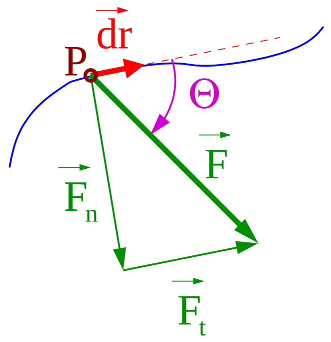
Zasada zachowania energii

Fizyka I (B+C)

Wykład XIV:

- Praca, siły zachowawcze i energia potencjalna
- Energia kinetyczna i zasada zachowania energii
- Zderzenia elastyczne

Praca i energia

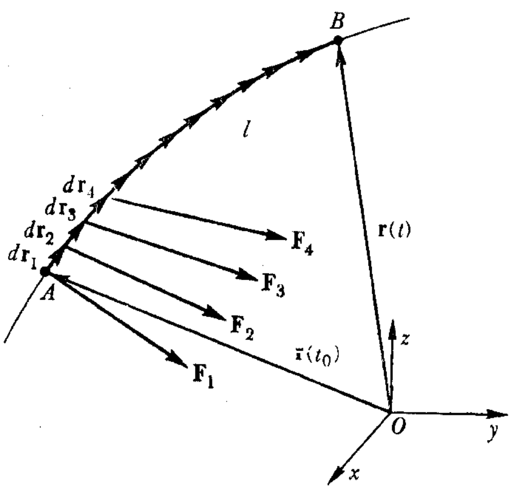


Praca

Siła $\vec{F}$ działa na punkt materialny P

Praca jaką wykonuje siła przy przesunięciu P o $d\vec{r}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos\theta ds = F_t\, ds$$



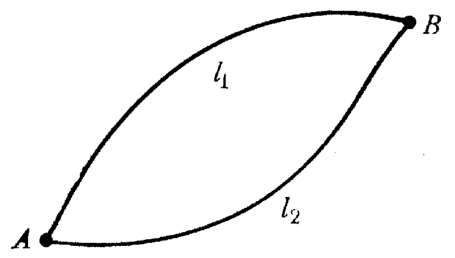
Siły prostopadłe do przesunięcia nie wykonują pracy!
siła Lorenza, siła Coriolisa, siły reakcji więzów...

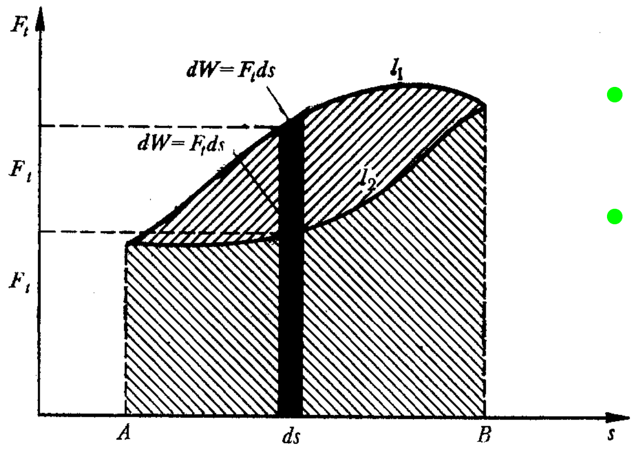
Praca siły $\vec{F}(\vec{r})$ na drodze między A i B

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Praca i energia

Praca





W ogólnym przypadku praca W_{AB} jaką wykonujemy podczas ruchu punktu z A do B może zależeć od:

- przebytej drogi l
  np. praca sił tarcia będzie proporcjonalna do l
- toru ruchu
  np. jeśli siły oporu zależą od wyboru toru
- prędkości
  siły oporu w ośrodku zależą od prędkości
- czasu
  jeśli działające siły zależą od czasu

Praca i energia

Energia potencjalna

Siła $\vec{F}(\vec{r})$ jest zachowawcza (konserwatywna), jeśli praca przez nią wykonana zależy tylko od położenia punktów początkowego (A) i końcowego (B)

$\Rightarrow$ można ją wyrazić przez zmianę energii potencjalnej

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) = -\Delta E_p$$

Siła zachowawcza nie może zależeć od czasu ani od prędkości.

Jeśli droga jest zamknięta to praca jest równa zeru

$$\int_A^A \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0$$

cyrkulacja (krążenie) $\vec{F}$

Praca i energia

Przykład:

Ruch w jednorodnym polu grawitacyjnym. Siła ciężkości $\vec{F} = m\,\vec{g} = m\,(0, -g, 0)$

$$\int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \;=\; \vec{F} \int_A^B d\vec{r} \;=\; \vec{F}\,(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \;=\; -m\,\vec{g}\,(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \;=\; m\,g\,(y_A - y_B)$$

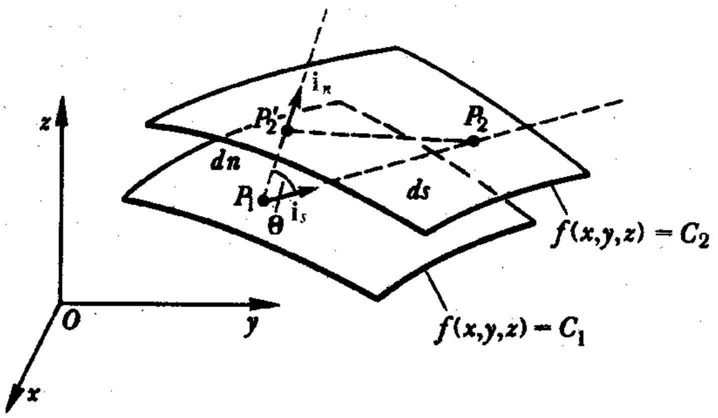
$\Rightarrow$ energia potencjalna dla jednorodnego pola grawitacyjnego

$$E_p(\vec{r}) \;=\; -m\,\vec{g}\,\vec{r} \;=\; m\,g\,y$$

Siłami zachowawczymi są też wszystkie siły centralne, zależne tylko od odległości
$\vec{F} = F(r) \cdot \vec{i}_r$ siła kulombowska, siła grawitacyjna, siły sprężystości...

Praca i energia

Gradient



Gradient wskazuje kierunek w którym następuje największa zmiana wartości funkcji skalarnej $f(x,y,z)$.

Wartość gradientu odpowiada wartości pochodnej funkcji $f(x,y,z)$ wzdłuż tego kierunku.

$$\textbf{grad}\, f \;=\; \vec{\nabla} f \;=\; \vec{i}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial f}{\partial z} \;=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

"nabla" $\Rightarrow$ $$\vec{\nabla} \;=\; \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} f \;=\; \vec{i}_n \frac{\partial f}{\partial n}$$ $\vec{n}$ - wektor normalny do f=const

Praca i energia

Siła a energia potencjalna

Praca wykonana przy infintezymalnym przesunięciu $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\,dE_p$$

zmiana energii potencjalnej $\Rightarrow$ $$= -\frac{\partial E_p}{\partial x}\,dx - \frac{\partial E_p}{\partial y}\,dy - \frac{\partial E_p}{\partial z}\,dz$$

Otrzymujemy:

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p}$$

Znajomość potencjału siły zachowawczej jest rownoważna znajomości samej siły.

Energia potencjalna jest określona z dokładnością do stałej, istotne są tylko jej zmiany.

Praca i energia

Energia kinetyczna

Praca jaką wykonuje siła $\vec{F}$ przy przesunięciu P o ds

$$dW = F_t\,ds = m\,a_t\,ds = m\,\frac{dv}{dt}\,ds$$

$\frac{dv}{dt}\,ds = dv\,\frac{ds}{dt}$ $\Rightarrow$ $$= m\,\frac{ds}{dt}\,dv = m\,v\,dv$$

Praca siły $\vec{F}(\vec{r})$ na drodze między A i B

$$W_{AB} = \int_A^B F_t(s) \cdot ds = \int_A^B mv\,dv = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = E_k^B - E_k^A = \Delta E_k$$

Niezależnie od postaci siły $\vec{F}$ i drogi — na ciało nie działają inne siły, układ inercjalny

praca siły jest równa zmianie energii kinetycznej ciała $E_k = \frac{mv^2}{2}$

Zasada zachowania energii

Zasada zachowania energii

Praca siły zachowawczej $\vec{F}(\vec{r})$ pomiędzy A i B

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_p^A - E_p^B$$

Z drugiej strony, praca siły działającej na ciało:

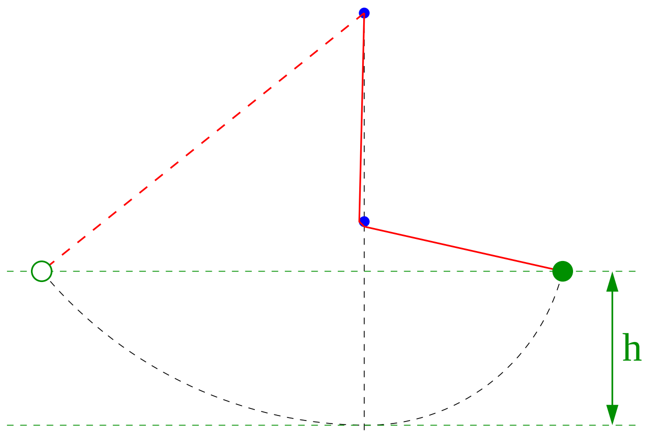
$$\begin{aligned} W_{AB} &= E_k^B - E_k^A \\ \Rightarrow \quad E_k^B - E_k^A &= E_p^A - E_p^B \\ \Rightarrow \quad E_k^B + E_p^B &= E_k^A + E_p^A \\ \Rightarrow \quad E &= E_p + E_k = \mathrm{const} \end{aligned}$$

W ruchu pod działaniem sił zachowawczych energia całkowita jest zachowana.

Zasada zachowania energii

Wahadło Galileusza

Wysokość na jaką wznosi się wahadło nie zmienia się przy zmianie długości nici:

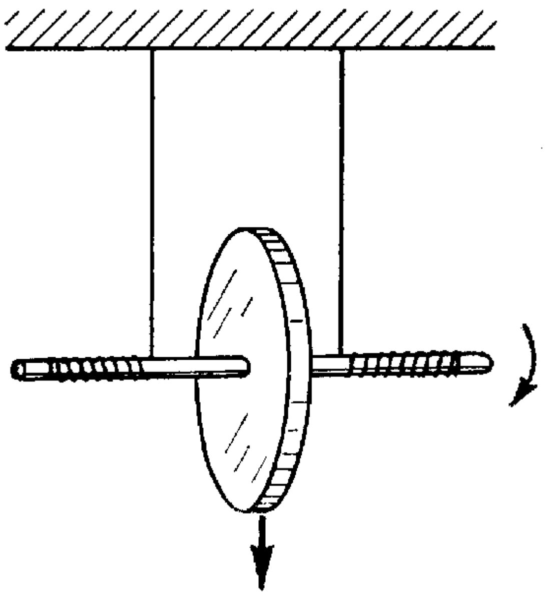


$$E_p + E_k = E = \mathrm{const}$$

$$E_k = 0 \Rightarrow m\,g\,h = E$$

siły reakcji więzów nie wykonują pracy

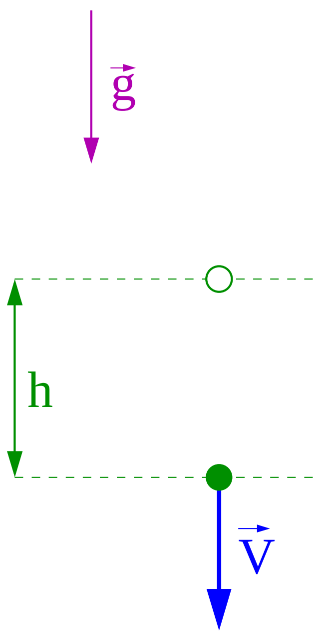
Koło Maxwella



Przemiana energii potencjalnej w energię kinetyczną ruchu obrotowego.

Zasada zachowania energii

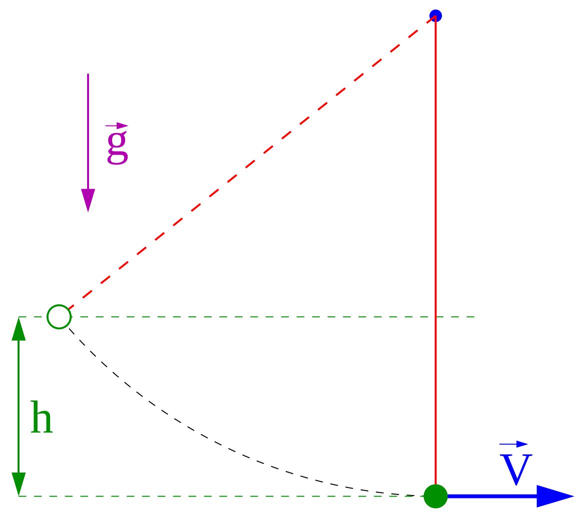
Spadek swobodny



W jednorodnym polu $\vec{g}$ ciało spada swobodnie z wysokości h $(\vec{v}(0) = 0)$.

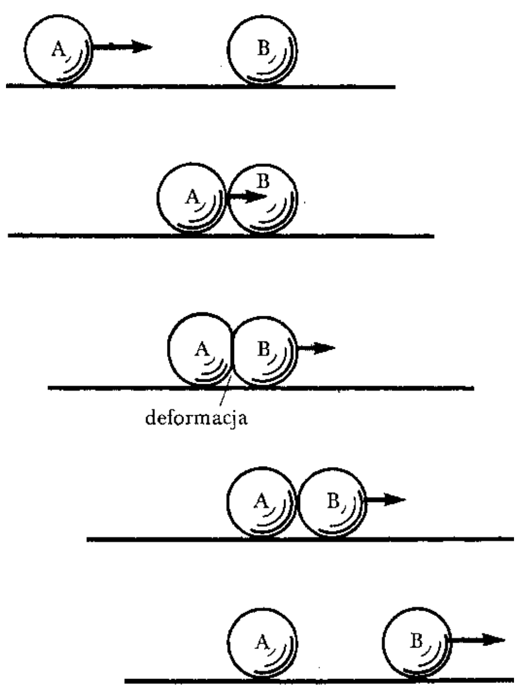
Prędkość końcowa z zasady zachowania energii:

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$
$$\frac{m\,v^2}{2} = m\,g\,h$$
$$v = \sqrt{2\,g\,h}$$



Taką samą prędkość uzyska wahadło puszczone z wysokości h

Zderzenia



Poprzednio rozpatrywaliśmy zderzenia ciał z punktu widzenia zasady zachowania pędu (i momentu pędu)

zasada zachowania pędu jest zawsze bezwzględnie spełniona

Czy zachowana jest energia kinetyczna ?

TAK

- jeśli działające siły mają charakter zachowawczy

siły kulombowskie, siły spężystości

$$\Delta E_p = 0 \Rightarrow \Delta E_k = 0$$

NIE

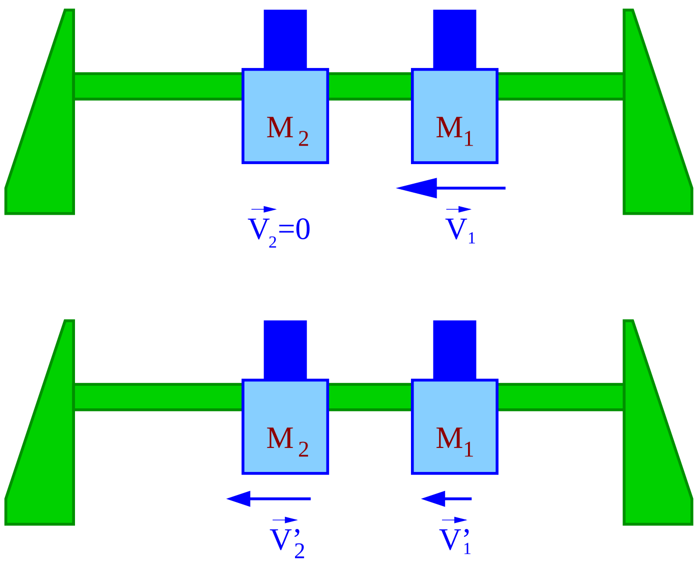
- jeśli mamy wkład sił niezachowawczych

w wyniku zderzenia następują trwałe zmiany (np. odkształcenia) w zderzających się ciałach

Zderzenia

Zderzenia sprężyste

Przypadek jednowymiarowy:



Z zasad zachowania:

$$\begin{array}{rcl} & \text{po} & \text{przed} \\ p: & m_1 V_1' + m_2 V_2' = & m_1 V_1 \\ E: & \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2} = & \frac{m_1 V_1^2}{2} \end{array}$$

Przekształcamy:

$$p: \quad m_2 V_2' = m_1 (V_1 - V_1')$$

$$\begin{aligned} E: \quad m_2 V_2'^2 &= m_1 (V_1^2 - V_1'^2) \\ &= m_1 (V_1 - V_1')(V_1 + V_1') \end{aligned}$$

$\Rightarrow V_2' = V_1 + V_1'$, albo $V_2' - V_1' = V_1$

wartość bezwzględna prędkości względnej przed i po zderzeniu jest taka sama

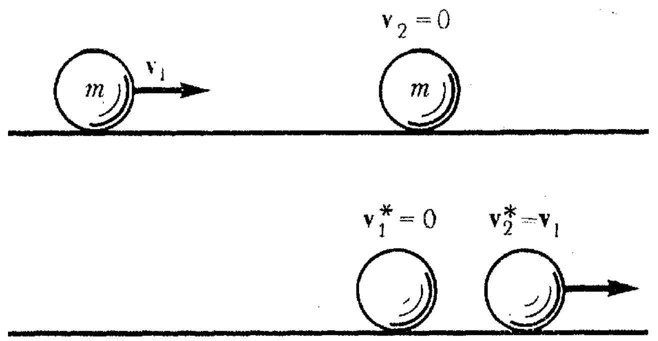
Zderzenia

Zderzenia sprężyste

Przekształcając dalej otrzymujemy:

$$m_2 (V_1 + V_1') = m_1 (V_1 - V_1')$$

$$\Rightarrow \quad V_1' (m_1 + m_2) = V_1 (m_1 - m_2)$$



Ostatecznie:

$$V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1$$

$$V_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} V_1$$

Przypadek szczególny: $m_1 = m_2$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} V_1' &= V_2 = 0 \\ V_2' &= V_1 \end{aligned}$$

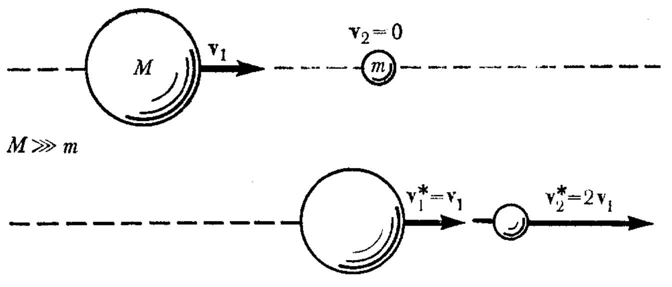
Zderzające się ciała “wymieniają się” prędkościami; rozwiązanie słuszne także w przypadku $\vec{V}_2 \neq 0$

Zderzenia

Zderzenia sprężyste

$m_1 \; > \; m_2$

Masa “pocisku” większa od masy “tarczy”:



Przypadek graniczny: $m_1 \; \gg \; m_2$

$$\Rightarrow \quad V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1 = V_1$$

$$V_2' = \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2} V_1 = 2 \cdot V_1$$

“Pocisk” nie zauważa zderzenia

“Tarcza” uzyskuje prędkość $2 \cdot V_1$

Otrzymujemy: $V_2' > V_1' > 0$

Po zderzeniu oba ciała poruszają się w tą samą stronę.

Zderzenia

Zderzenia sprężyste

$m_1 \; < \; m_2$

Masa “pocisku” mniejsza od masy “tarczy”:

Otrzymujemy:

$$V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1 < 0$$

$$V_2' = \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2} V_1 > 0$$

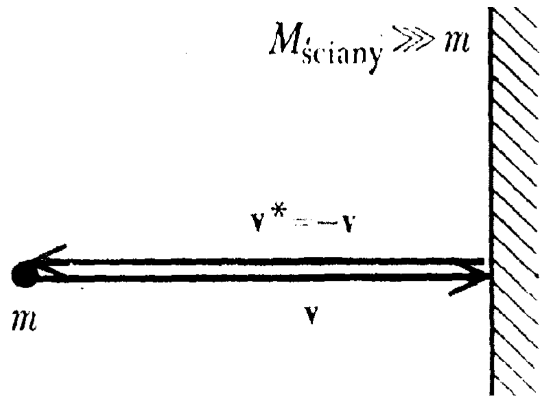
Prędkość “pocisku” zmienia znak

$\Rightarrow$ “pocisk” odbija się od “tarczy”

Przypadek graniczny: $m_1 \; \ll \; m_2$

$$\Rightarrow \quad V_1' = -V_1$$

$$V_2' = 0$$



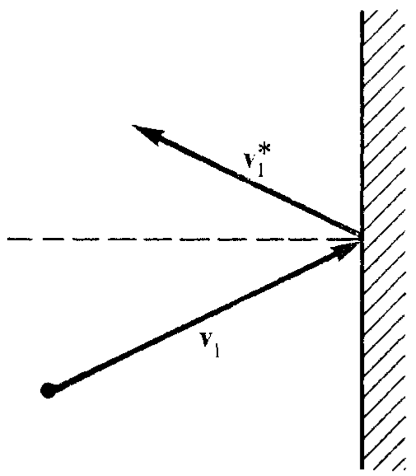
Sprężyste odbicie od nieruchomej “ściany”

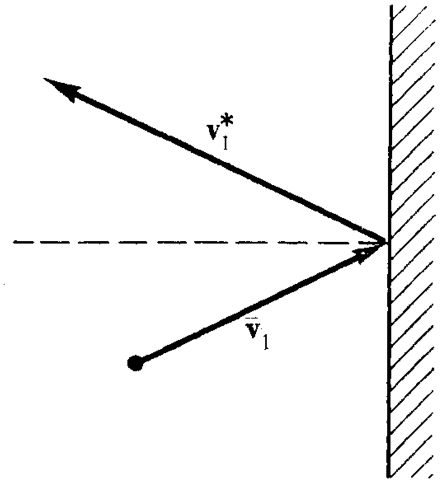
Zderzenia

$m_1 \ll m_2$

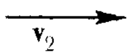
“Tarcza” oddala się od “pocisku”
(“ściana”)

“Tarcza” przybliża się do “pocisku”
(“ściana”)

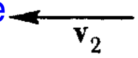




“pocisk” traci energię



“pocisk” zyskuje energię



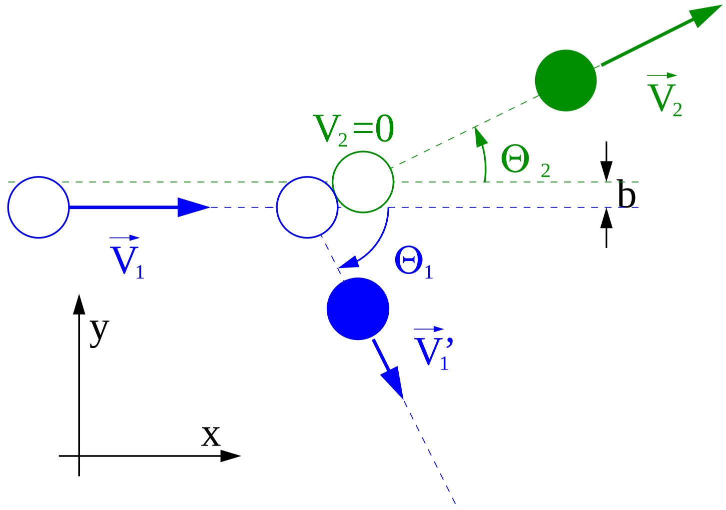
Mikroskopowy obraz ochładzania (ogrzewania) się gazu przy rozprężaniu (sprężaniu)

Zderzenia

Zderzenia nie centralne

Do tej pory rozpatrywaliśmy tzw. zderzenia centralne,
dla których parametr zderzenia $b = 0$ “pocisk” trafia w sam środek “tarczy”

W przypadku gdy $b \neq 0$ zderzenie trzeba rozpatrywać w dwóch wymiarach:



Zasada zachowania pędu:

	po zderzeniu		przed
p_x :	$m_2 V_2' \cos\theta_2 + m_1 V_1' \cos\theta_1$	$=$	$m_1 V_1$
p_y :	$m_2 V_2' \sin\theta_2 - m_1 V_1' \sin\theta_1$	$=$	0

Dla zderzeń spężystych:

$$E_k : \quad \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2}$$

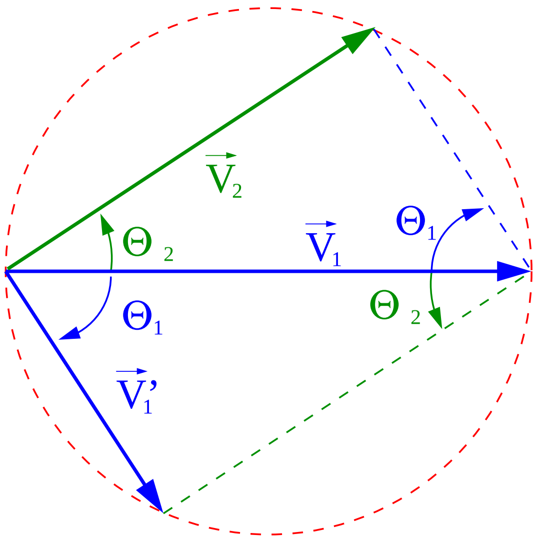
Znajomość m_1, m_2 i V_1 ($V_2 = 0$) nie wystarcza do wyznaczenia
pełnej kinematyki zderzenia (V_1', V_2', θ_1 i θ_2) !

$\Rightarrow$ musimy ustalić b albo jeden z parametrów rozproszenia (np. kąt θ_1).

Zderzenia

Zderzenia nie centralne

Jeśli masy zderzających się sprężyscie ciał są równe
$m_1 = m_2 \Rightarrow$ zagadnienie bardzo się upraszcza



Z zasad zachowania:

$$\vec{V'}_1 + \vec{V'}_2 = \vec{V}_1$$

$$V_1'^2 + V_2'^2 = V_1^2$$

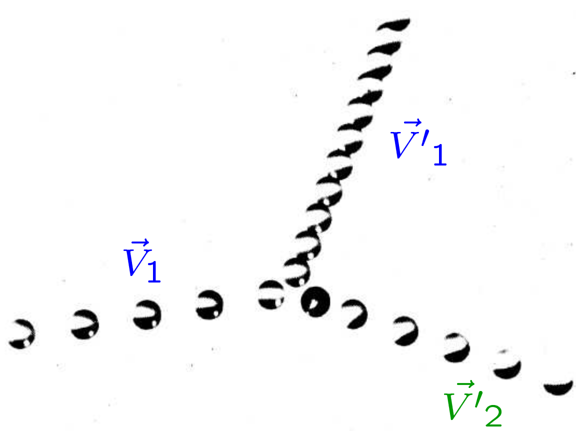
$\Rightarrow$ wektory $\vec{V}_1$, $\vec{V'}_1$ i $\vec{V'}_2$ tworzą trójkąt prostokątny.

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

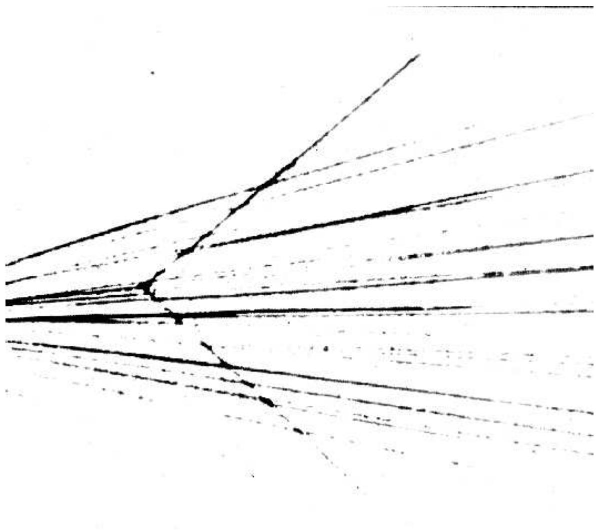
Zderzenia

$m_1 = m_2$

Fotografia zderzających się kul:



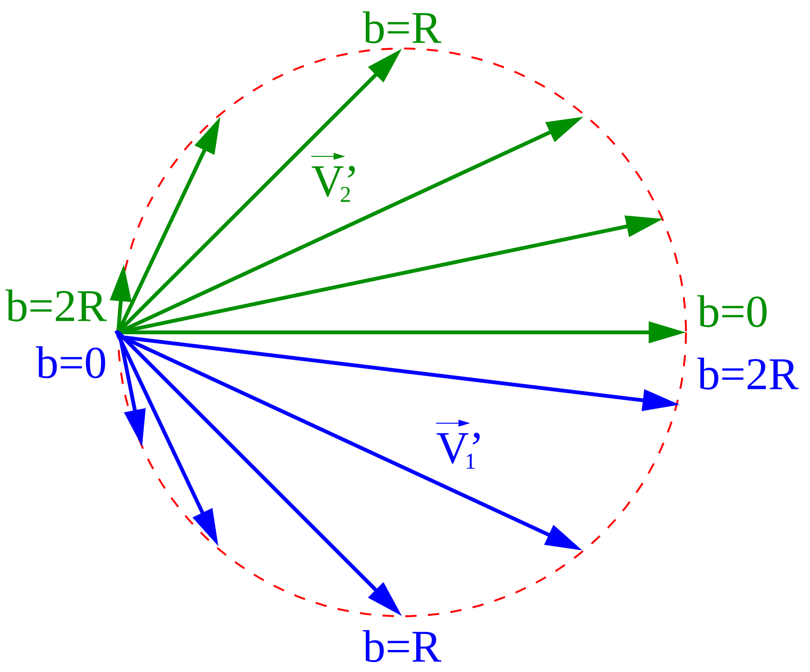
Zderzenie proton-proton w komorze pęcherzykowej:



niska energia padającej wiązki
$\Rightarrow$ dynamika nierelatywistyczna

Zderzenia

$\underline{\underline{m_1 = m_2}}$



Stan końcowy zależy od parametru zderzenia b

- $b = 0 \Rightarrow$ zderzenie centralne

$$\vec{V}'_2 = \vec{V}_1$$
$$\vec{V}'_1 = 0$$

- $b >= 2R \Rightarrow$ brak zderzenia (kule mijają się)

$$\vec{V}'_2 = 0$$
$$\vec{V}'_1 = \vec{V}_1$$