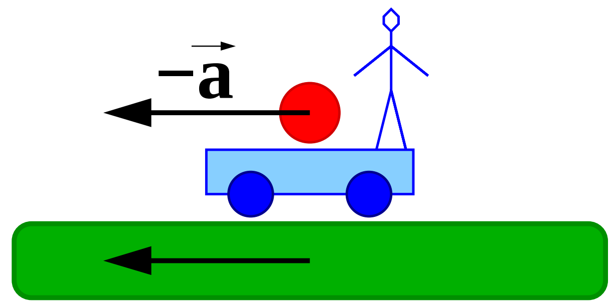
$\omega_\circ$ - częstość drgań wahadła matematycznego o długości r

Układy nieinercjalne

Opis ruchu

Wózek porusza się z przyspieszenien $\vec{a}$ względem stołu





Z punktu widzenia obserwatora związanego ze stołem kulka pozostaje w spoczynku.

Wynika to z zasady bezwładności - siły działające na kulkę równoważą się

$$\vec{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = 0$$

Z punktu widzenia obserwatora związanego z wózkiem kulka porusza się z przyspieszeniem $-\vec{a}$

$\Rightarrow$ prawa Newtona nie są spełnione !?

Oba układy nie mogą być inercjalne.

Prawa ruchu w układzie nieinercjalnym wymagają modyfikacji

Układy nieinercjalne

Prawa ruchu

Przyjmijmy, że układ O' porusza się z przyspieszeniem $\vec{a}_\circ$ względem układu inercjalnego O.

Osie obu układów pozostają cały czas równoległe (brak obrotów)

Przyspieszenie punktu materialnego mierzone w układach O i O':

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_\circ$$

Prawa ruchu w układzie inercjalnym O:

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R$$

$\Rightarrow$ w układzie nieinercjalnym O':

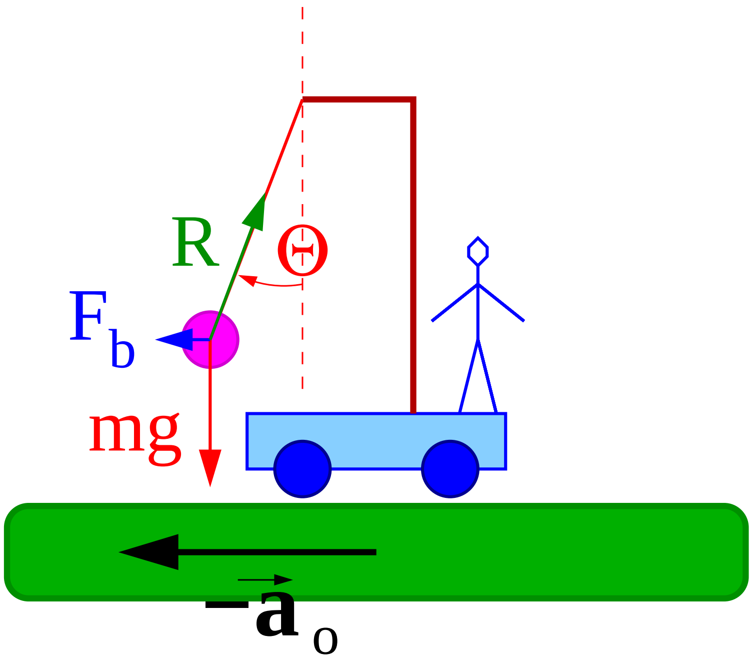
$$m\vec{a}\,' = \vec{F}(\vec{r}\,', \vec{v}\,', t) + \vec{F}_R - m\vec{a}_\circ$$

$\Rightarrow$ w układzie nieinercjalnym musimy wprowadzić siłę bezwładności $\vec{F}_b = -m\vec{a}_\circ$

Układy nieinercjalne

Prawa ruchu

Wahadło w układzie nieinercjalnym poruszającym się z przyspieszeniem $\vec{a}$ względem układu inercjalnego



Oprócz siły ciężkości $m\vec{g}$ i reakcji $\vec{R}$ musimy uwzględnić pozorną siłę bezwładności $\vec{F}_b = -m\vec{a}_\circ$

Opis ruchu można uprościć wprowadzając efektywne przyspieszenie ziemskie:

$$\vec{g}\,' = \vec{g} - \vec{a}_\circ$$

siły bezwładności $\equiv$ siły grawitacji

$\Rightarrow$ odchylenie położenia równowagi:

$$\tan\theta = \frac{a_\circ}{g}$$

Przyspieszenie drgań:

$$\omega'^{\,2} = \frac{g'}{l} = \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l}$$

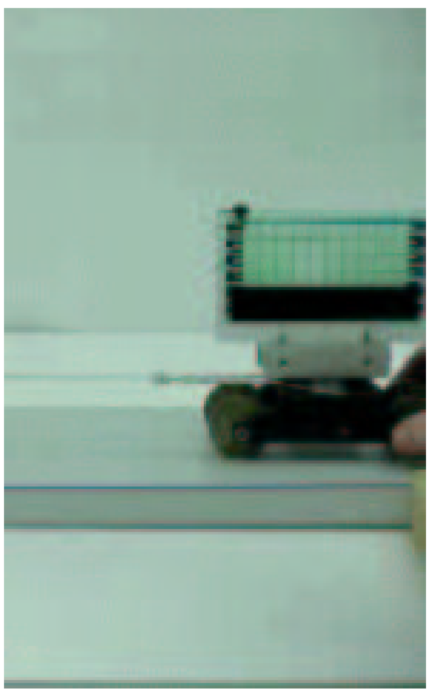
Układy nieinercjalne

Prawa ruchu

Jeśli $a_\circ \ll g \Rightarrow$ w układzie poruszającym się z przyspieszeniem $\vec{a}_\circ \perp \vec{g}$ obserwujemy pozorną zmianę kierunku działania siły ciężkości:

Ciecz w naczyniu:

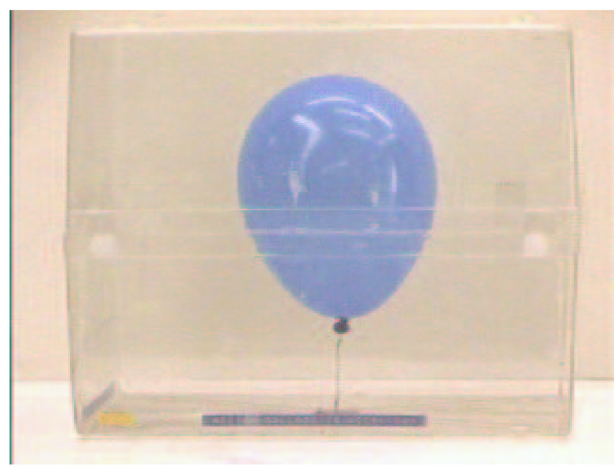
$\vec{a} = 0$



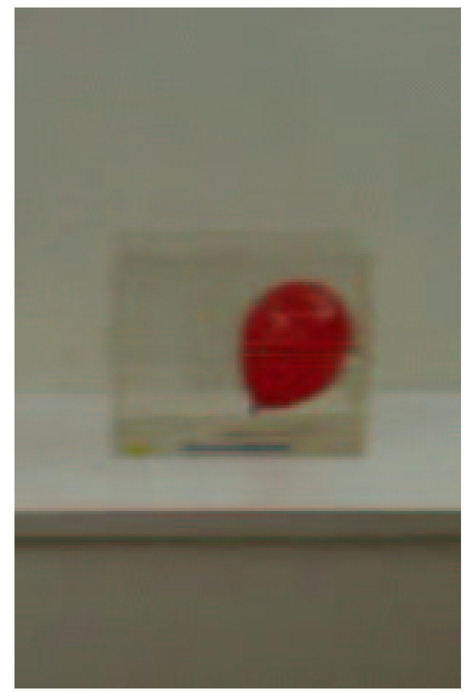
$\vec{a} \neq 0$

Balon z helem:

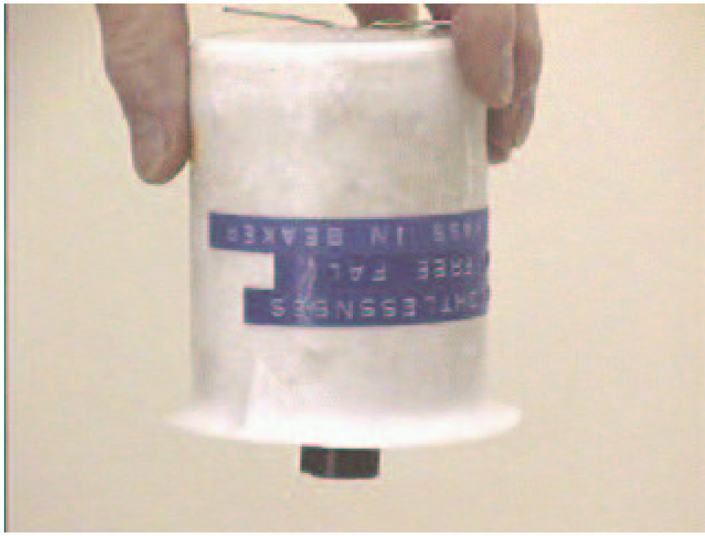
$\vec{a} = 0$



$\vec{a} \neq 0$



Układy nieinercjalne



Spadek swobodny

W układzie odniesienia poruszającym się z przyspieszeniem $\vec{a}_\circ || \vec{g}$ obserwujemy pozorną zmianę wartości przyspieszenie grawitacyjnego:

$$\vec{g}\,' = \vec{g} - \vec{a}_\circ$$

W układzie związanym z ciałem spadającym swobodnie $\vec{a}_\circ = \vec{g}$

$$\vec{g}\,' = 0$$

$\Rightarrow$ stan nieważkości

Układ obracający się

Niech układ O' obraca się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ względem układu inercjalnego O.

Dla uproszenia przyjmijmy, że początki obu układów pokrywają się.

Rozważmy ruch punktu materialnego spoczywającego w układzie O':

Z punktu widzenia obserwatora O ciało porusza się po okręgu
i musi na nie dzialać siła dośrodkowa:

$$\vec{F} = -m\,\omega^2\,\vec{r}_\perp$$

W układzie O', aby opisać równowagę sił (ciało pozostaje w spoczynku)
musimy wprowadzić siłę bezwładności:

$$\vec{F}_b = +m\,\omega^2\,\vec{r}_\perp$$

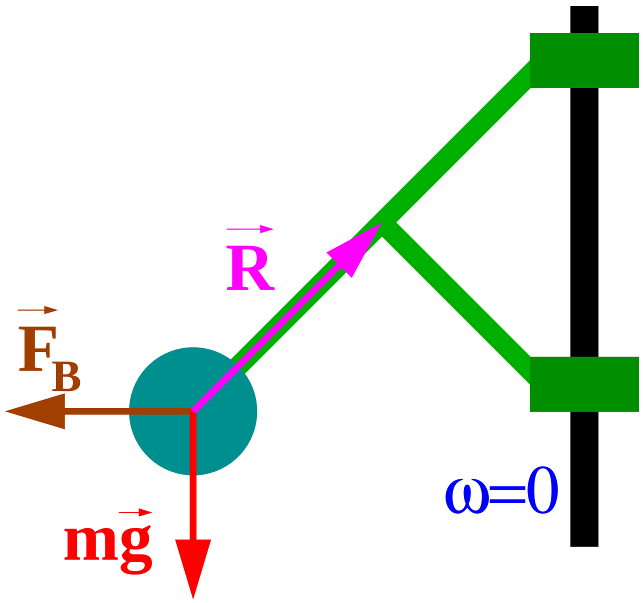
$\Rightarrow$ siła odśrodkowa

Siły bezwładności są siłami pozornymi, wynikającymi z nieinercjalnego charakteru układu odniesienia

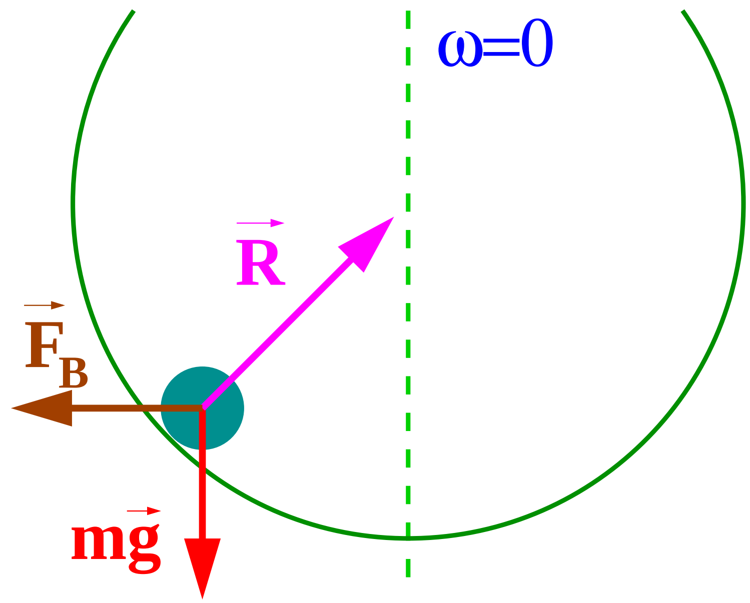
Układ obracający się

Siła odśrodkowa

Regulator Watta



Kulka w wirującym naczyniu



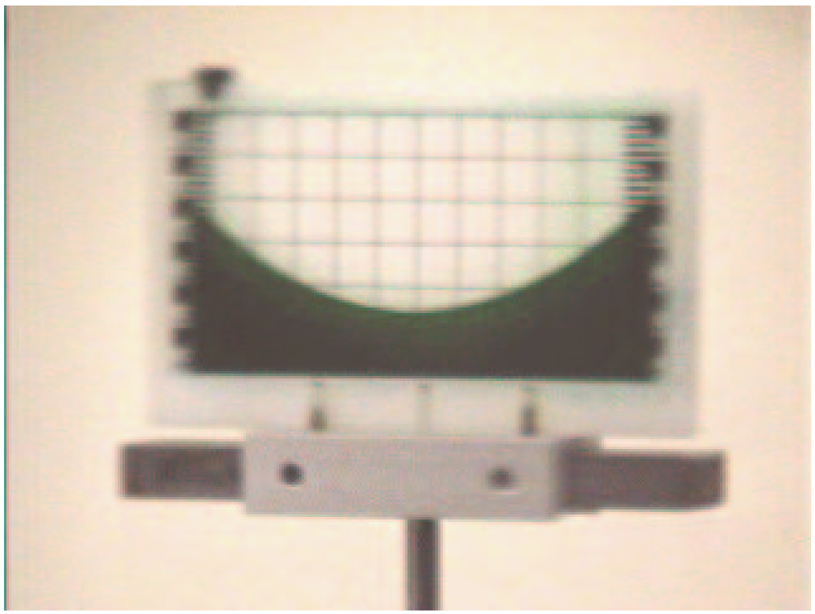
Równowaga sił w układzie obracającym się:

$$\boxed{m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_b = m\vec{a}\,' = 0}$$

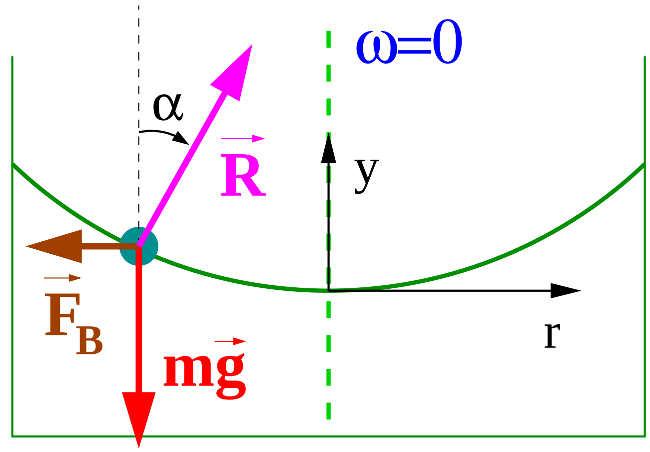
Układ obracający się

Siła odśrodkowa

Ciecz w wirującym naczyniu



Powierzchnia cieczy przyjmuje kształt paraboliczny



Równowaga drobiny na powierzchni cieczy:

$$mg \sin\alpha - m\omega^2 r \cos\alpha \;=\; 0$$

(rzut na powierzchnie cieczy)

$$\frac{dy}{dr} = \tan\alpha = \frac{\omega^2}{g} r$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{\omega^2}{2g} \cdot r^2 + y_\circ$$

Układ obracający się

Układ O' obraca się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ względem układu inercjalnego O.

Rozważmy teraz ruch punktu materialnego spoczywającego w układzie O':

Z punktu widzenia obserwatora O' ciało porusza się po okręgu
i musi na nie dzialać siła dośrodkowa:

$$\vec{F} = -m\,\omega^2\,\vec{r}_\perp$$

W układzie O' działa tymczasem pozorna siła odśrodkowa

$$\vec{F}_b = +m\,\omega^2\,\vec{r}_\perp$$

$\Rightarrow$ musimy wprowadzić kolejną siłę ?!

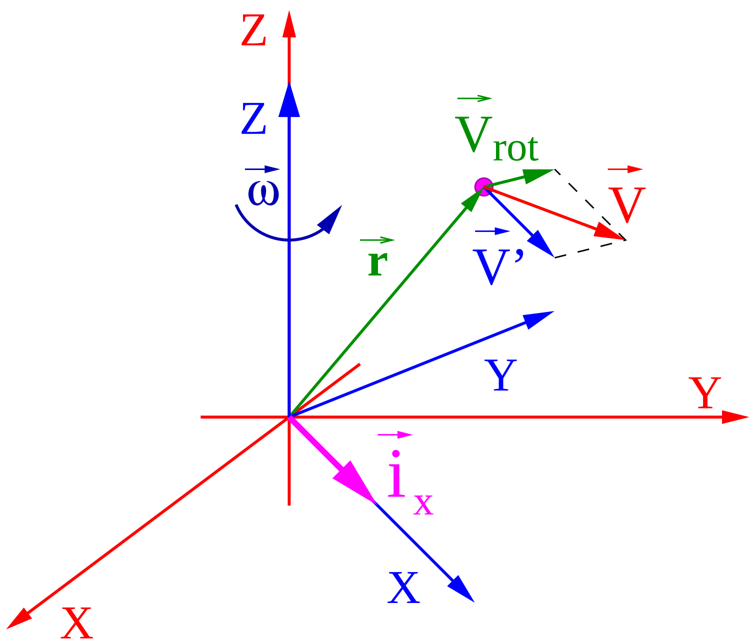
Aby "uratować" równania ruchu potrzebujemy

$$\vec{F}_c = -2\,m\,\omega^2\,\vec{r}_\perp$$

$\Rightarrow$ czy to w ogóle ma sens ?...

Układ obracający się

Układ O' obraca się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ względem układu inercjalnego O.



Dodawanie prędkości:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_{rot} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

Przyspieszenie:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}\,'}{dt}$$

Pochodna dla wektora o z układu O': ($\vec{r}\,'$ i $\vec{v}\,'$)

$$\frac{d\vec{o}\,'}{dt} = \frac{d\vec{o}\,'}{dt'} + \vec{\omega} \times \vec{o}\,'$$

pochodna w O' + obrót osi O'

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{a}\,' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}\,'$$

przysp. w O' przysp. O' przysp. dośrodkowe przysp. Coriolisa

Układ obracający się

Równanie ruchu

W układzie inercjalnym O:

$$m\vec{a} \;=\; \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) \;+\; \vec{F}_R$$

$\Rightarrow$ w układzie nieinercjalnym O':

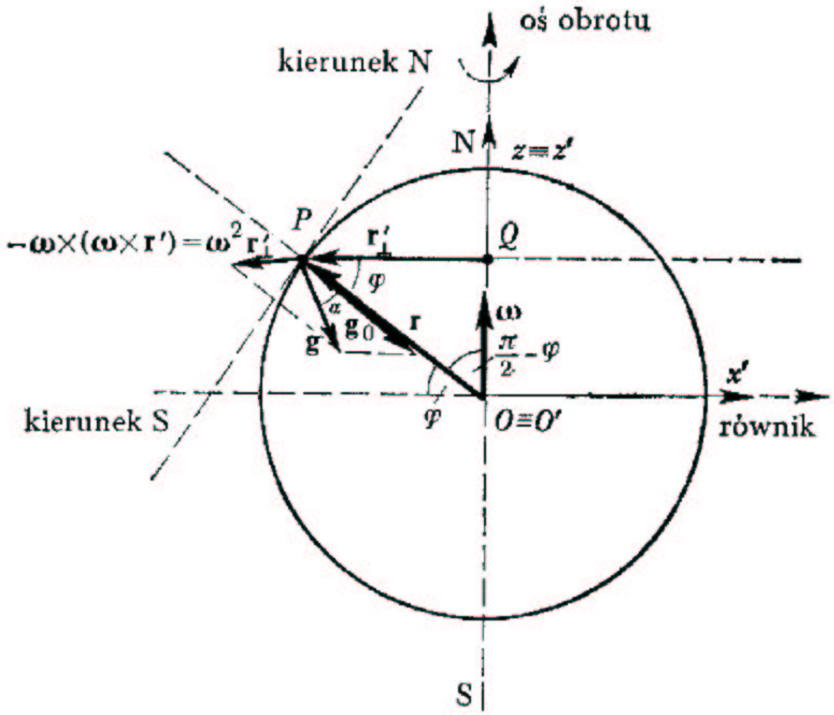
$$m\vec{a}\,' \;=\; \vec{F}(\vec{r}\,',\vec{v}\,',t) \;+\; \vec{F}_R \;-\; m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') \;-\; 2\cdot m\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$$

W układzie obracającym się wprowadzamy dwie pozorne siły bezwładności:

- siłę odśrodkową $\vec{F}_o = -m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') = +\omega^2\,\vec{r}_\perp{}'$
- siłę Coriolisa $\vec{F}_c = -2\cdot m\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$

Układ obracający się

Ruch obrotowy Ziemi



$$\omega \approx \frac{2\pi}{23^h\, 56^m\, 04^s} \approx 7.3 \cdot 10^{-5}\, \frac{1}{s}$$

Ciała nieruchome względem powierzchni Ziemi.

Zmiana efektywnego przyspieszenia ziemskiego zwiazana z ruchem obrotowym Ziemi:

$$\Delta g = -\omega^2 r_\perp \cos\phi = -\omega^2 r_Z \cos^2\phi$$

$$\approx -0.033 \frac{m}{s^2} \cdot \cos^2\phi \qquad \phi - \text{szerokość geo.}$$

Wyniki pomiarów:

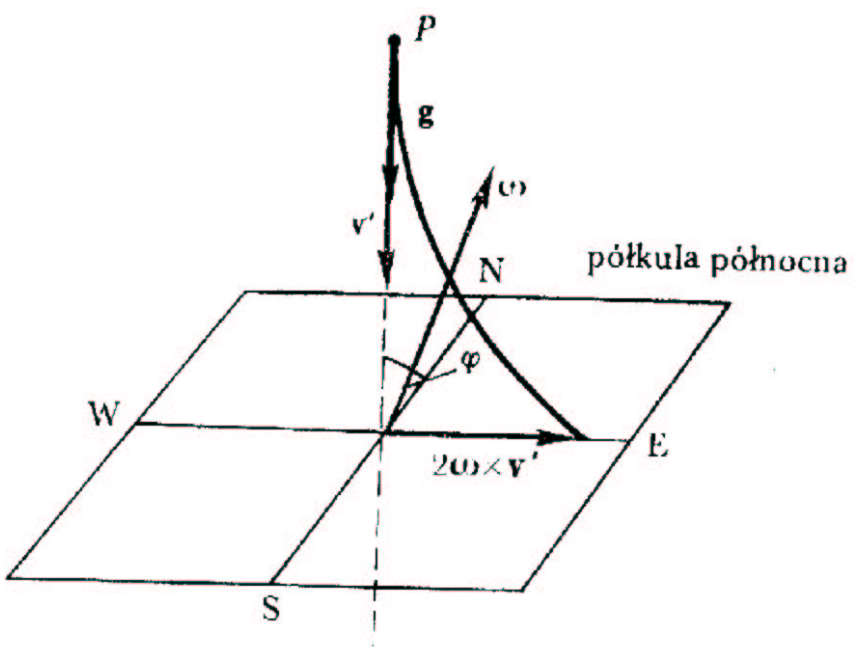
biegun N	$g = 9.83216\ \frac{m}{s^2}$
Warszawa	$g = 9.81230\ \frac{m}{s^2}$
równik	$g = 9.78030\ \frac{m}{s^2}$

Efekt większy ze względu na spłaszczenie Ziemi

Układ obracający się

Ruch obrotowy Ziemi

Spadek swobodny z dużej wysokości



Spadek swobodny z wysokości 5.5 km,
z prędkością $v \approx$ 55 m/s:

$$\begin{aligned} a_c &= 2\,\omega\,v\,\cos\phi \\ &\approx 0.008\,\frac{m}{s^2}\cdot\cos\phi \end{aligned}$$

Spadek z 5.5 km zajmie $t = 100\ s$.
Końcowe odchylenie toru od pionu:

$$\Delta = \frac{a_c\,t^2}{2} \approx 40\ m\cdot\cos\phi$$

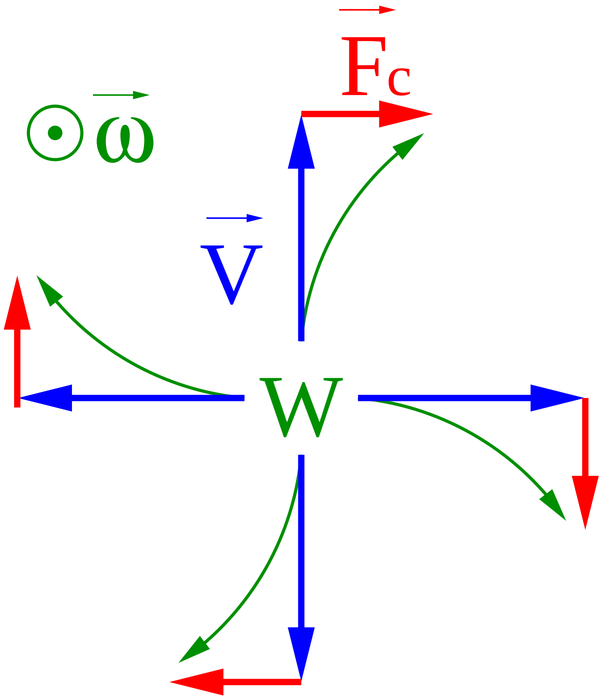
Siła Coriolisa odchyla tor ciała
w kierunku wschodnim (półkula północna)

w Warszawie około 25 m

Układ obracający się

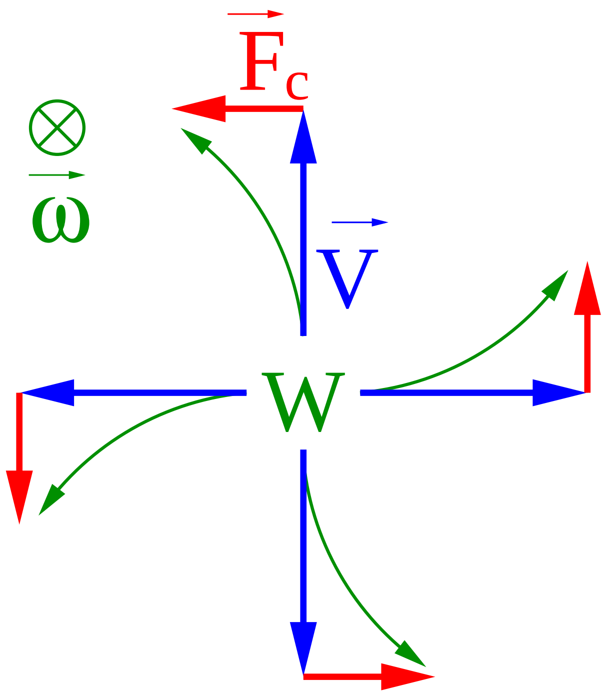
Siła Coriolisa $\qquad \vec{F}_c = -2 \cdot m\, \vec{\omega} \times \vec{v}\,'$

Półkula północna



Wiatry zakręcają “w prawo”; wyż “kręci się” zgodnie z ruchem wskazówek zegara

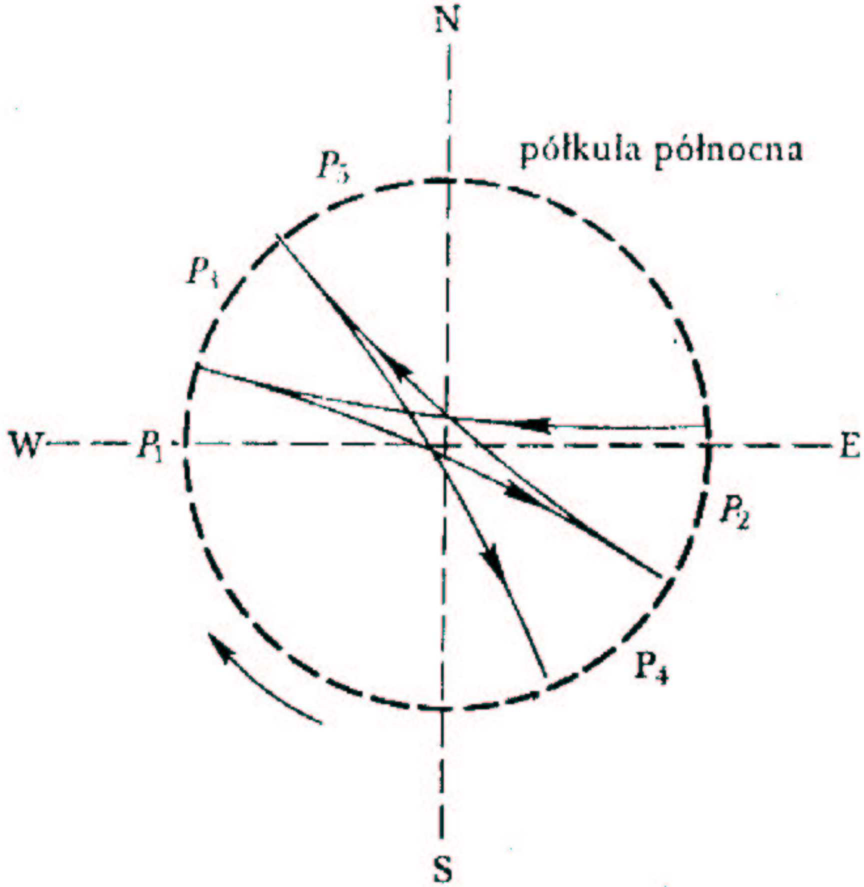
Półkula południowa



Wiatry zakręcają “w lewo”; wyż “kręci się” przeciwnie do ruchu wskazówek zegara

Układ obracający się

Wahadło Foucault'a 1851 r.



start z wychylenia maksymalnego

Dla obserwatora na Ziemi płaszczyzna ruchu wahadła obraca się z prędkością kątową

$$\omega_1 = \omega \cdot \sin\phi$$

w Warszawie ($\phi = 52°$): $\omega_1 \approx 12°/h$

dla startu z położenia równowagi: