

# Dynamika relatywistyczna

Fizyka I (B+C)

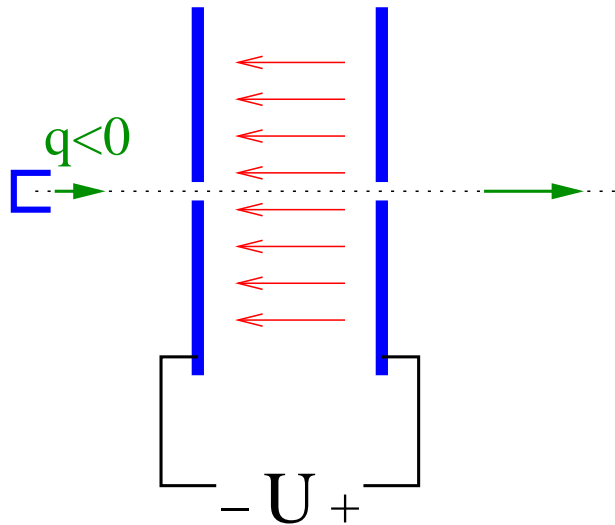
## Wykład XI:

- Relatywistyczna definicja pędu
- Akceleratory cząstek
- Ewolucja Wszechświata

# Pęd relatywistyczny

## Granice podejścia klasycznego

Elektron w kondensatorze  
(najprostszy 'akcelerator' cząstek):



Klasycznie:

$$m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{E}$$

Potrafimy wytwarzać pola elektryczne

$$E \sim 10 \text{ MV/m} = 10^7 \text{ V/m}$$

Dla elektronu:

$$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 0.5 \text{ MeV}/c^2$$

$$|q_e| \equiv 1 e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\Rightarrow a \approx 20 \text{ m}^{-1} \cdot c^2 \approx 2 \cdot 10^{18} \text{ m/s}^2$$

W podejściu klasycznym elektron powinien osiągnąć prędkość światła już po przebyciu

$$\Delta x \approx 2.5 \text{ cm} !!!$$

$\Rightarrow$  konieczność modyfikacji praw ruchu

# Pęd relatywistyczny

## Uogólnienie praw ruchu

W przypadku klasycznym:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \stackrel{m=const}{=} \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Otrzymujemy równoważną postać

II prawa Newtona ( $\vec{p} = m\vec{v}$  - pęd cząstki):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

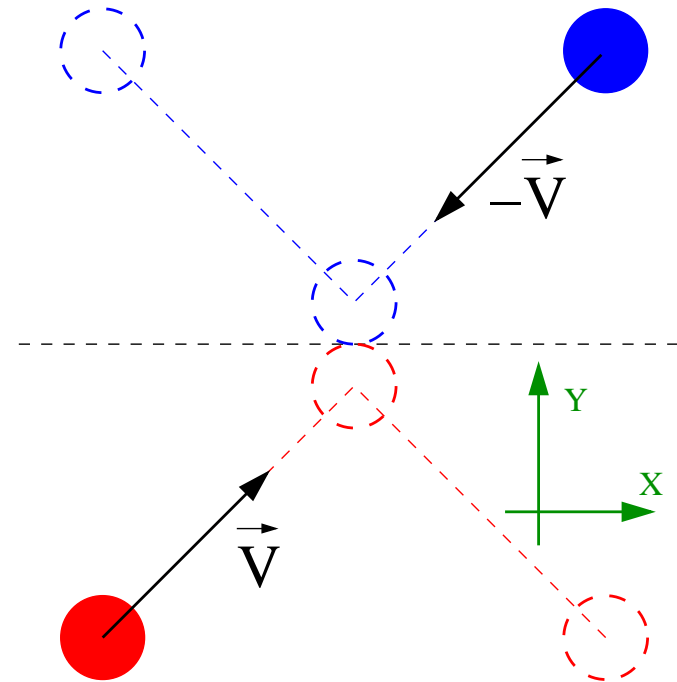
Aby zachować prawo ruchu w tej postaci dla  $v \sim c \Rightarrow$  modyfikacja definicji pędu

$$\vec{p} = f(v) \cdot m\vec{v}$$

$f(v)$  - poprawka relatywistyczna

## Doświadczenie myślowe

Zderzenie dwóch kul o jednakowej masie  $m$ :

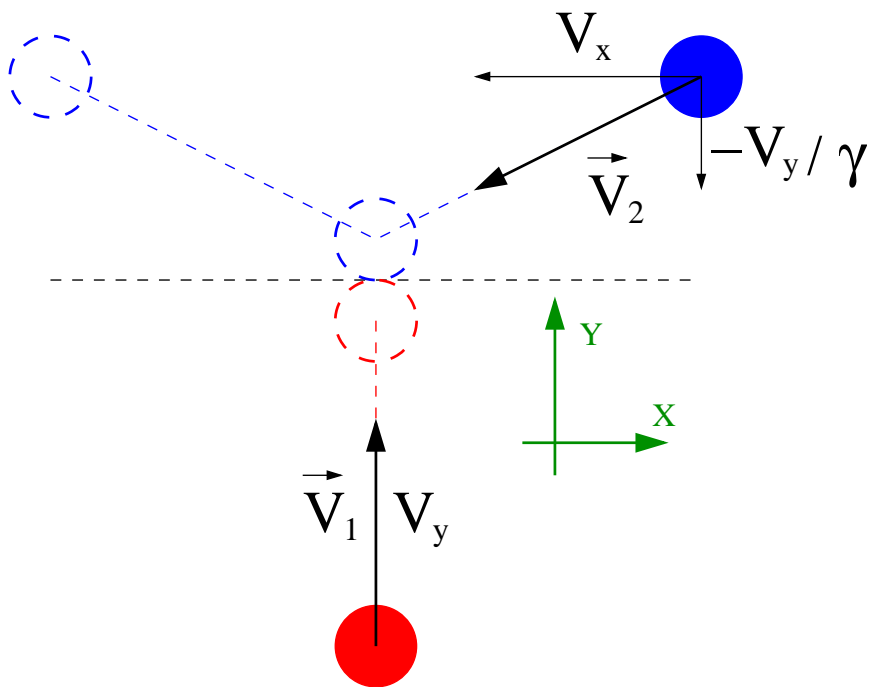


Pędy obu kul są równe co do wartości ale przeciwnie skierowane

# Pęd relatywistyczny

## Doświadczenie myślowe

Przejdźmy do układu w którym jedna z kul porusza się tylko wzdłuż osi Y:



Dwie kule  $\Rightarrow$  dwa układy odniesienia

Wybór jednej z kul łamie symetrię zagadnienia !

Prędkość wzdłuż osi Y **drugiej kuli** jest zmniejszona na skutek dylatacji czasu:

$$V_{2,y} = \frac{V_y}{\gamma} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}$$

Ale pędy obu kul wzdłuż osi Y muszą pozostać równe !

(aby nie zmienił się wynik doświadczenia)

$$m f(v_y) v_y = m f\left(\sqrt{v_x^2 + \frac{v_y^2}{\gamma^2}}\right) \frac{v_y}{\gamma}$$

Przechodząc do granicy  $v_y \rightarrow 0$ :

$$f(v_x) = \gamma \cdot f(0) = \gamma$$

chcemy zachować granicę klasyczna:  $f(0) = 1$

# Pęd relatywistyczny

## Równanie ruchu

Dla przypadku ruchu relatywistycznego:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

gdzie:  $\vec{p} = m \gamma \vec{v} = mc \gamma \vec{\beta}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

W przypadku ruchu jednowymiarowego:

$$\begin{aligned} F &= \frac{d}{dt} (mc \gamma \beta) \\ &= mc \gamma^3 \frac{d\beta}{dt} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  przyspieszenie maleje jak  $\gamma^{-3}$  !

Rozwiązanie ruchu pod wpływem stałej siły elektrycznej  $F = qE$ :

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{qE}{mc} (1 - \beta^2)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\beta}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \frac{qE}{mc} dt$$

Całkujemy podstawiając  $\beta = \sin u$ :

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{qE}{mc} \int dt$$

$$\Rightarrow \tan u = \frac{qE}{mc} \cdot t$$

przyjmując, że cząstka spoczywała w  $t = 0$

# Pęd relatywistyczny

## Ruch pod wpływem stałej siły

Otrzymujemy rozwiązanie w postaci:

$$\beta(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}}$$

gdzie:  $\alpha = \frac{qE}{mc}$

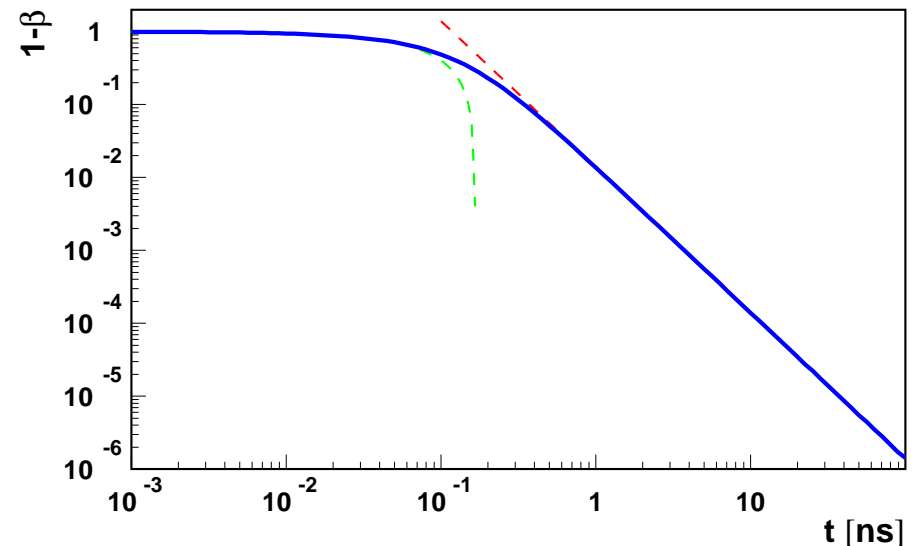
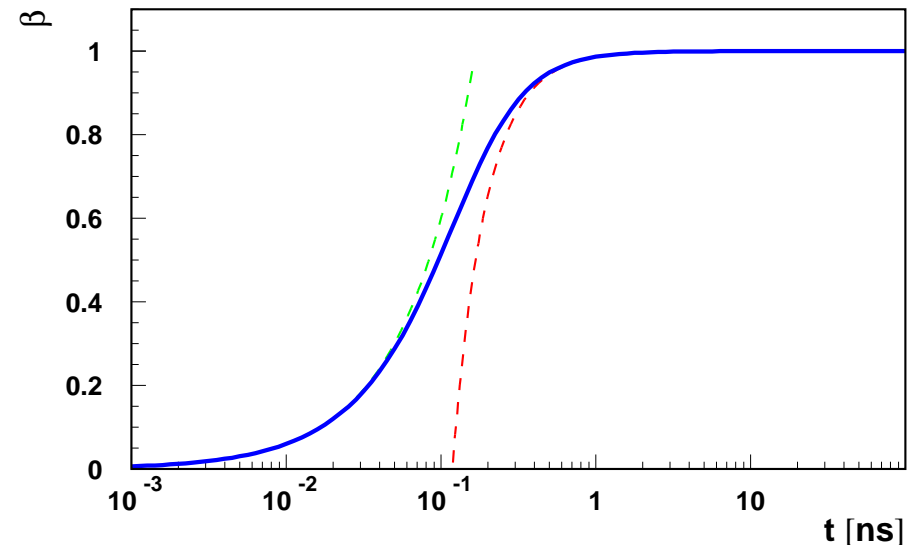
W naszym przykładzie ( $e^-$  w polu  $10 \frac{MV}{m}$ )  
 $\alpha \sim 6 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ ,  $\alpha^{-1} \sim 0.17 \text{ ns}$

W granicy  $\alpha t \gg 1$ :

$$1 - \beta(t) \approx \frac{1}{2\alpha^2 t^2}$$

nigdy nie osiągniemy  $\beta = 1$

Ale:  $p(t) = mc \alpha \cdot t$  – rośnie  $\sim t$ !



# Pęd relatywistyczny

## Ruch pod wpływem stałej siły

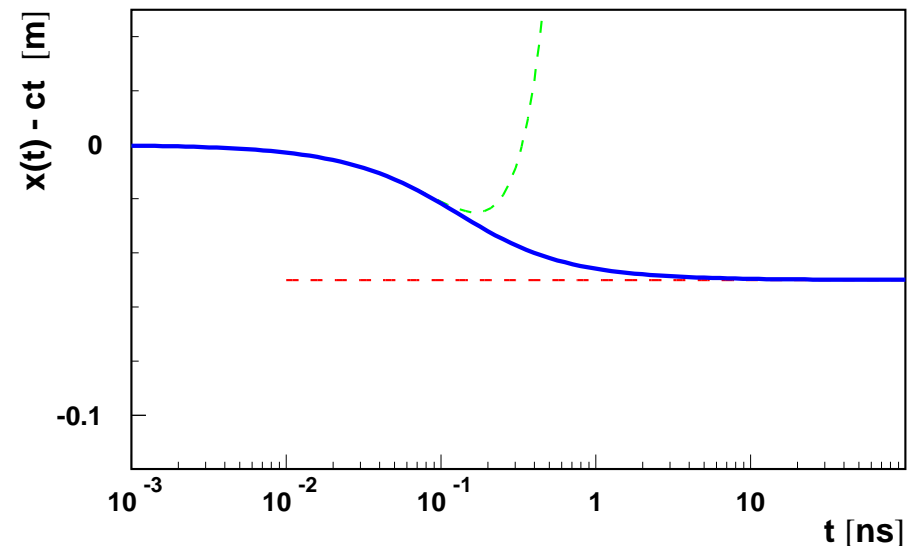
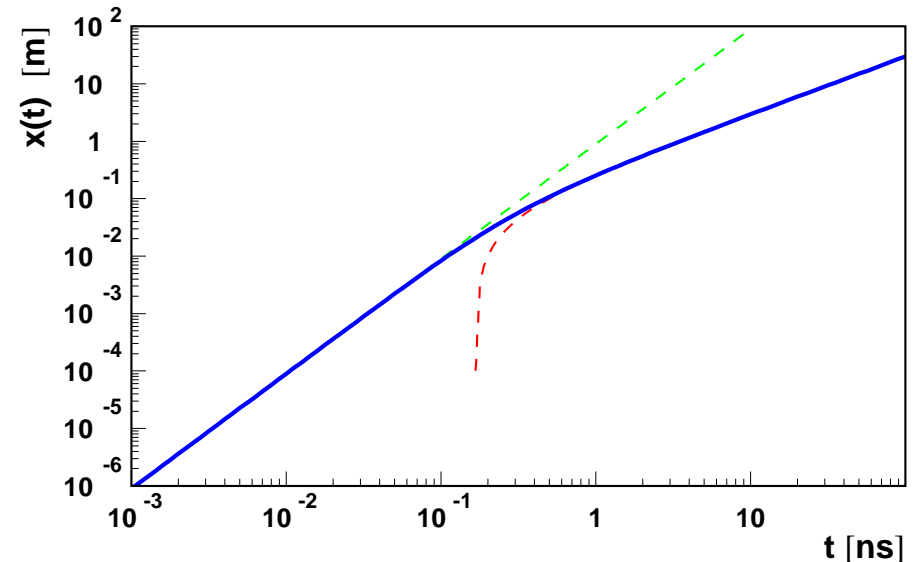
Rozwiązując dalej otrzymujemy:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c \alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}}$$
$$\Rightarrow x(t) = \int dx = \frac{c}{\alpha} \int \frac{\alpha t d(\alpha t)}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}}$$
$$= \frac{c}{\alpha} \left( \sqrt{1 + (\alpha t)^2} - 1 \right)$$

W granicy  $\alpha t \gg 1$ :

$$x(t) \approx ct - \frac{c}{\alpha}$$

W naszym przykładzie:  
światło wyprzedzi elektron tylko o 5 cm !!!



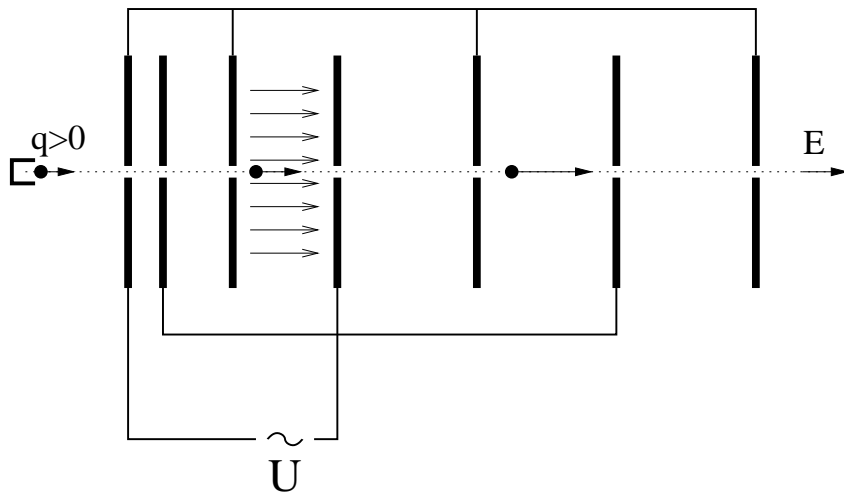
# Akceleratory

## Akcelerator liniowy

Nie jesteśmy w stanie wytwarzać napięć statycznych większych niż ok. 10 MV.

Aby nadać czątkom większe pędy musimy przyspieszać je “na raty”.

Cząstka przechodząca przez kolejne “kondensatory”:



Przy odpowiednim dobraniu długości kolejnych elementów i częstości napięcia zasilającego, cząstka trafia zawsze na pole przyspieszające.

⇒ zwielokrotnienie uzyskiwanych pędów

Częstość jest zazwyczaj stała

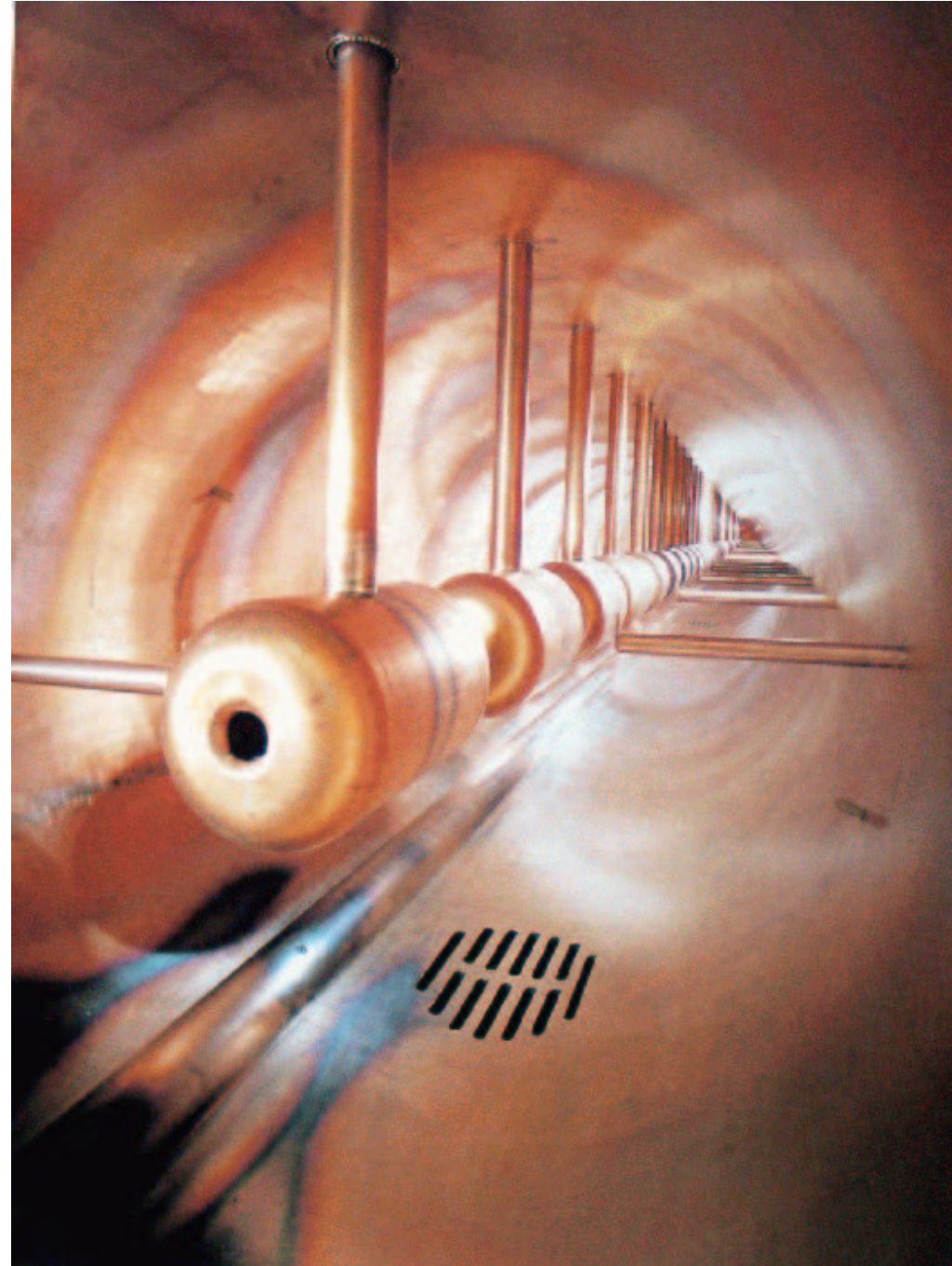
⇒ długości kolejnych elementów rosną proporcjonalnie do prędkości cząstki.

Dla  $\beta \rightarrow 1$ :  $L \rightarrow \text{const}$

⇒ akcelerator może składać się z wielu jednakowych elementów



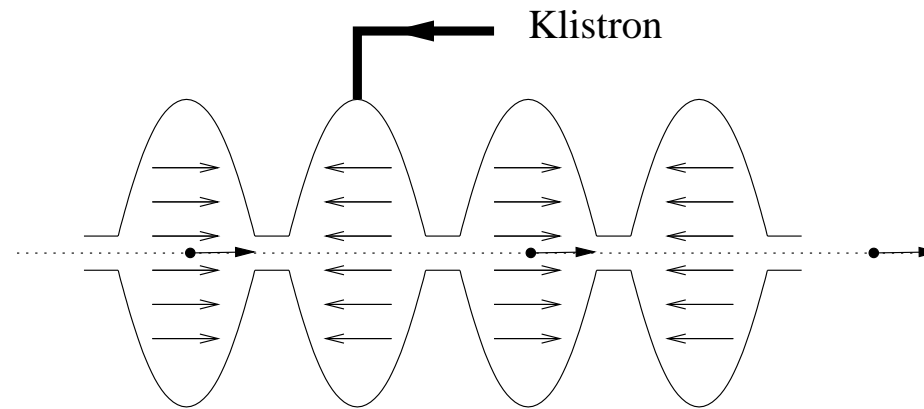
## Liniowy akcelerator protonów w ośrodku Fermilab (USA)



# Akceleratory

## Wnęka rezonansowa

W praktyce do przyspieszania cząstek wykorzystujemy **wnęki rezonansowe**:



Wewnątrz wnęki wytwarzana jest **stojąca fala elektromagnetyczna**.

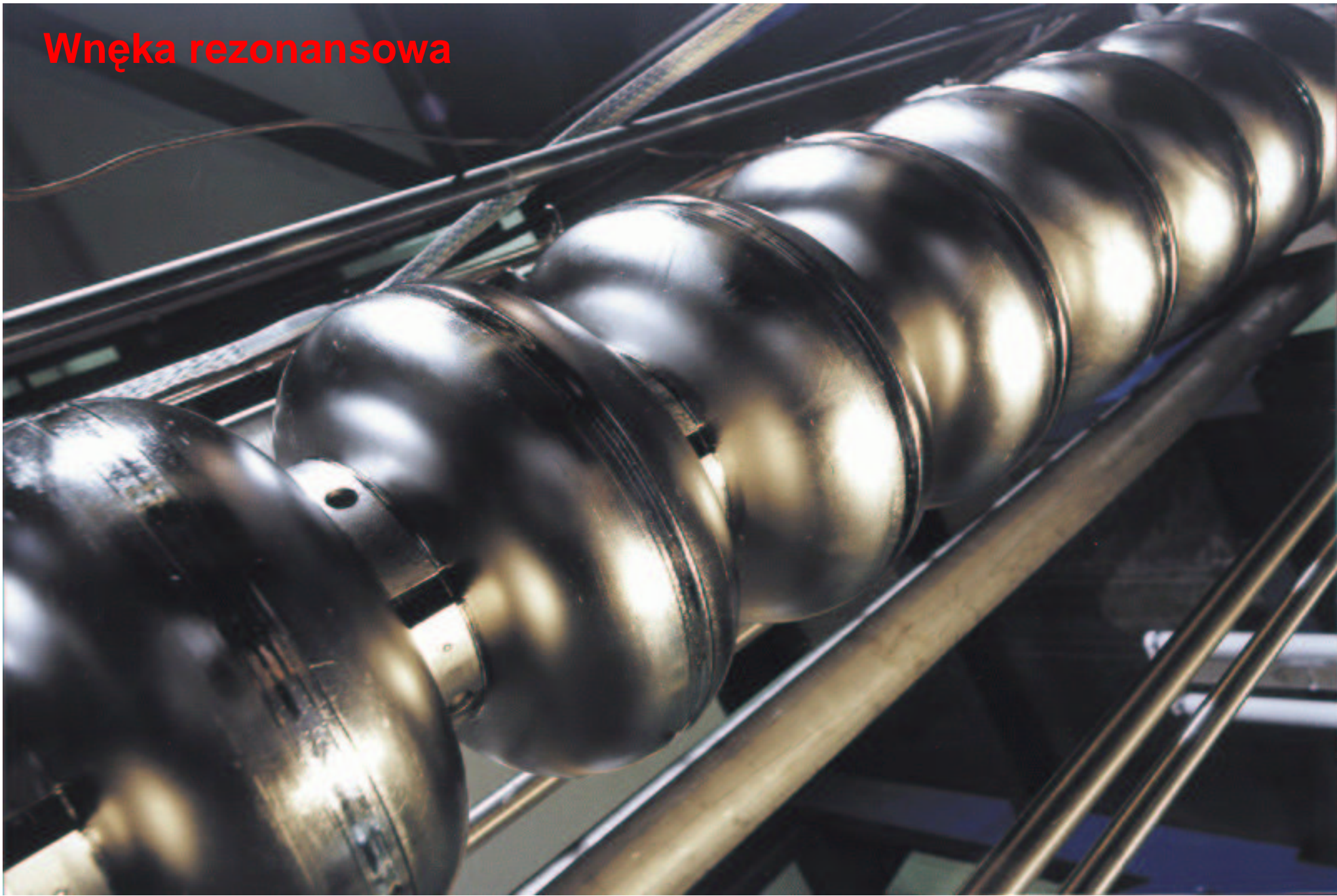
**Częstości rzędu 1 GHz - mikrofałe.**

Wnęki rezonansowe pozwalają uzyskiwać natężenia pola rzędu **10 MV/m**

⇒ dla uzyskania pędu 1 GeV/c ( $\gamma \approx 2000$ ) potrzebny jest akcelerator o długości  $\sim 100\text{m}$



## Wnęka rezonansowa



# Tesla

Nowy projekt realizowany w ośrodku DESY w Hamburgu:

Westerhorn



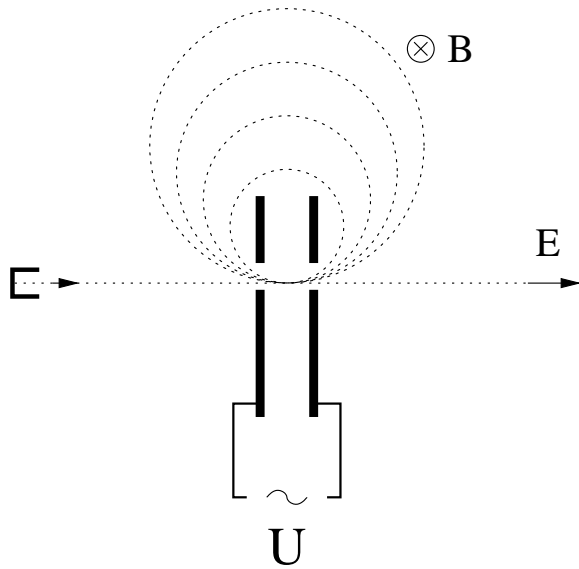
$$L = 2 \times 30 \text{ km} \Rightarrow p_e \approx 2 \times 250 \text{ GeV}/c$$
$$\gamma \sim 5 \cdot 10^5$$



# Akceleratory

## Akcelerator kołowy

Zamiast używać wielu wnęk można też wykorzystać pole magnetyczne do “zapętlenia” cząstki:

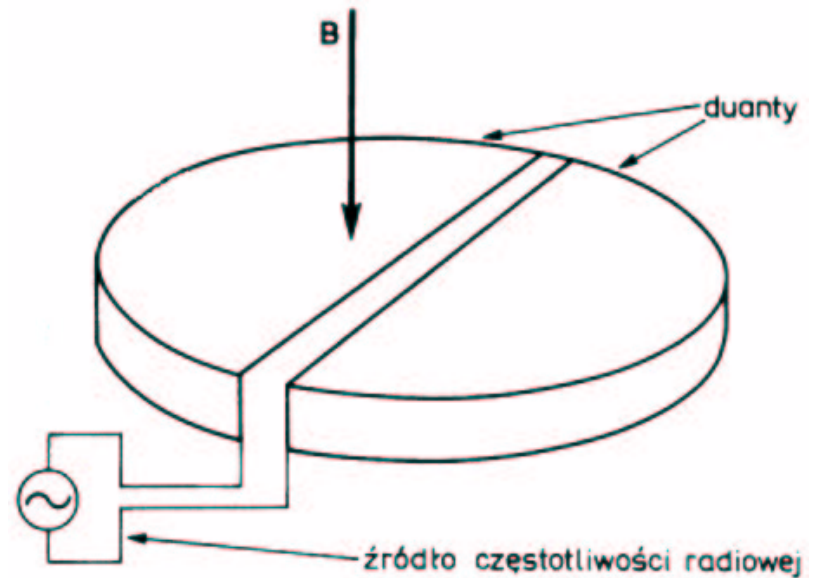


Cząstki przechodzą przez ten sam obszar przyspieszający wiele razy...

## Cyklotron

Jeśli  $v \ll c$  częstość cyklotronowa w jednorodnym polu magnetycznym

$$\omega = \frac{QBv}{p} = \text{const}$$

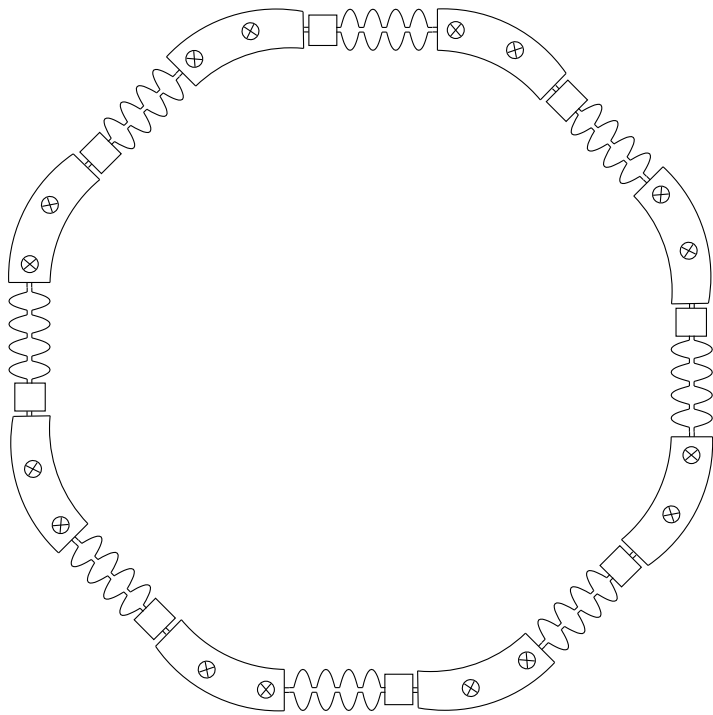


⇒ pierwszy akcelerator: E.O.Lawrence, 1932.

# Akceleratory

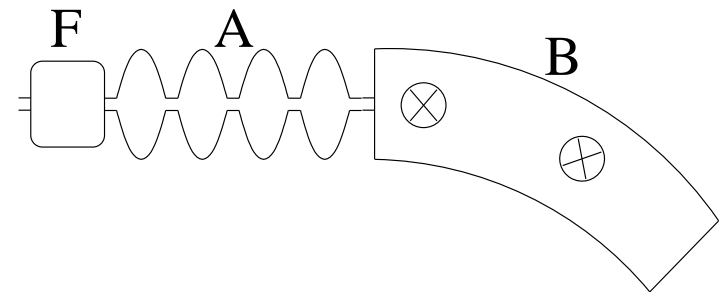
## Akcelerator kołowy

Wpółczesne akceleratory kołowe zbudowane są z wielu powtarzających się **segmentów**:



Każdy segment składa się z

- wnęk przyspieszających (A)
- magnesów zakrzywiających (B)
- układów ogniskujących (F)



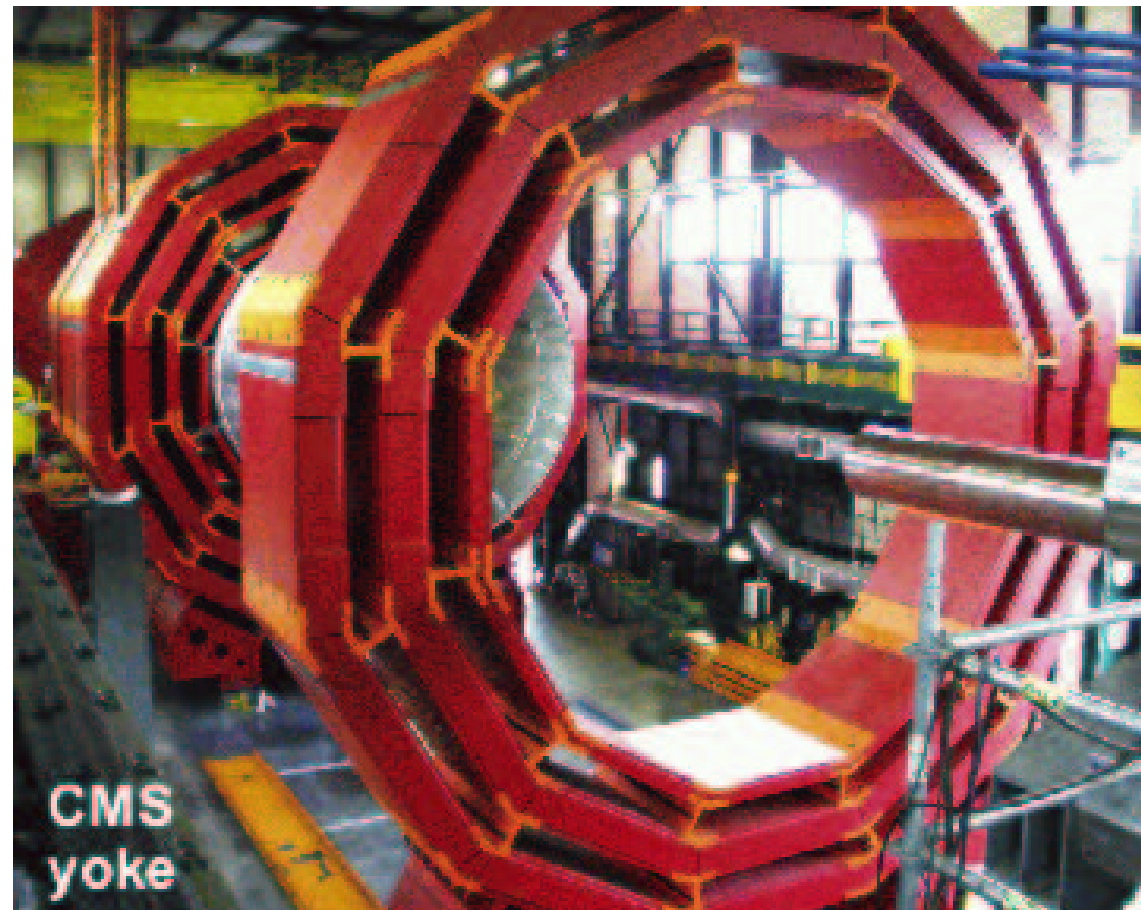
Największym zbudowanym akceleratorem był LEP w CERN pod Genewą (obwód ok. 27 km).

W tym samym tunelu budowany jest obecnie akcelerator LHC.

# LHC

Budowa eksperymentu CMS w LHC

Przewidywane uruchomienie: 2007





LEP/LHC, CERN, Genewa  
27 km obwodu !!!

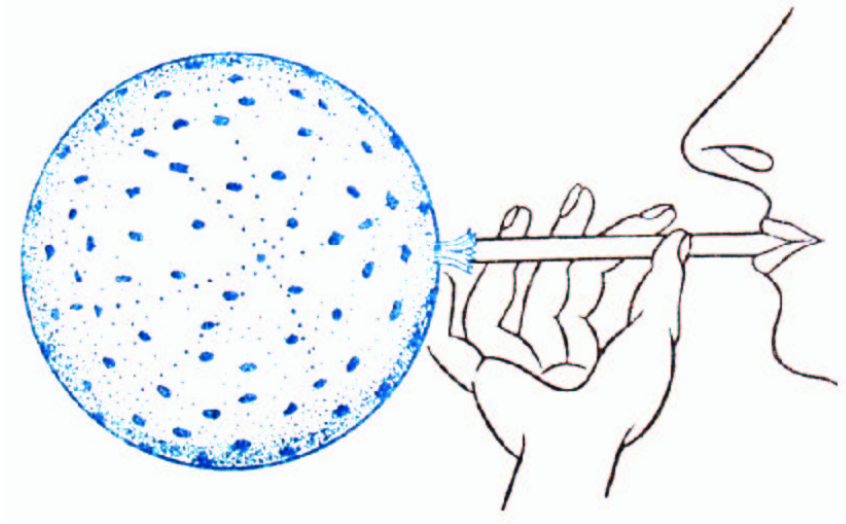




# Ewolucja Wszechświata

## Prawo Hubble'a

Obserwacja Hubble'a, że **wszystkie** obiekty oddalają się, **nie wyróżnia** w żaden sposób naszego układu odniesienia.



Dowolne dwa obiekty oddalając się będą w ten sam sposób.

⇒ rozszerzanie się przestrzeni

Czy Wszechświat będzie się rozszerzał w nieskończoność ?

Przyjmujemy, że w skalach kosmologicznych Wszechświat jest

**jednorodny** i **izotropowy**

⇒ **materia** jest rozłożona **równomiernie**

Z Ogólnej Teorii Względności wynika, że przyszłość Wszechświata wiąże się ściśle z **krzywizną** przestrzeni i zależy od **gęstości** materii we Wszechświecie.

Gęstość krytyczna:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

# Ewolucja Wszechświata

Gęstość  
materii

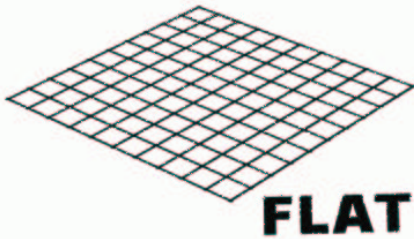
$$\rho = \rho_c$$

$$\rho < \rho_c$$

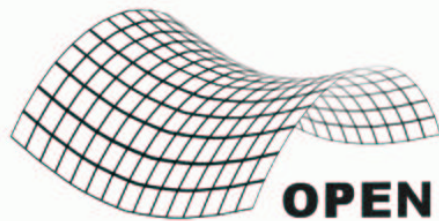
$$\rho > \rho_c$$

Krzywizna przestrzeni

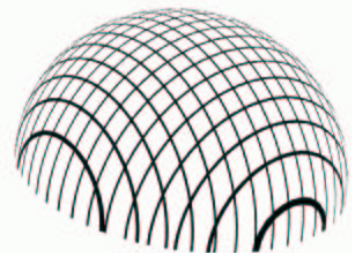
**GEOMETRY OF THE UNIVERSE**



**FLAT**



**OPEN**



**CLOSED**

$$k = 0$$

$$k = -1$$

$$k = +1$$

Przyszłość Wszechświata

asymptotycznie “zatrzyma” się

będzie zawsze rozszerzał się

kiedyś zacznie się zapadać

# Ewolucja Wszechświata

## Gęstość materii we Wszechświecie

Krzywizna przestrzeni i charakter ewolucji Wszechświata zależą od gęstości materii.

Można spróbować ją zmierzyć na różne sposoby:

- z pomiaru promieniowania gwiazd i materii międzygwiazdnej  
⇒ materia “światlista”

$$\Omega_{lumi} \sim 0.006$$

- z pomiaru zawartości lekkich pierwiastków + model nukleosyntezy (Wielki Wybuch)  
⇒ materia “barionowa”

$$\Omega_b \sim 0.04$$

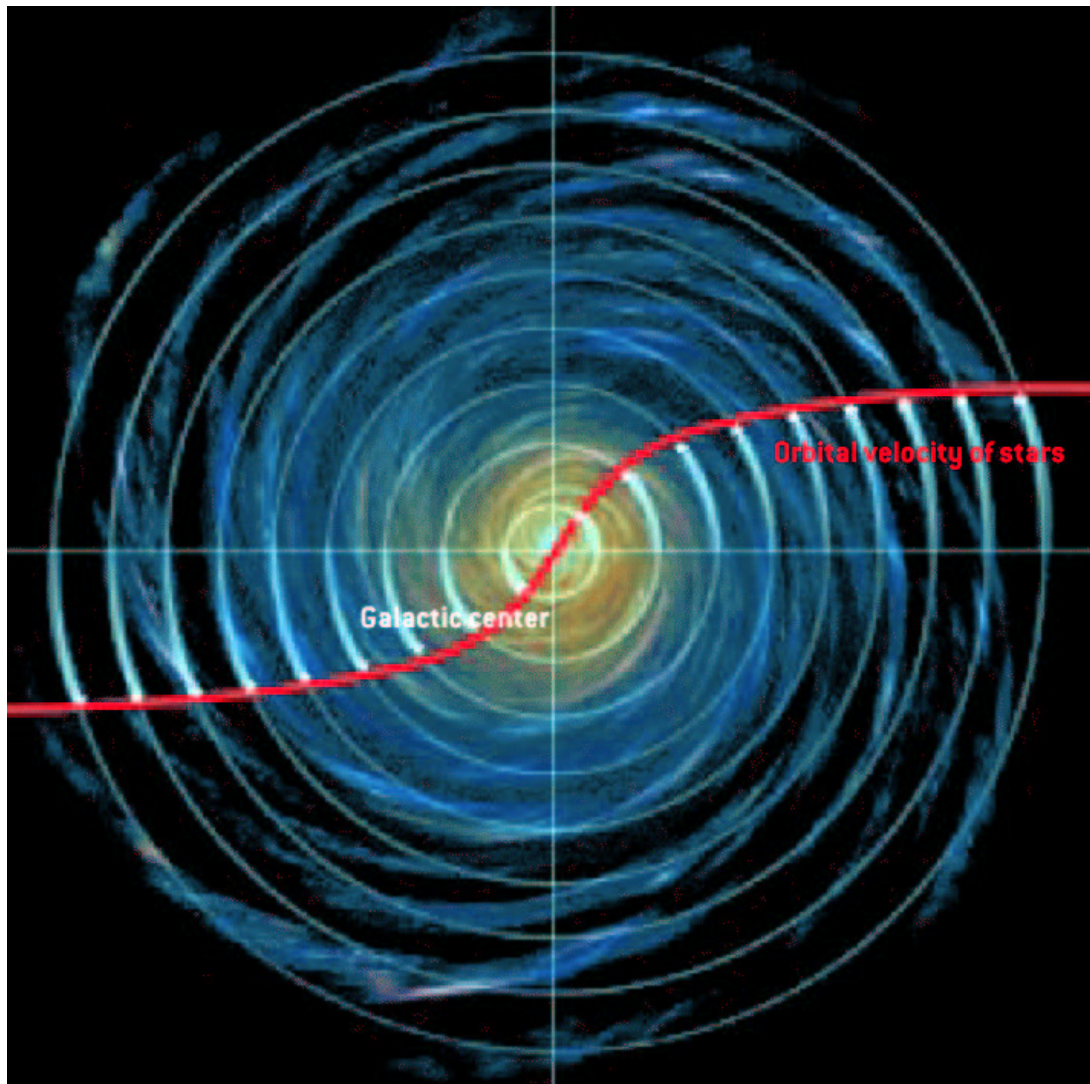
- z pomiaru oddziaływań grawitacyjnych (np. rotacja galaktyk)  
⇒ materia “grawitacyjna” (całkowita ?)

$$\Omega_m \sim 0.3$$

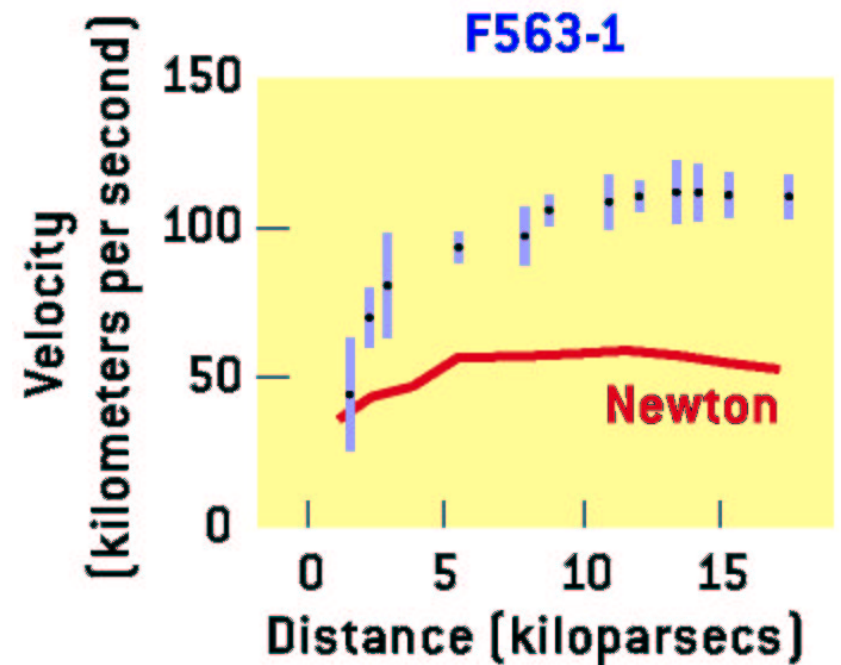
$$\Omega_m \gg \Omega_b \Rightarrow \text{ciemna materia !?}$$

# Ewolucja Wszechświata

## Ciemna materia ?



Znane nam prawa dynamiki nie tłumaczą rotacji galaktyk.



Ramiona wirują szybciej niż oczekiwaliśmy z praw grawitacji i dynamiki

⇒ ciemna materia ?

# Promieniowanie tła

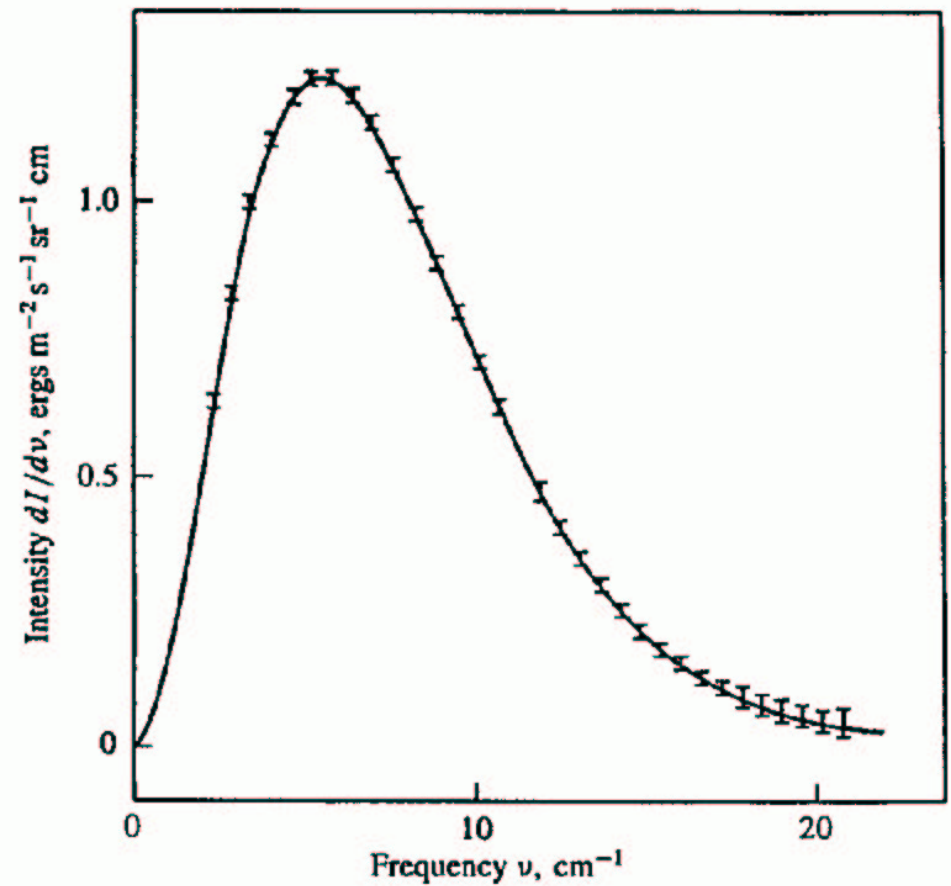
## Odkrycie

Mikrofalowe promieniowanie tła (CMB) zostało odkryte w 1965 roku przez A.A.Penzisa i R.W.Wilsona.

Rozkład widmowy promieniowania zgadza się z widmem promieniowania ciała doskonale czarnego.

$$T = 2.725 \pm 0.002 \text{ K}$$

Wyniki z satelity COBE: (1999)

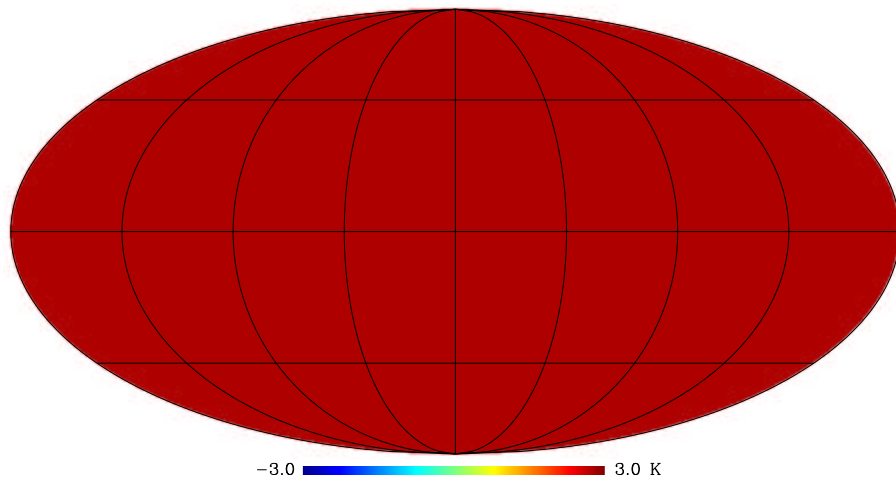




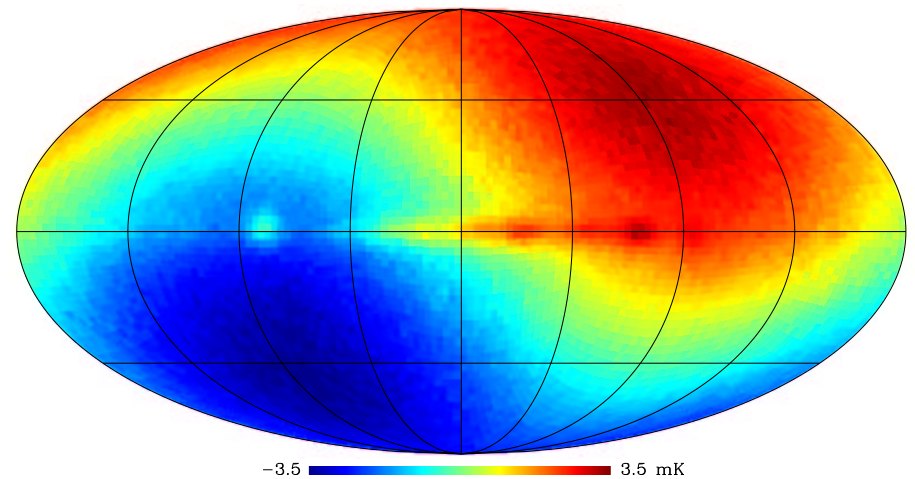
# Promieniowanie tła

## Rozkład kątowy

W pierwszym przybliżeniu ( $\Delta T \sim 1K$ )  
promieniowanie tła jest **izotropowe**:



Jednak gdy przyjżmy się bliżej  
( $\Delta T \sim 1mK$ ):

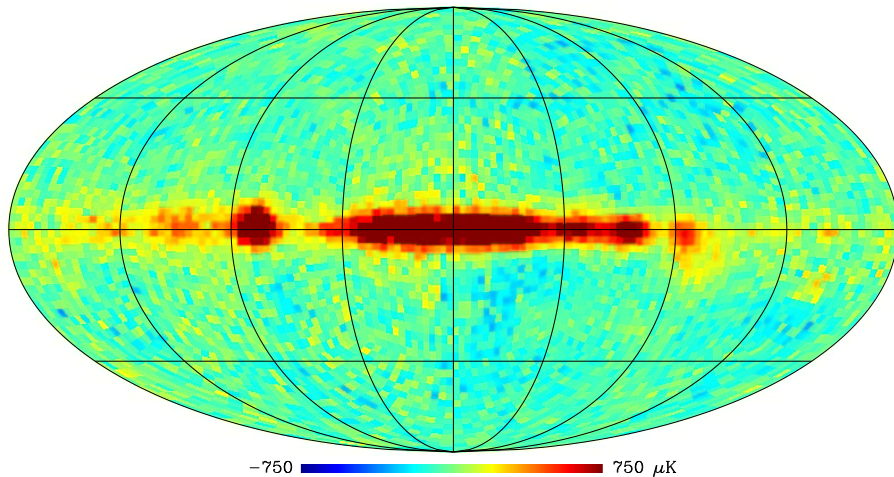


widzimy wpływ **ruchu Ziemi** względem  
'globalnego' układu.

# Promieniowanie tła

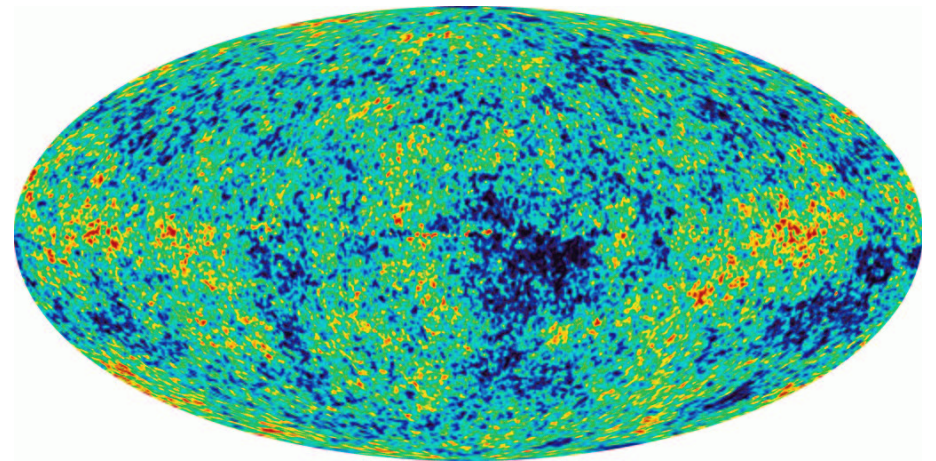
## Rozkład kątowy

Odejmując wpływ efektu Dopplera  
( $\Delta T \sim 200 \mu K$ ):



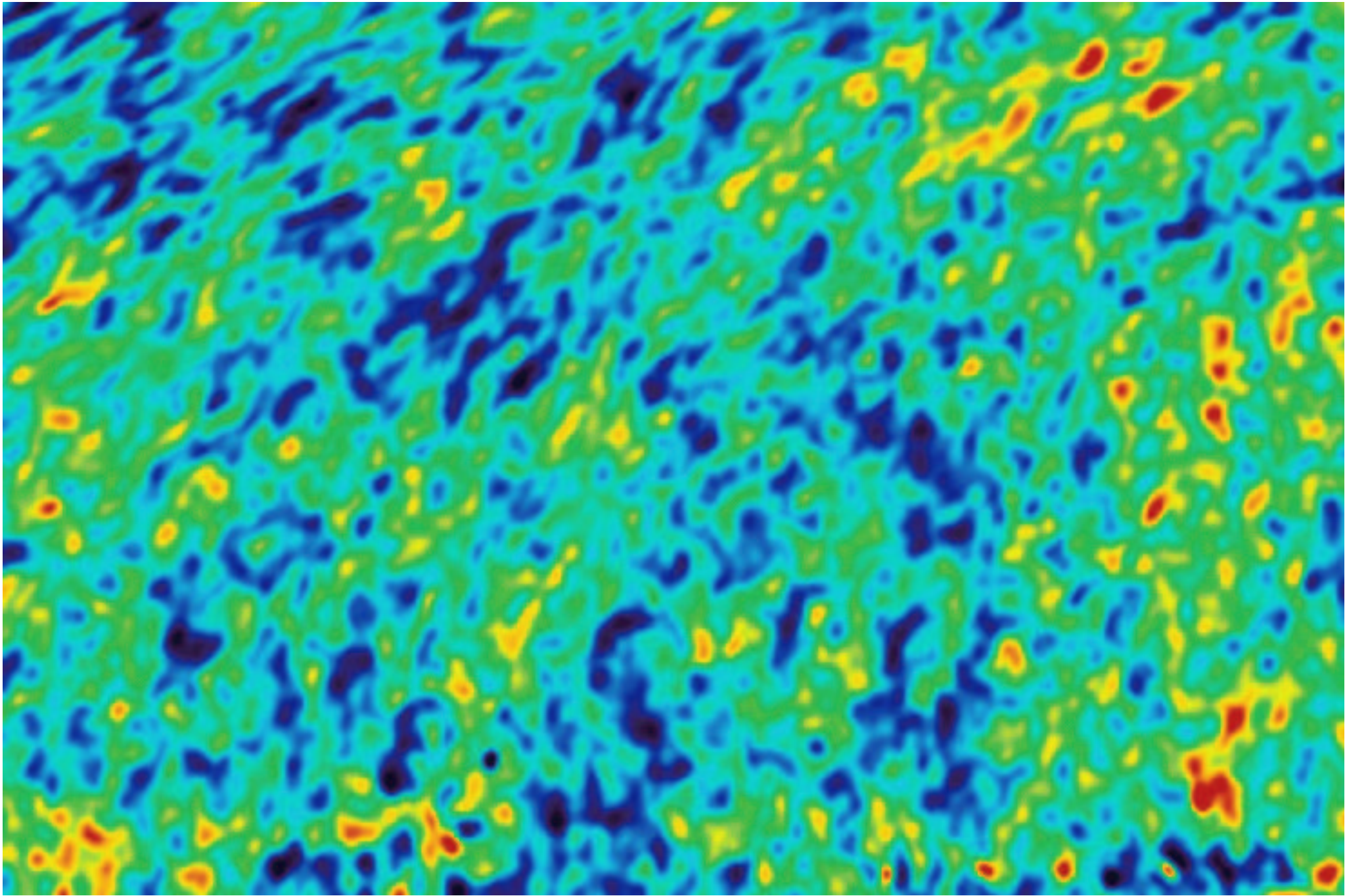
⇒ widzimy promieniowanie naszej  
galaktyki (**Drogi Mlecznej**)...

Odejmując promieniowanie **Galaktyki** i  
innych znanych **źródeł** ( $\Delta T \sim 100 \mu K$ ):



⇒ zaczyna być ciekawie !!!





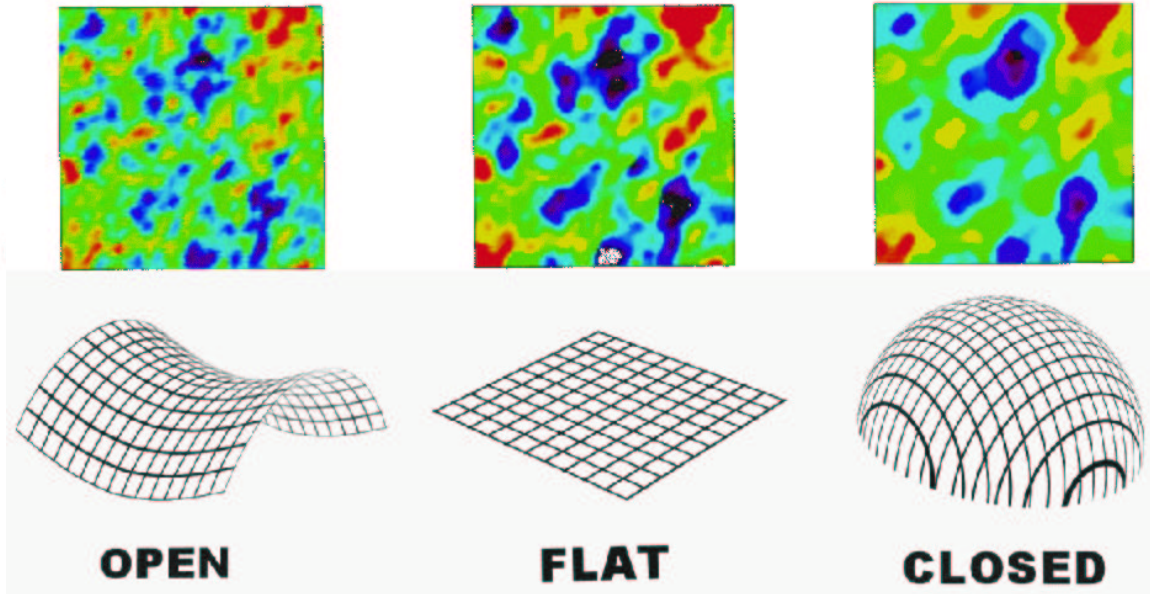
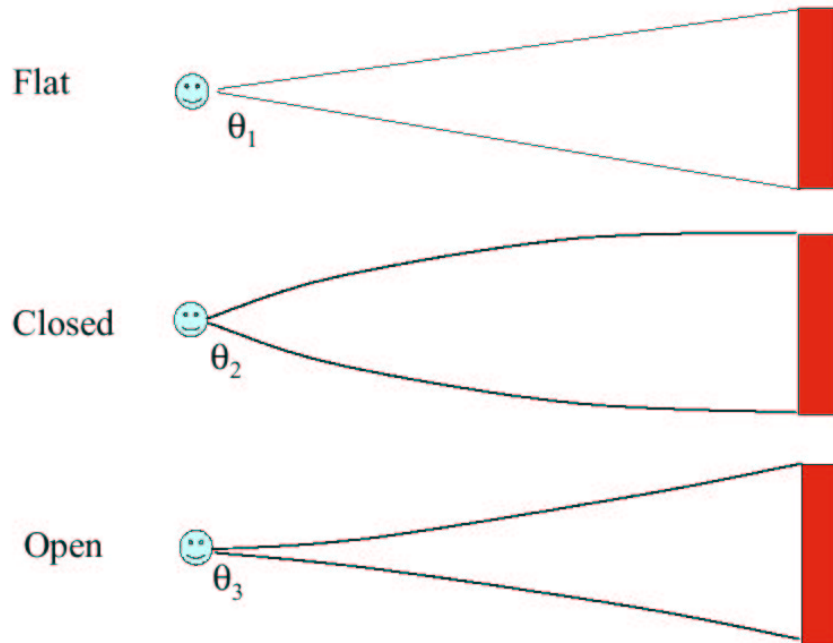


# Promieniowanie tła

## Fluktuacje

Rozmiary fluktuacji jakie obecnie obserwujemy zależy też silnie od **krzywizny** Wszechświata !

Wyniki symulacji:



# WMAP

Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

## Detektor

Sonda kosmiczna wystrzelona 30.06.2001.

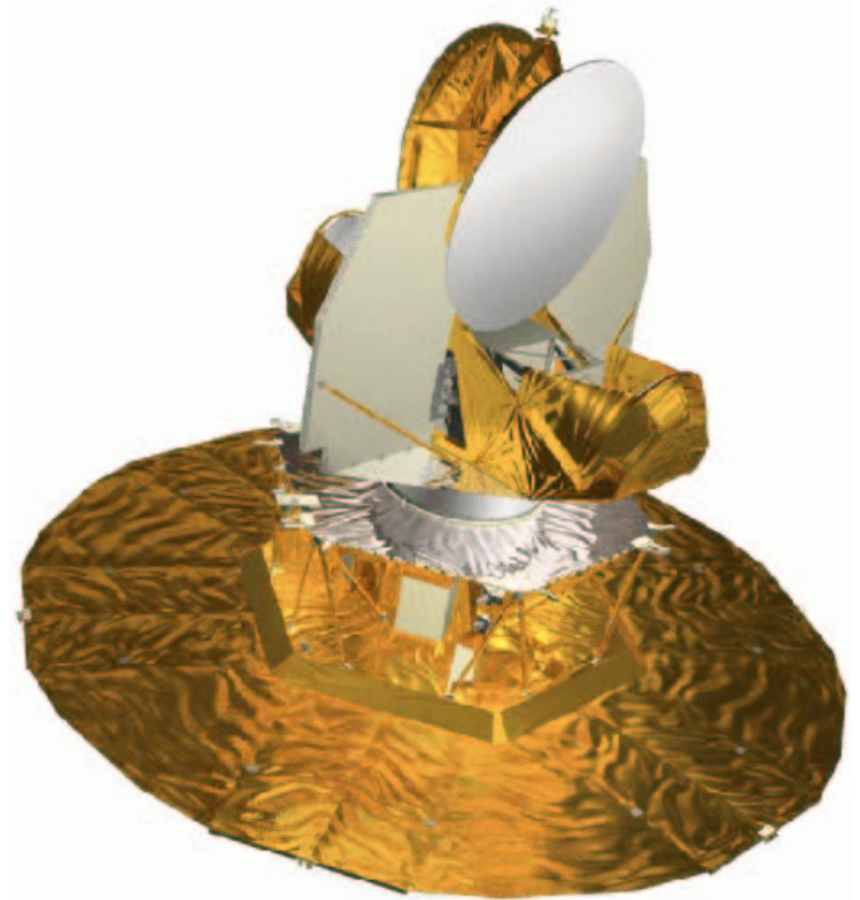
Pomiar promieniowania mikrofalowego  
w 5 przedziałach częstości:

od 23 GHz (13 mm) do 94 GHz (3.2 mm).

Porównanie pomiarów w różnych zakresach częstości umożliwia efektywne odjęcie tła pochodzącego od Galaktyki.

Aby zminimalizować tło pochodzące od Ziemi i Słońca sondę umieszczono na orbicie wokół tzw. punktu Lagrange'a

⇒ quasi-stabilna konfiguracja WMAP-Ziemia-Słońce

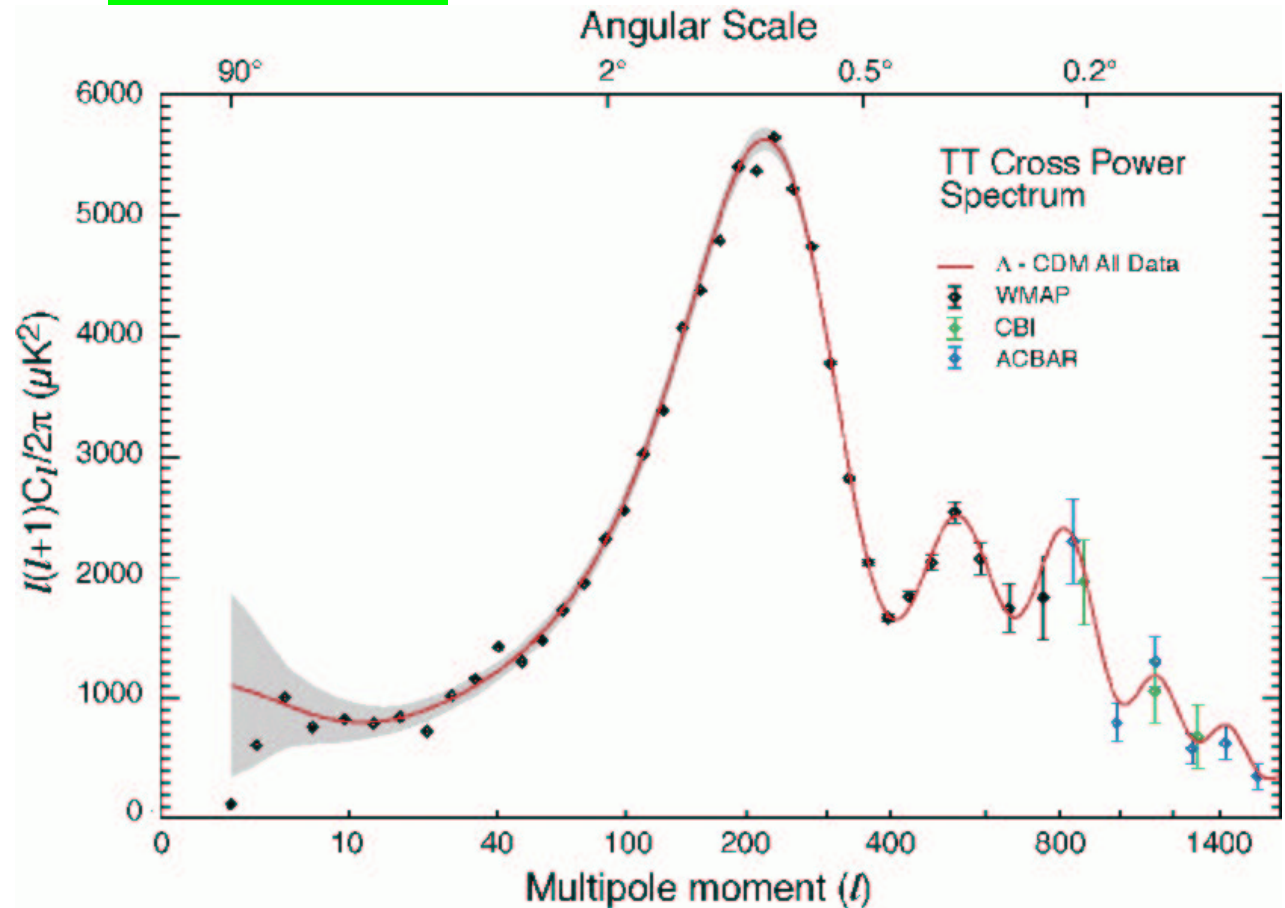


# WMAP

Wyniki (2003 !!!)

Bardzo precyzyjny pomiar korelacji kątowych w promieniowaniu tła.

Możliwe jednoczesne dopasowanie wielu parametrów kosmologicznych



Dominują fluktuacje o rozmiarach kątowych rzędu  $0.8^\circ$  ( $l \approx 220$ )

$\Rightarrow$  gęstość całkowita:  $\rho_{tot} = 1.02(\pm 0.02) \rho_c$

$\Rightarrow$  Wszechświat jest płaski !?... ( $k = 0$ )

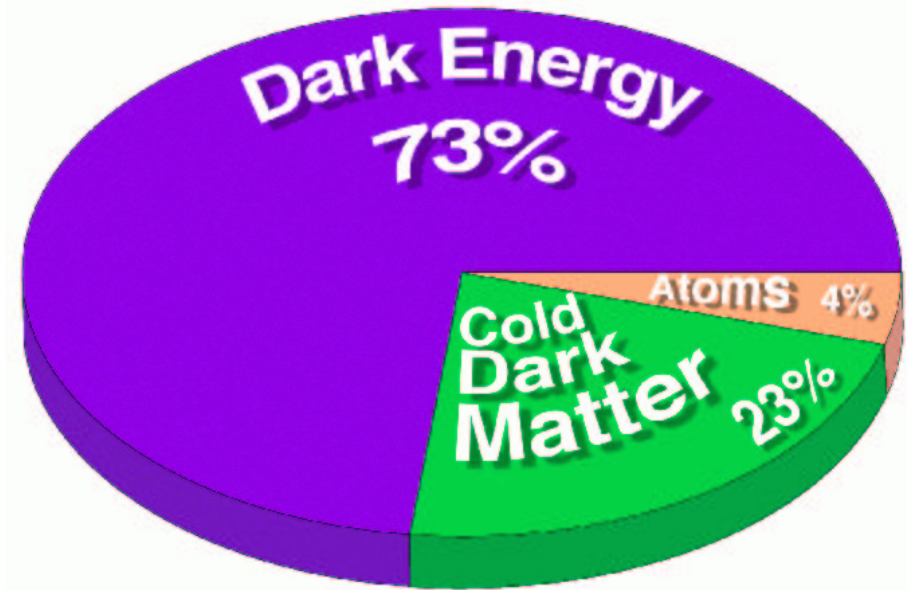
## WMAP

### Wyniki

Okazuje się, że **atomy** (bariony) wypełniają tylko około **4%** Wszechświata.

**23%** stanowi tzw. **ciemna materia**, której natury na razie nie znamy (?)...

**73%** to “**ciemna energia**”, którą opisujemy poprzez **stałą kosmologiczną** (?)



**Wszechświat** zdominowany przez stałą kosmologiczną **rozszerza się coraz szybciej !!!**

Wiek Wszechświata:

$$T = 13.7 \pm 0.2 \text{ Gyr} \quad (\text{poprzednio } \pm 1.7 \text{ Gyr})$$

Obecna wartość stałej Hubble'a:

$$H = 71_{-3}^{+4} \text{ km}/(s \cdot \text{Mpc})$$