Zasada zachowania pędu

Fizyka I (B+C)

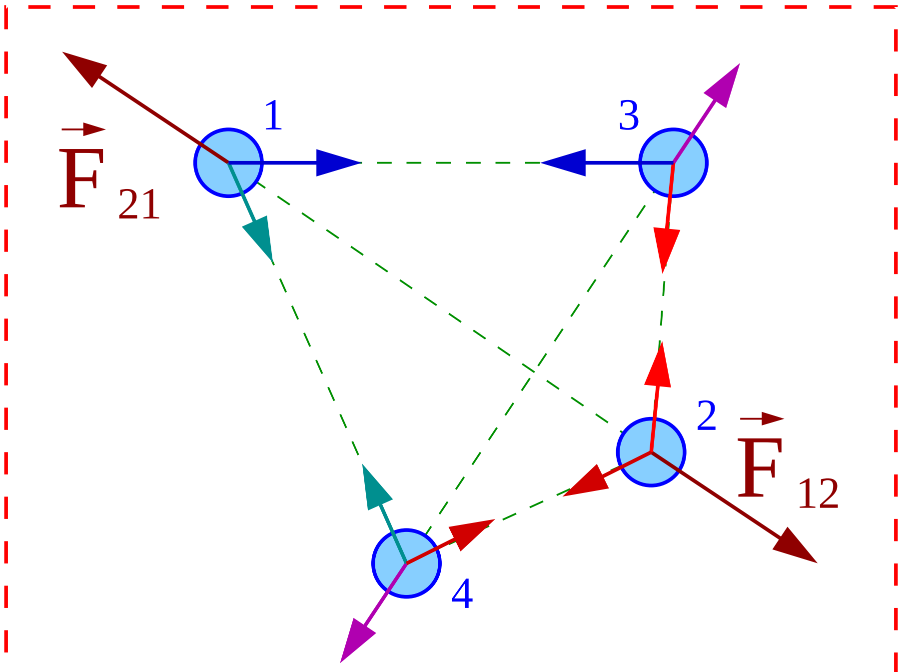
Wykład XIII:

- Zasada zachowania pędu
- Zasada zachowania momentu pędu
- Ruch ciał o zmiennej masie

Zasada zachowania pędu

Układ izolowany

Każde ciało może w dowolny sposób oddziaływać z innymi elementami układu.



Brak oddziaływań ze światem zewnętrznym.

III zasada dynamiki

Siły z którymi działają na siebie ciała i i j:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Suma sił działających ciało i:

$$\vec{F}_i^{\Sigma} = \sum_j \vec{F}_{ji}$$

Suma sił działających na układ:

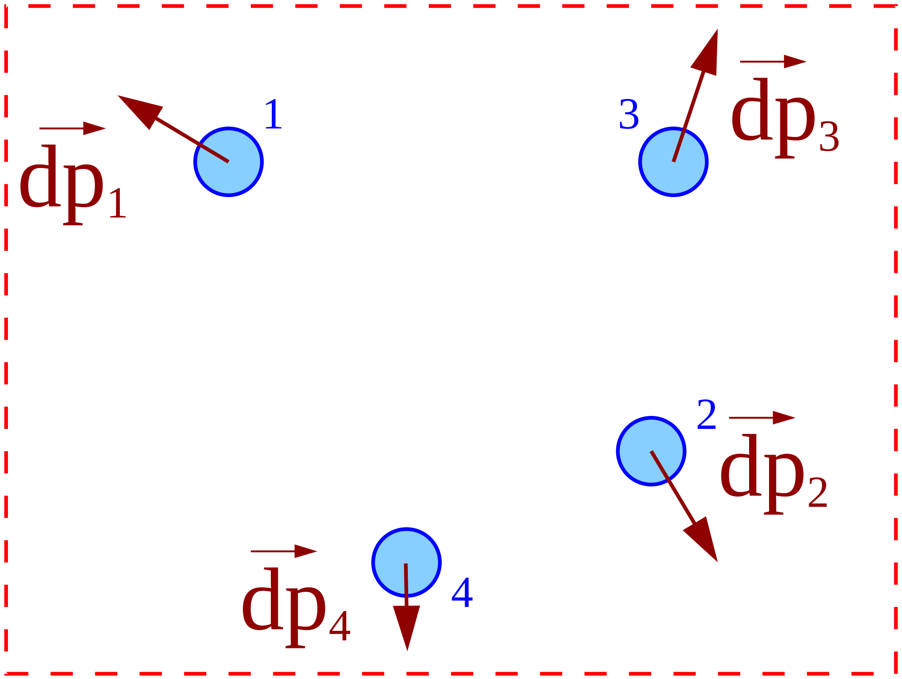
$$\begin{aligned}\vec{F}_{tot} &= \sum_i \vec{F}_i^{\Sigma} = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ji} \\ &= \sum_j \sum_i -\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{tot}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{tot} = 0$$

Zasada zachowania pędu

II zasada dynamiki

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\Sigma}$$



izolowany układ inercjalny

Pęd układu

Prawo ruchu układu:

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i^{\Sigma} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

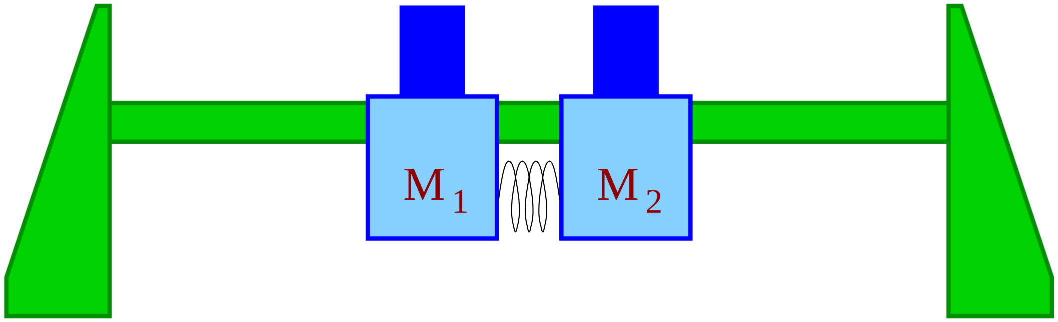
$$= \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i$$

$$\vec{F}_{tot} = 0 \Rightarrow \sum_i \vec{p}_i = \text{const}$$

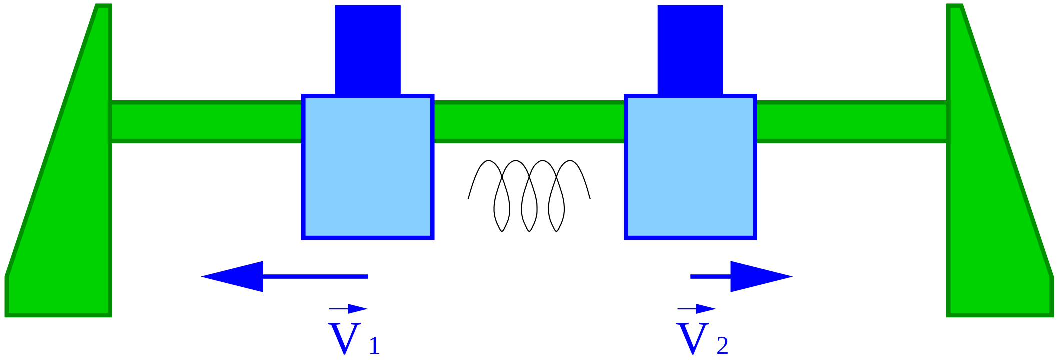
Dla dowolnego układu izolowanego, suma pędów wszystkich elementów układu pozostaje stała.

Zasada zachowania pędu

Oddziaływanie dwóch ciał



$M_1 \; < M_2$



Układ “rozpada się” pod wpływem sił wewnętrznych.

Jeśli na początku wszystkie obiekty spoczywają

$$\sum_i \vec{p}_i \;=\; 0$$

to i po “rozpadzie” suma pędów musi być równa 0.

Dwa ciała: $(v_i \ll c)$

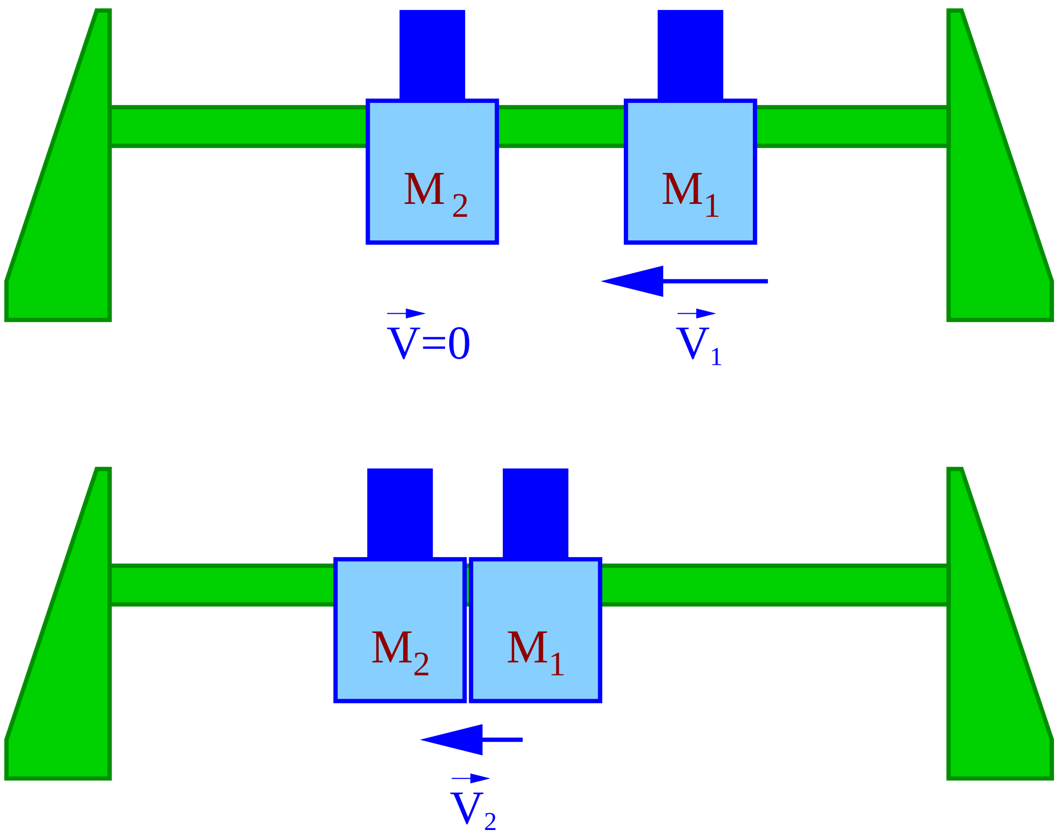
$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \;=\; 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_2 \;=\; -\frac{m_1}{m_2}\cdot\vec{v}_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_2}{v_1} \;=\; \frac{m_1}{m_2}$$

Zasada zachowania pędu

Oddziaływanie dwóch ciał



Zderzenie całkowicie niesprężyste

(po zderzeniu ciała pozostają trwale złączone)

Pęd początkowy: $\vec{p}_i = m_1 \vec{v}_1$

Pęd końcowy: $\vec{p}_f = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_2$

Zasada zachowania pędu:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_1$$

Zasada zachowania momentu pędu

Siły centralne

Jeśli układ ciał (lub pojedyńcze ciało) działa jakaś siła zewnętrzna $\vec{F}_{tot} \neq 0$
to pęd układu musi się zmieniać: $\sum \vec{p}_i \neq$ const.

Siły które działają na układ często są
siłami centralnymi - działają w kierunku ustalonego źródła siły.

Jeśli położenie źródła przyjmiemy za środek układu $\Rightarrow \vec{F}_{tot} = F(r, \ldots) \cdot \vec{i}_r$

Przykład:

- siła grawitacyjna $F(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$
- siła kulombowska $F(r) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_\circ r^2}$
- siła spężysta $F(r) = -k \cdot r$

Czy można coś "uratować" z zasady zachowania pędu ?...

Zasada zachowania momentu pędu

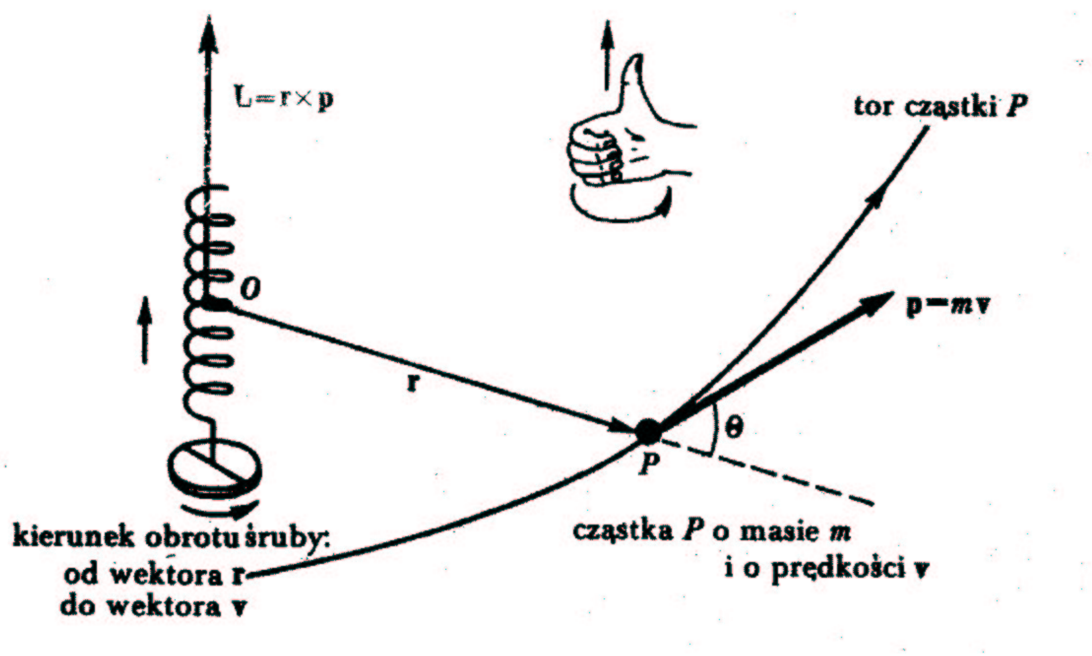
Moment pędu

Zdefiniujmy dla punktu materialnego:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$\Leftarrow$ moment pędu **względem O**

zależy od wyboru początku układu



Dla $v \ll c$

$$\vec{L} = m\,\vec{r} \times \vec{v}$$

$$L = m\,r\,v \sin\theta$$

Zasada zachowania momentu pędu

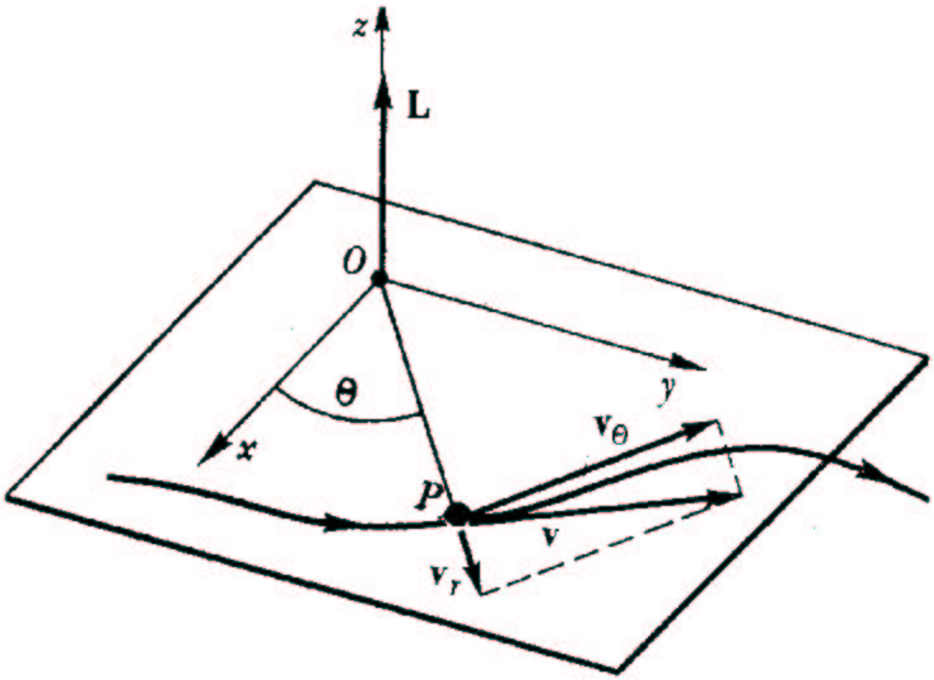
Moment pędu

Ruch po płaszczyźnie:

$$\vec{L} = m\,\vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta)$$

$$L = m\,r\,v_\theta$$

$$\Rightarrow \quad L = m\,r^2 \frac{d\theta}{dt} = m\,r^2\,\omega$$



Przypadek szczególny:

ruch po okręgu - r=const

Moment bezwładności

$$I = m\,r^2$$

$\Rightarrow$ moment pędu możemy przedstawić w ogólnej postaci

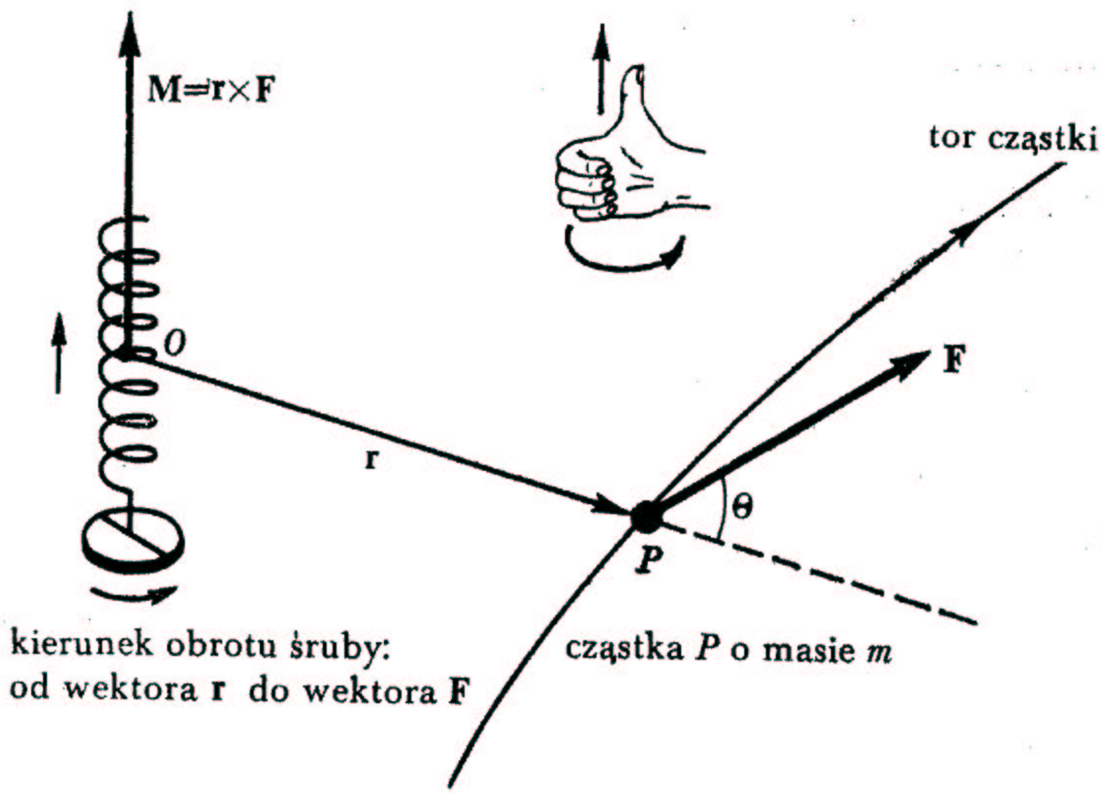
$$\vec{L} = I\,\vec{\omega}$$

Zasada zachowania momentu pędu

Moment siły

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\Leftarrow$ moment siły **względem O**



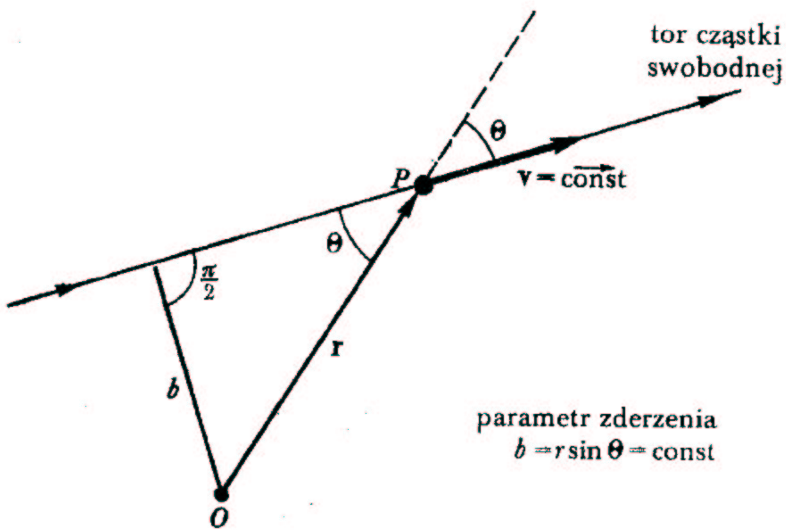
Równanie ruchu

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} \\
&= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\
&= \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} \\
&= 0 + \vec{M}
\end{aligned}$$

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

Zasada zachowania momentu pędu

Cząstka swobodna



Moment pędu względem dowolnego punktu 0 pozostaje stały:

$$L \;=\; m\,v\,r\,\sin\theta \;=\; m\,v\,b \;=\; \mathrm{const}$$

b - parametr zderzenia
odległość najmniejszego zbliżenia do O

Siła centralna

Moment siły: (względem źródła)

$$\vec{M} \;=\; \vec{r}\times\vec{F}$$
$$\;=\; \vec{r}\times\vec{i}_r\cdot F(r,\ldots) \;=\; 0$$

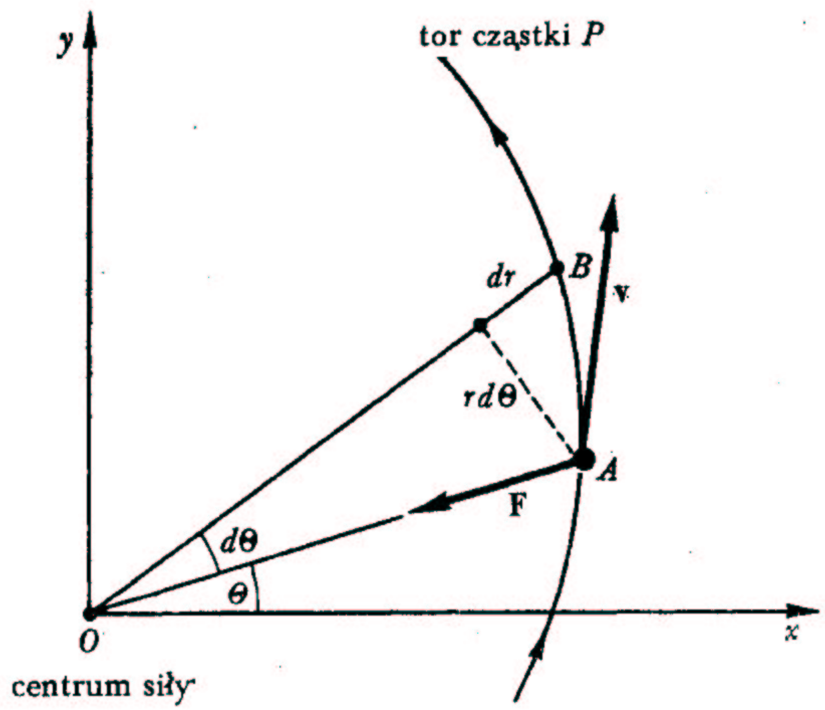
$$\boxed{\vec{L} = \mathrm{const}}$$

Moment pędu, liczony względem źródła siły centralnej pozostaje stały.

Zasada zachowania momentu pędu

Prędkość polowa

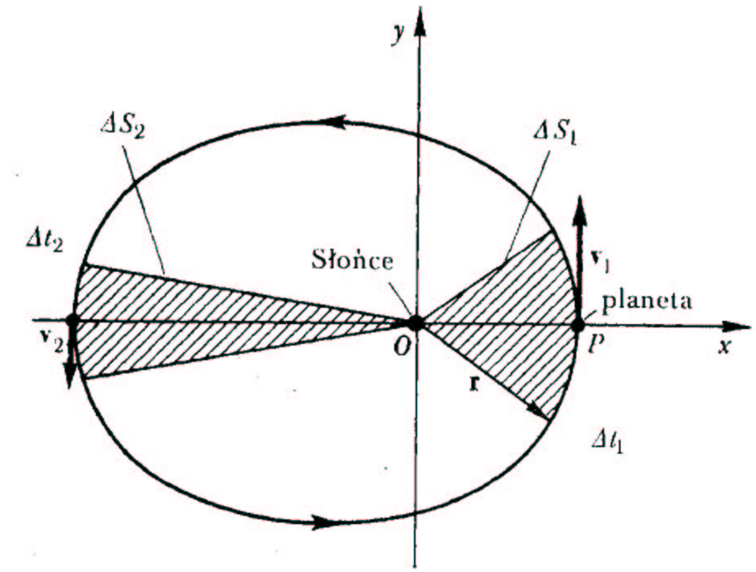
Pole jakie wektor wodzący punktu zakreśla w jednostce czasu: $\frac{dS}{dt}$



$$dS_{OAB} = \frac{1}{2}\, r\, r d\theta = \frac{1}{2}\, |\vec{r} \times \vec{dr}| = \frac{1}{2}\, |\vec{r} \times \vec{v}|\; dt$$

II prawo Keplera

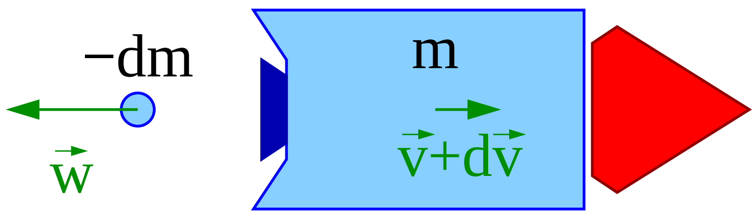
$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\, |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{L}{2\, m} = \text{const}$$



W ruchu pod działaniem sił centralnych prędkość polowa jest stała.

Ruch ciał o zmiennej masie

Rozważmy ruch ciała o zmiennej masie. W ogólnym przypadku: $m = m(\vec{r}, \vec{v}, t)$



Od ciała o masie $m - dm$ poruszającego się z prędkością $\vec{v}$ odłącza się element $-dm > 0$ poruszający się z prędkością $\vec{w}$ ($dm < 0$ bo masa ciała maleje)

Z zasady zachowania pędu:

$$(m - dm)\,\vec{v} = m\,(\vec{v} + d\vec{v}) - dm\,\vec{w}$$

$$\Rightarrow \quad d\vec{p} = m\,d\vec{v} = (m - dm)\,\vec{v} - m\,\vec{v} + dm\,\vec{w}$$

$$= dm\,(\vec{w} - \vec{v}) \equiv dm\,\vec{v}_{odrz}$$

Siła odrzutu (siła ciągu rakiety):

$$\vec{F}_{odrz} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\,\vec{v}_{odrz} \qquad \frac{dm}{dt} < 0$$

Ruch ciał o zmiennej masie

Równanie ruchu

Ruch ciała pod wpływem siły odrzutu:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{zewn} + \frac{dm}{dt}\,\vec{v}_{odrz}$$

Zaniedbując wpływ sił zewnętrznych (np. pola grawitacyjnego):

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\,\vec{v}_{odrz}$$

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dm}\cdot\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dt}\,\vec{v}_{odrz}$$

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dm} = \vec{v}_{odrz}$$

Całkując stronami:

$$\int_{v_\circ}^{v_k}\frac{d\vec{v}}{\vec{v}_{odrz}} = \int_{m_\circ}^{m_k}\frac{dm}{m}$$

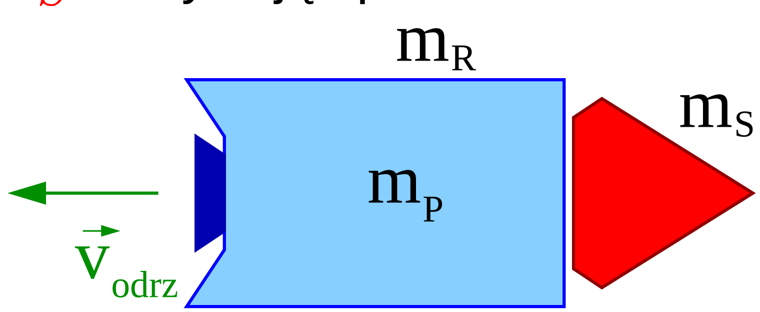
$$\Rightarrow \quad \vec{v}_k = \vec{v}_\circ + \vec{v}_{odrz}\cdot\ln\left(\frac{m_k}{m_\circ}\right)$$

wzór Ciołkowskiego

Ruch ciał o zmiennej masie

Rakieta jednostopniowa

Rakieta o masie m_R ma wynieść satelitę o masie m_S, zużywając paliwo o masie m_P:



Aby uzyskać II prędkość kosmiczną $v_k \approx 11\ km/s$ (np. lot na Księżyc) przy silniku rakietowym o $v_\circ = 3\,km/s$

Możliwa do uzyskania prędkość końcowa:

$$v_k = v_{odrz} \cdot \ln\left(\frac{m_S + m_R + m_P}{m_S + m_R}\right)$$

$$\approx v_{odrz} \cdot \ln(1 + f)$$

$$f = \exp\left(\frac{v_k}{v_\circ}\right) - 1 \approx 38$$

gdzie: $f = \dfrac{m_P}{m_R}$ $\qquad m_s \ll m_R$

stosunek masy paliwa do masy rakiety

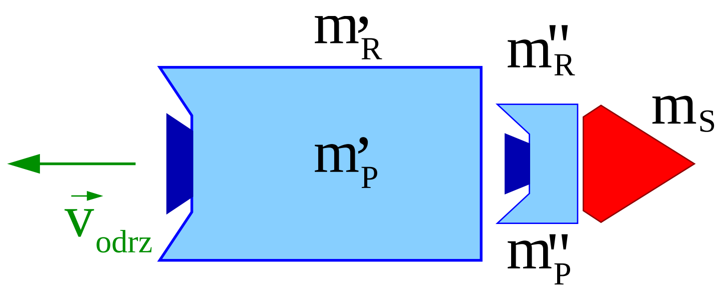
Teoretycznie możliwe,
praktycznie niewykonalne (?)...
i nieopłacalne !...

Ruch ciał o zmiennej masie

Rakieta dwustopniowa

Rakietę dzielimy na dwa człony o masach m'_R i m''_R, $\qquad m'_R + m''_R = m_R$

w których znajduje się paliwo o masie m'_P i m''_P: $\qquad m'_P + m''_P = m_P$



Prędkość końcowa:

$$v_k = v_{odrz} \cdot \left[\ln \left(\frac{m_S + m_R + m_P}{m_S + m_R + m''_P} \right) + \ln \left(\frac{m_S + m''_R + m''_P}{m_S + m''_R} \right) \right]$$

W przybliżeniu $m_S \ll m''_R \ll m'_R$: $\qquad v_k \approx v_{odrz} \cdot 2 \ln(1+f)$

Aby uzyskać II prędkość kosmiczną $v_k \approx 11\ km/s$ przy o $v_\circ = 3\ km/s$:

$$f = \exp\left(\frac{v_k}{2\ v_\circ}\right) - 1 \approx 5.3$$

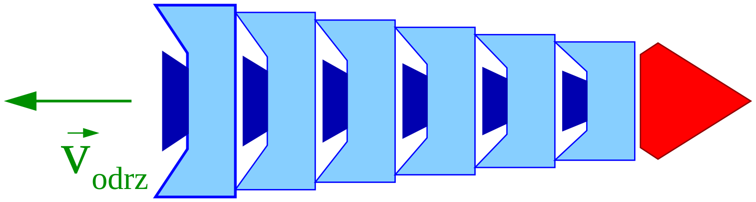
Dla $f \approx 10$ (dla obu członów) można wystrzelić w kosmos $\quad m_S \approx 0.6\%\ (m_R + m_P)$

przy optymalnym wyborze $m''_R \approx 7\%\ m_R$

Ruch ciał o zmiennej masie

Rakieta wielostopniowa

Rakieta składa się z wielu członów.
W każdym z nich stosunek masy paliwa do “obudowy” wynosi f



W granicy wielu bardzo małych członów:

$$m\,d\vec{v} = dm\,\vec{v}_{odrz} \cdot \frac{f}{f+1}$$

Co sprowadza się do:

$$v_k = v_{odrz} \cdot \frac{f}{f+1} \cdot \ln\left(1 + \frac{m_R}{m_S}(1+f)\right)$$

Aby uzyskać II prędkość kosmiczną dla $m_S \approx 100\;kg$ przy rakiecie o $f = 10$:

$$m_R = \frac{m_S}{1+f}\left[\cdot \exp\left(\frac{v_k\,(1+f)}{v_\circ\, f}\right) - 1\right]$$

$$m_R \approx 500\;kg$$
$$m_P \approx 5000\;kg$$

Przy rakiecie jednoczłonowej, przy tych samych m_S i m_R potrzebaby 228’000 kg paliwa !!!

Dla rakiety dwuczłonowej:
$m_R \approx$ 1600 kg, $m_P \approx$ 16’000 kg