Ruch pod wpływem sił zachowawczych

Fizyka I (B+C)

Wykład XV:

- Energia potencjalna
- Siły centralne
- Ruch w polu grawitacyjnym
- Pole odpychające

Energia potencjalna

Równania ruchu

Znajomość energii potencjalnej jest rownoważna znajomości siły (zachowawczej):

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

Czy znając $E_p(\vec{r})$ możemy rozwiązać równania ruchu ciała ?

- Możemy wyznaczyć zależność $\vec{F}(\vec{r})$ i skorzystać z II zasady dynamiki...

  albo

- Możemy wykorzystać zasadę zachowania energii:

$$E \;=\; E_k(\dot{\vec{r}}) \;+\; E_p(\vec{r}) \;=\; const$$

W zależności od zagadnienia jeden albo drugi sposób może być bardziej użyteczny...

Energia potencjalna

Ruch prostoliniowy

Dla ruchu prostoliniowego pod działaniem siły zachowawczej $\vec{F}(x)$,
energia potencjalna $E_p = E_p(x)$

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + E_p(x) = const$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p(x)\right)}$$

Rozdzielając zmienne i całkując otrzymujemy:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p(x)\right)}}$$

$$t = \int_{x_\circ}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p(x')\right)}}$$

$\Rightarrow$ Znając $E_p(x)$ możemy zawsze znaleźć związek między x i t.

Energia potencjalna

Ruch prostoliniowy

Przykład: $\vec{F} = F\,\vec{i}_x = const \quad \Rightarrow E_p(x) \;=\; -F\,x \qquad F_x = -\frac{dE_p}{dx}$

Przyjmując, że $x = 0$ w chwili $t = 0$ mamy:

$$t \;=\; \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{E + F\,x'}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2}{m}}\,t \;=\; \frac{2}{F}\left[\sqrt{E + F\,x'}\right]_0^x \;=\; \frac{2}{F}\sqrt{E + F\,x} - \frac{2}{F}\sqrt{E}$$

$$\Rightarrow \quad x \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m}\right)\cdot t^2 \;+\; \frac{2E}{m}\cdot t$$

$$\frac{1}{2}\quad a \quad \cdot t^2 \;+\; v_\circ \;\cdot t$$

$v_\circ$ - predkość w chwili $t = 0 \Rightarrow$ energia potencjalna $E_p(0) \;=\; \frac{m v_\circ^2}{2}$

Siła centralna

Rozważmy ruch punktu materialnego o masie m
w polu centralnej siły zachowawczej $\vec{F} = F(r) \cdot \vec{i}_r$

$\Rightarrow$ zasada zachowania energii: $E = \frac{mv^2}{2} + E_p(r) = const$

$\Rightarrow$ zasada zachowania momentu pędu: $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = const$

Zachowanie momentu pędu $\Rightarrow$ ruch płaski

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{i}_r \cdot \frac{dr}{dt} + \vec{i}_\theta \cdot r \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \omega^2$$

Wstawiając do wyrażenia na energię kinetyczną $L = m\, r^2\, \omega$

$$E = E_k + E_p = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2\, m\, r^2} + E_p(r) = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_p^{eff}(r)$$

$\Rightarrow$ równanie różniczkowe dla składowej radialnej $\Rightarrow$ problem jednowymiarowy

Siła centralna

Energia efektywna

"Efektywna" energia potencjalna w polu siły centralnej:

$$E_p^{eff}(r) = \underbrace{\frac{L^2}{2\,m\,r^2}}_{\text{“energia odśrodkowa”}} + E_p(r)$$

Jeśli $L \neq 0$ to zasada zachowania momentu pędu
"przeciwstawia się" zbliżeniu ciała do źródła siły ($r = 0$).

bariera centryfugalna

"energia dośrodkowa" $\Leftrightarrow$ siła odśrodkowa

$$F_o = -\frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2\,m\,r^2}\right) = \frac{L^2}{m\,r^3} = m\,r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Siła centralna

Ruch radialny

Jednowymiarowe zagadnienie ruchu radialnego:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p^{eff}(r)\right)}$$

$$t = \int_{r_\circ}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p^{eff}(r')\right)}}$$

$$E_p^{eff}(r) = \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + E_p(r)$$

Ruch może się odbywać tylko w obszarze $E - E_p^{eff}(r) \geq 0$

$\Rightarrow$ dla $L \neq 0$ istnieje ograniczenie na odległość najmiejszego zbliżenia: $r \geq r_{min}$

teoretycznie można wymyśleć siłę centralną silniejszą od siły odśrodkowej

$\Rightarrow$ jeśli $E < E_p^{eff}(\infty)$ to ciało nie może dowolnie oddalić się od centrum siły: $r \leq r_{max}$

$\Rightarrow$ ruch w ograniczonym obszarze

Siła centralna

Ruch kątowy

Zachowany moment pędu: $L = m\,r^2\,\omega$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m\,r^2}$$

$$\theta - \theta_\circ = \int_0^t \frac{L}{m\,r^2}\,dt'$$

Możemy wyprowadzić równanie na tor ciała porównując zależności od czasu:

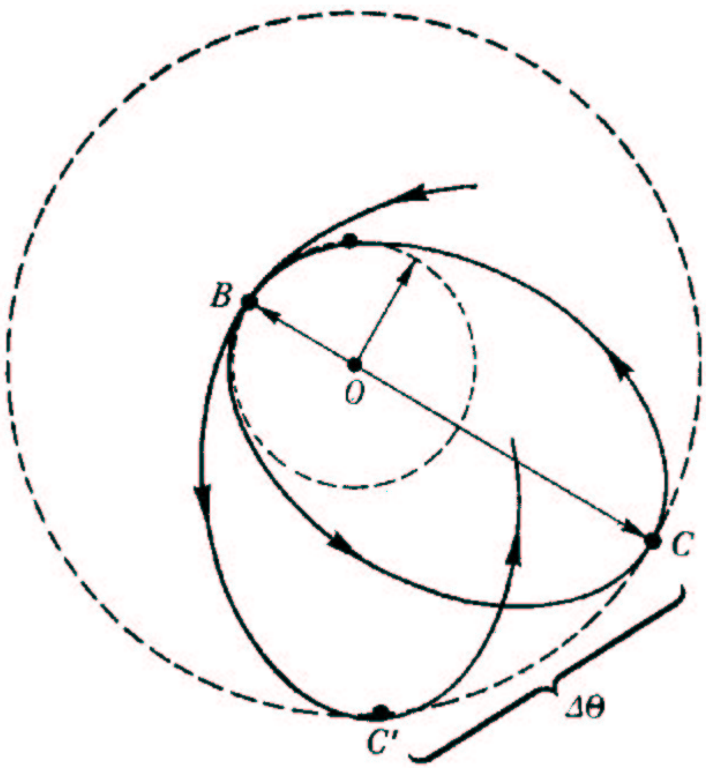
$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p^{eff}(r)\right)}} = \frac{m\,r^2}{L}\,d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \theta - \theta_\circ = \int \frac{L\;dr}{m\,r^2\,\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p^{eff}(r)\right)}}$$

równanie toru we współrzędnych biegunowych

Siła centralna

Ruch kątowy



Zmiana kąta biegunowego przy przejściu ciała od r_{min} do r_{max}

$$\Delta\theta = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L\, dr}{m\, r^2 \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p^{eff}(r)\right)}}$$

Tor będzie krzywą zamkniętą, jeśli $\Delta\theta = 2\pi \frac{m}{n}$

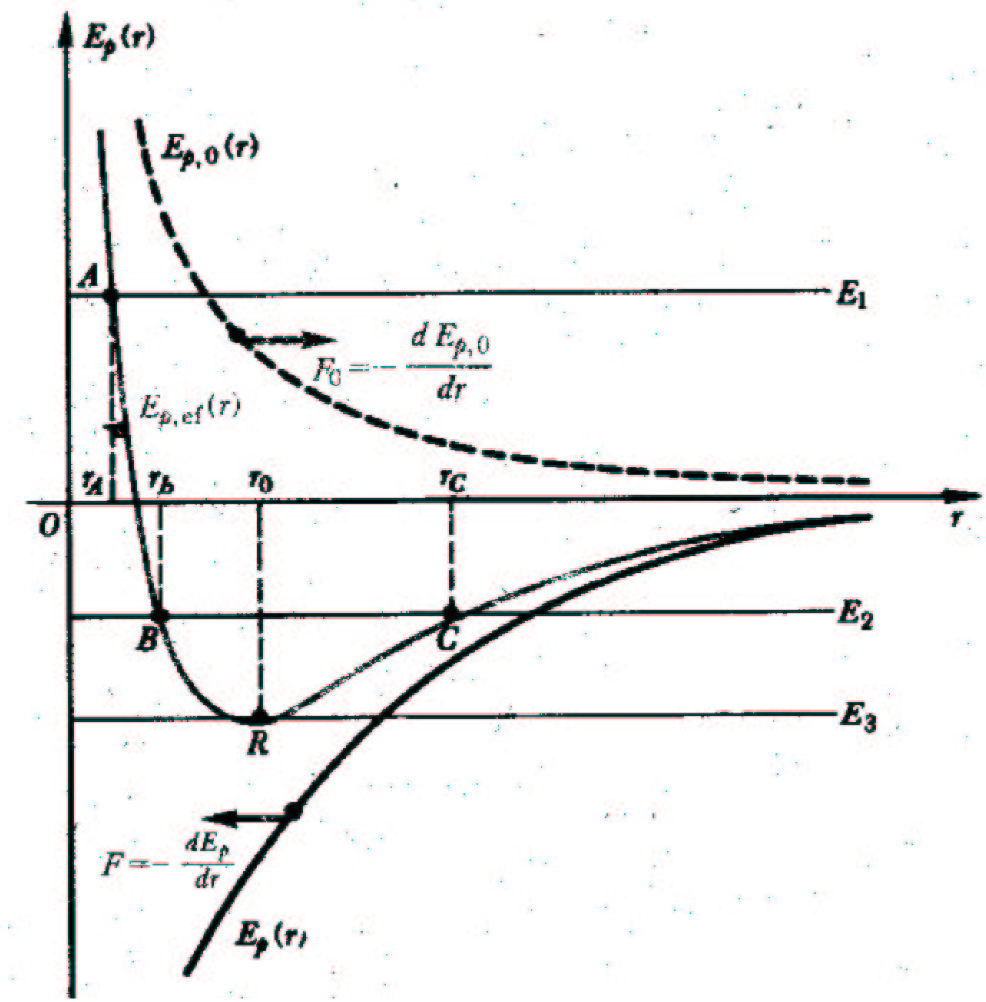
m, n - liczby całkowite

Warunek ten spełniony jest tylko dla dwóch pól:
(niezależnie od warunków początkowych)

- $E_p(r) \sim \frac{1}{r}$ - siła grawitacyjna, siła kulombowska
- $E_p(r) \sim r^2$ - siły sprężystości

Ruch w polu grawitacyjnym

energia efektywna



Pole grawitacyjne

Ogólne wyrażenie na energię potencjalną:

$$E_p(r) \;=\; -\frac{k}{r}$$

$k > 0 \Rightarrow$ siła przyciągająca

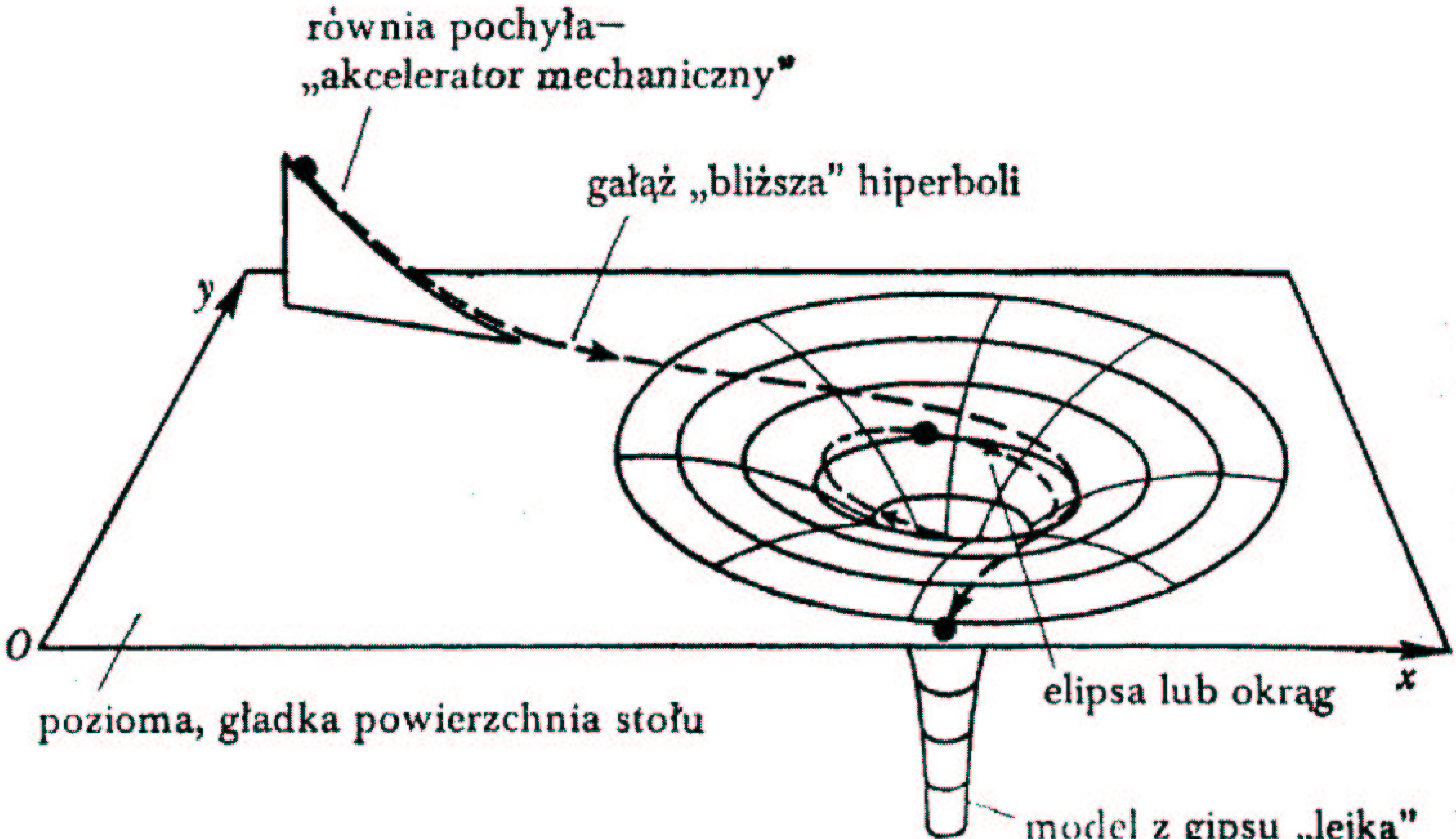
wybieramy $E_p(\infty) = 0$

Charakter ruch zależy od energii całkowitej:

- $E_1 > 0$ - tor otwarty
- $E_2 < 0$ - tor zamknięty
- $E_3 = E_{min}$ - ruch po okręgu

Ruch w polu grawitacyjnym

Model



Ruch w polu grawitacyjnym

Równanie toru

Rozwiązujemy:

$$\theta - \theta_\circ = \int \frac{L\,dr}{m\,r^2\,\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p^{eff}(r)\right)}} = \int \frac{\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}\left(E + \frac{k}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}}$$

$$= -\int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2mk}{L^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \left(\frac{1}{r}\right)^2}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2}}$$

Gdzie wprowadziliśmy parametry: $p = \frac{L^2}{mk}$ oraz $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$

Otrzymaliśmy całkę postaci:

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arccos(x) \qquad \Longrightarrow \qquad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\theta - \theta_\circ)}$$

Ruch w polu grawitacyjnym

Równanie toru

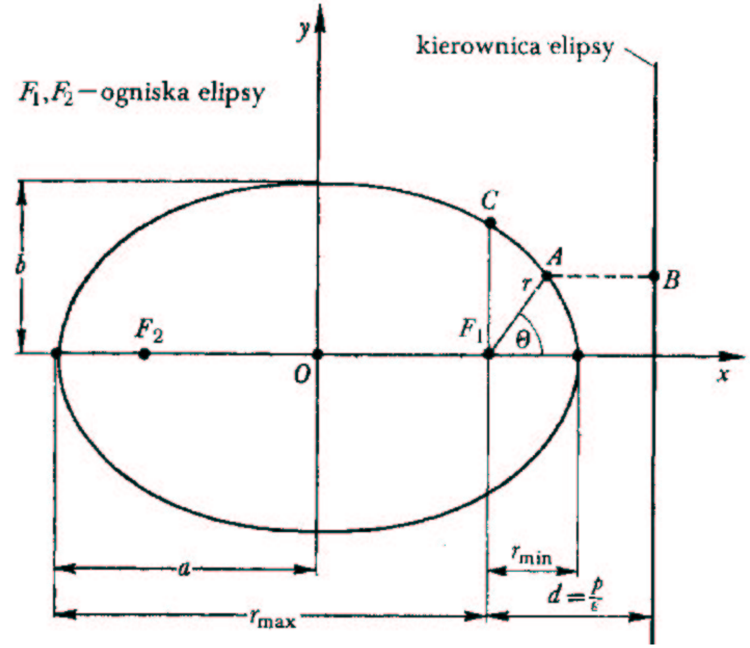
Otrzymaliśmy równanie krzywej stożkowej
(we współrzędnych biegunowych)

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\theta - \theta_\circ)}$$

ε - mimośród orbity

- $\varepsilon = 0$ - ruch po okręgu
  o promieniu p
- $\varepsilon < 1$ - ruch po elipsie $E < 0$
- $\varepsilon = 1$ - ruch po paraboli $E = 0$
- $\varepsilon > 1$ - ruch po hiperboli $E > 0$

$$\varepsilon = \frac{r}{AB}$$

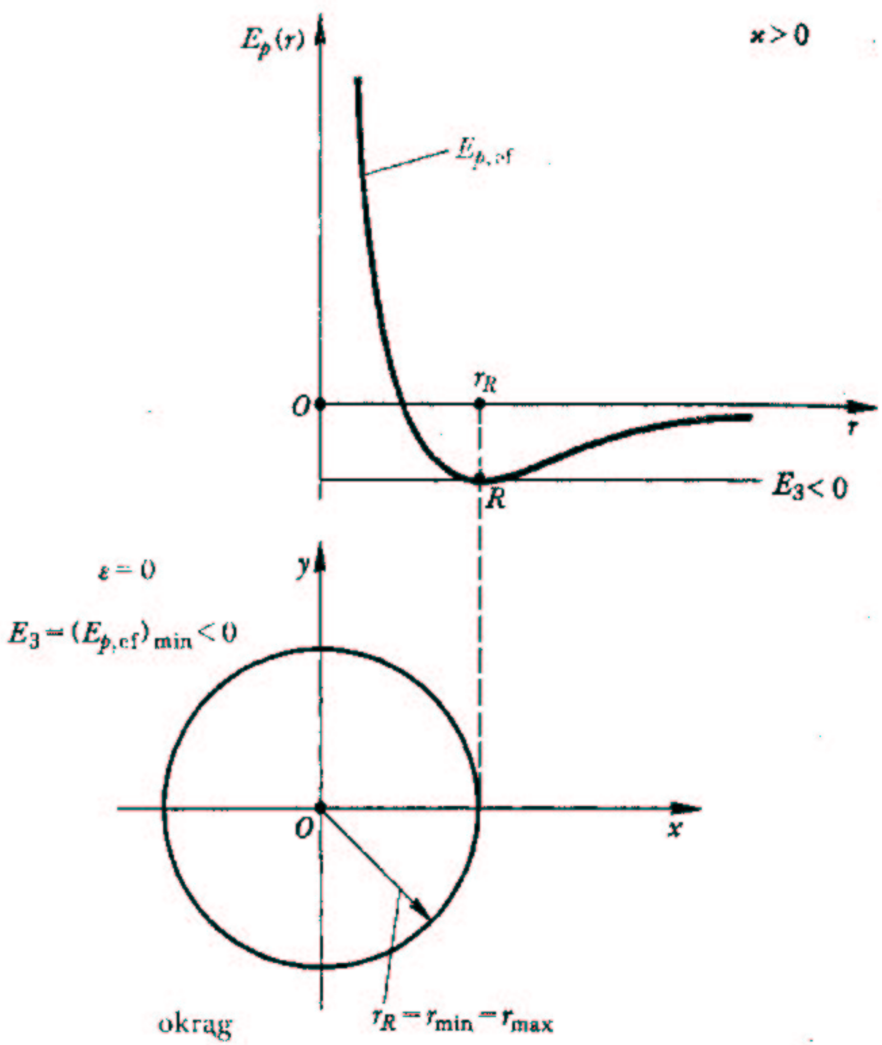


Osie elipsy:

- $2a = \frac{2p}{1-\varepsilon^2} = \frac{k}{2|E|}$
  - zależy tylko od energii
- $2b = \frac{2p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$
  - zależy także od momentu pędu

Ruch w polu grawitacyjnym

Ruch po okręgu



Przypadek szczególny: $\varepsilon = 0$

$$E = E_{min} = -\frac{m\,k^2}{2\,L^2}$$

minimalna energia całkowita
przy ustalonym L

W przypadku $L = 0$ mamy ruch po odcinku
o długości $2a = \frac{k}{2|E|}$; $b = 0$

Ruch w polu grawitacyjnym

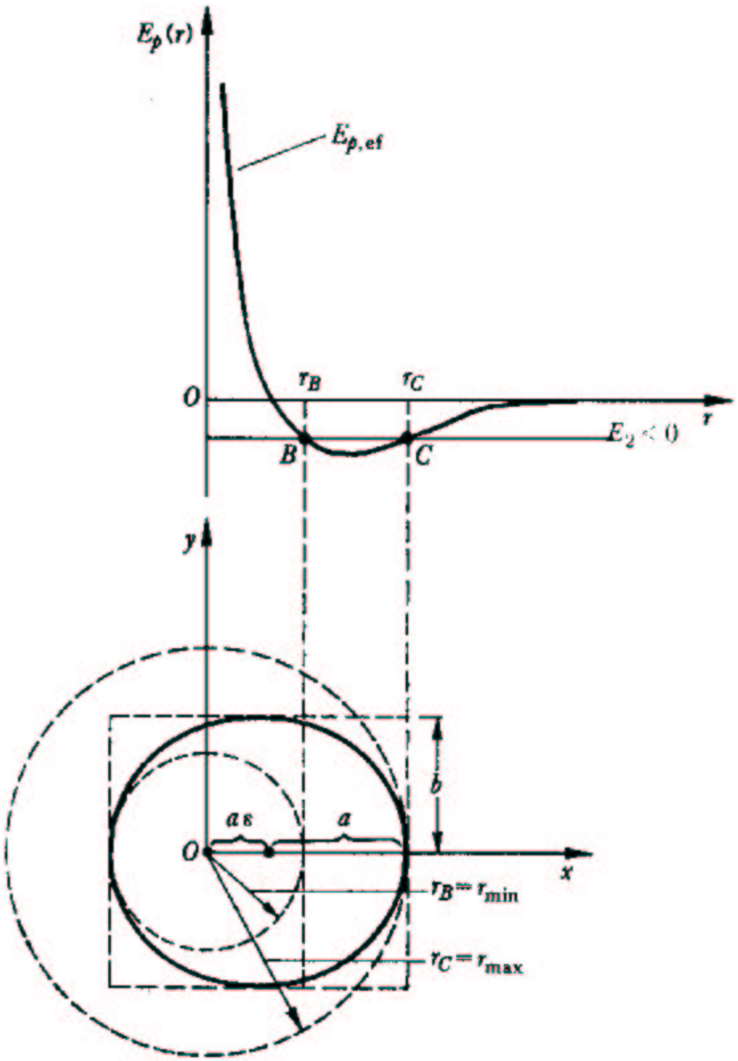
Ruch po elipsie

Warunek: $E_{min} < E < 0$

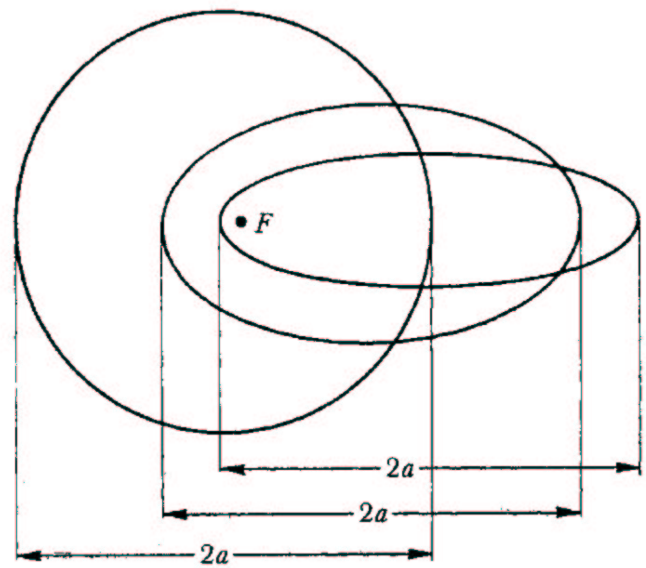
Ruch ograniczony do: $r_{min} < r < r_{max}$

$$E_p^{eff}(r_{min}) = E_p^{eff}(r_{max}) = E$$

Źródło siły znajduje się w jednym z ognisk elipsy.



Długa półoś zależy wyłącznie od energii;
“spłaszczenie” zależy od momentu pędu



Ruch w polu grawitacyjnym

Prawa Keplera

I. Każda planeta krąży po elipsie ze Słońcem w jednym z jej ognisk

II. Promień wodzący każdej planety zakreśla równe pola w równych czasach

III. Kwadrat okresu obiegu każdej planety wokół Słońca
jest proporcjonalny do sześcianu półosi wielkiej elipsy

Okres obiegu możemy wyznaczyć z prędkości polowej $\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m},\ 2a = \frac{k}{2|E|},\ 2b = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$

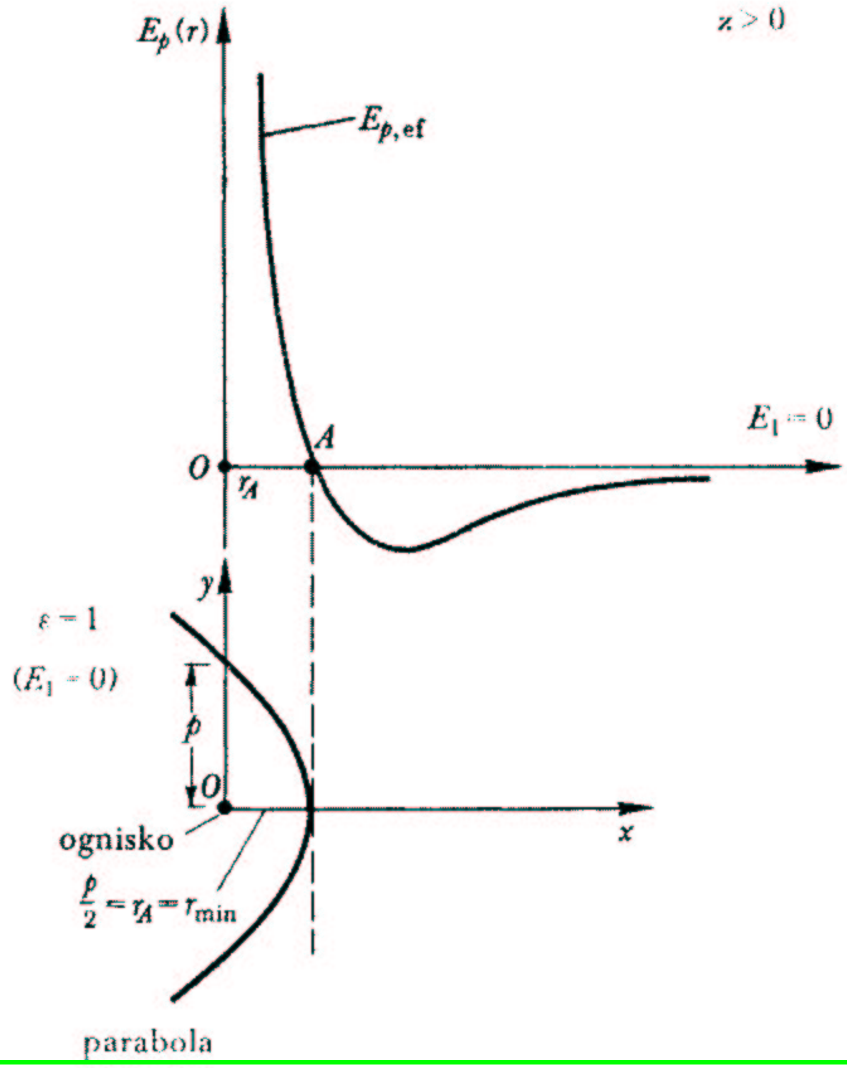
$$T = \frac{S}{\left(\frac{dS}{dt}\right)} = \frac{\pi\, a\, b}{\frac{L}{2m}} = \pi k \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$$

Podnosząc do kwadratu

$$T^2 = \frac{\pi^2 k^2 m}{2|E|^3} = \frac{4\pi^2 m}{k} \cdot a^3$$

Ruch w polu grawitacyjnym

Ruch po paraboli



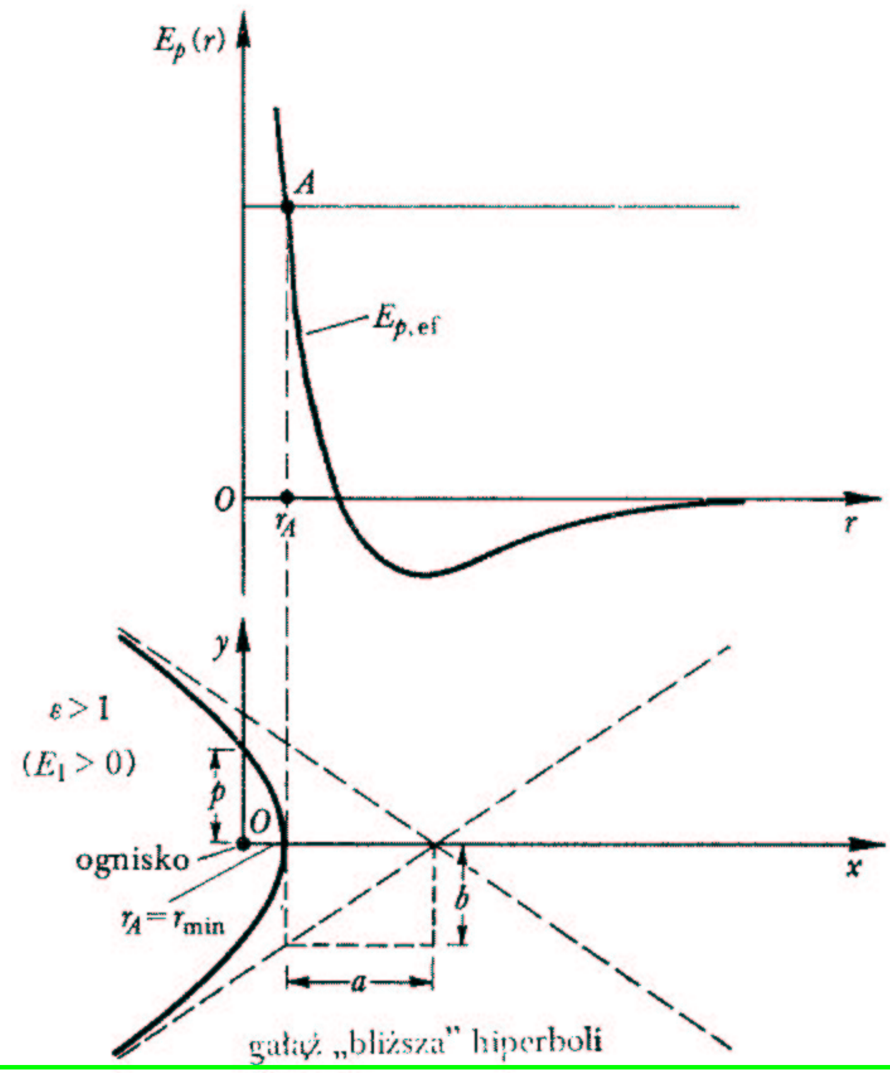
Przypadek szczególny: $E = 0$

Ruch jest nieskończony,
ciało nie jest związane przez centrum siły.

Jednak oddalając sie do nieskończoności ciało będzie poruszać się coraz wolniej.
Asymptotycznie zatrzyma się.

Ruch w polu grawitacyjnym

Ruch po hiperboli



Dla $E > 0$

Ruch jest nieskończony.

Asymptpotycznie prędkość ciała dąży do

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}} > 0$$

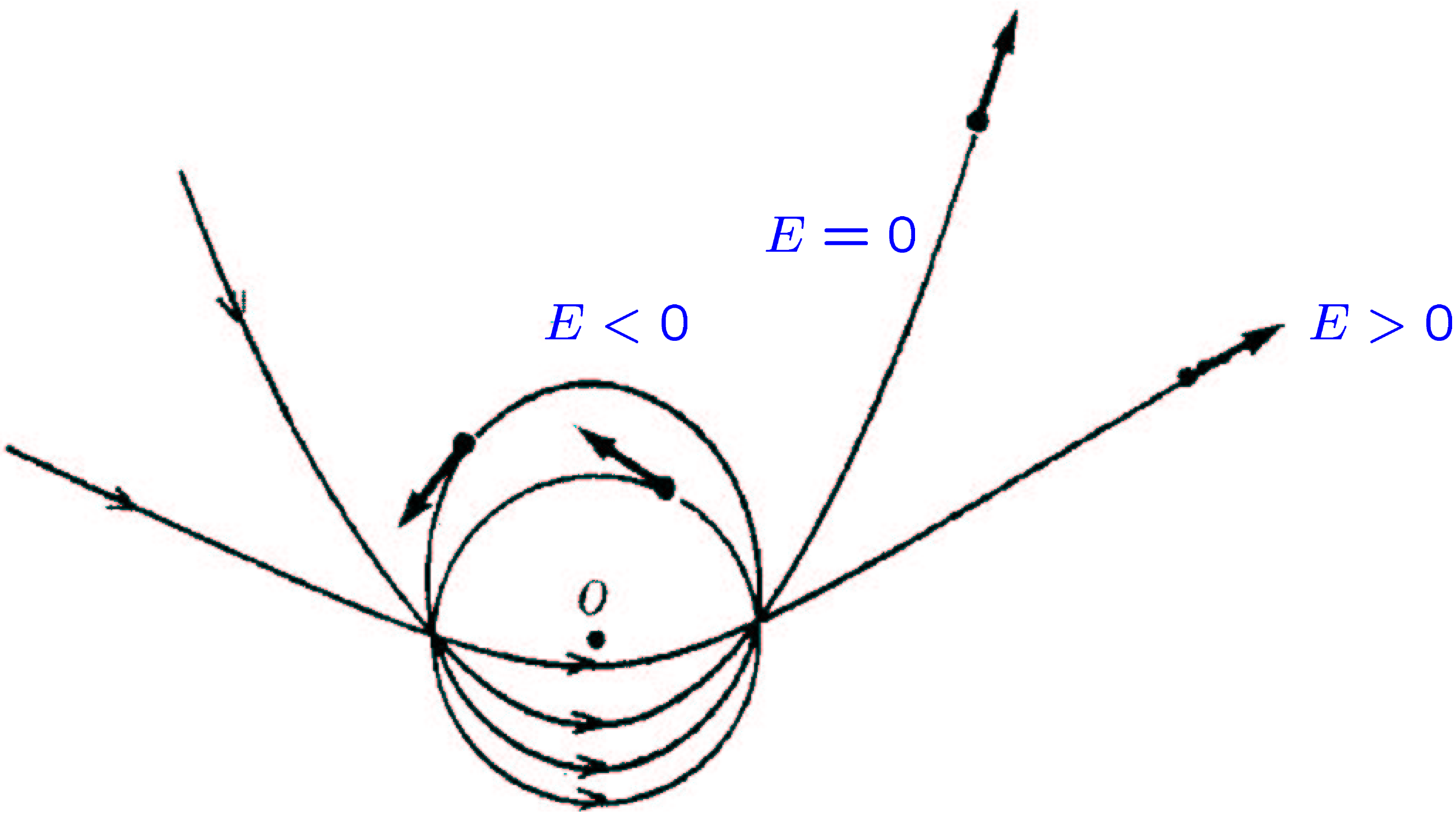
orbity komet nieperiodycznych

Im mniejsze L
tym mniejsza odległość zbliżenia r_{min}

Ruch w polu grawitacyjnym

Rodzaje orbit

Kształt orbity zależy od energii całkowitej E i momentu pędu ciała L $\qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$

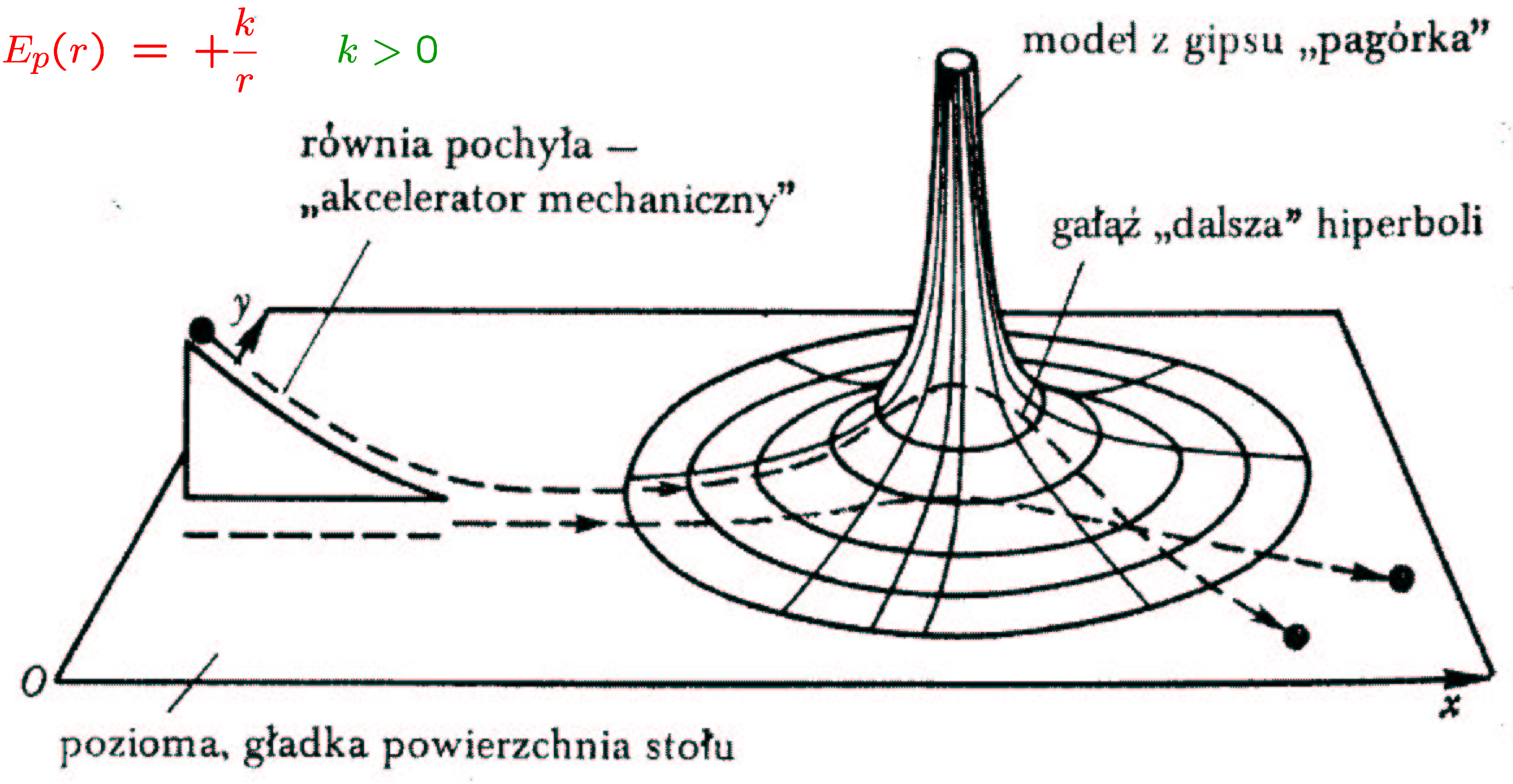


Orbity o tej samej wartości L, lecz o różnych wartościach E

Ruch w polu sił

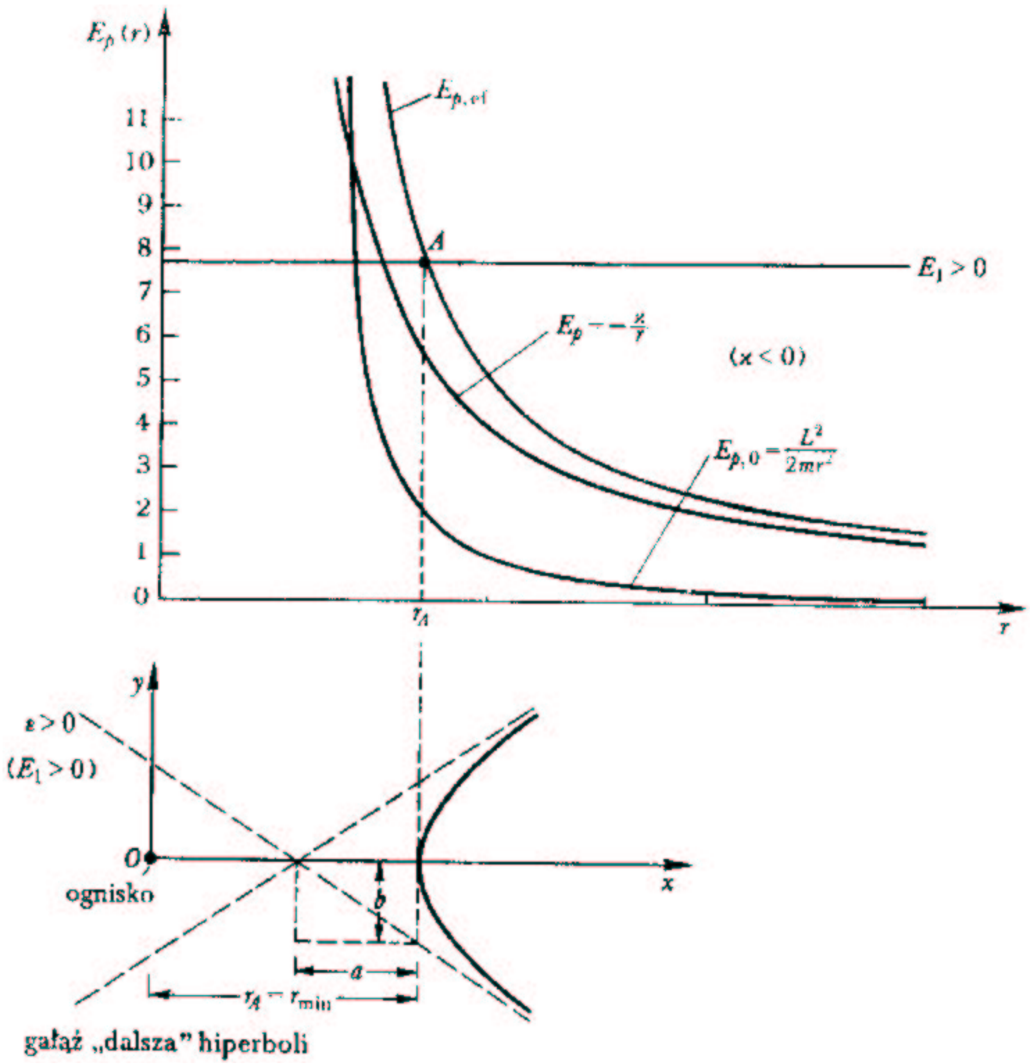
Potencjał odpychający

$$E_p(r) = +\frac{k}{r} \qquad k > 0$$



Ruch w polu sił

Potencjał odpychający



Uzyskane rozwiązanie pozostaje słuszne, z dokładnością do zmiany znaku $k \Rightarrow$ zmiana znaku p

$$r(\theta) = \frac{p}{\varepsilon \cdot \cos(\theta - \theta_\circ) - 1}$$

Jak porzednio $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$

Teraz jednak zawsze $E > 0$

Im większe ε, tym większy kąt rozwarcia hiperboli