

# Zderzenia

Fizyka I (B+C)

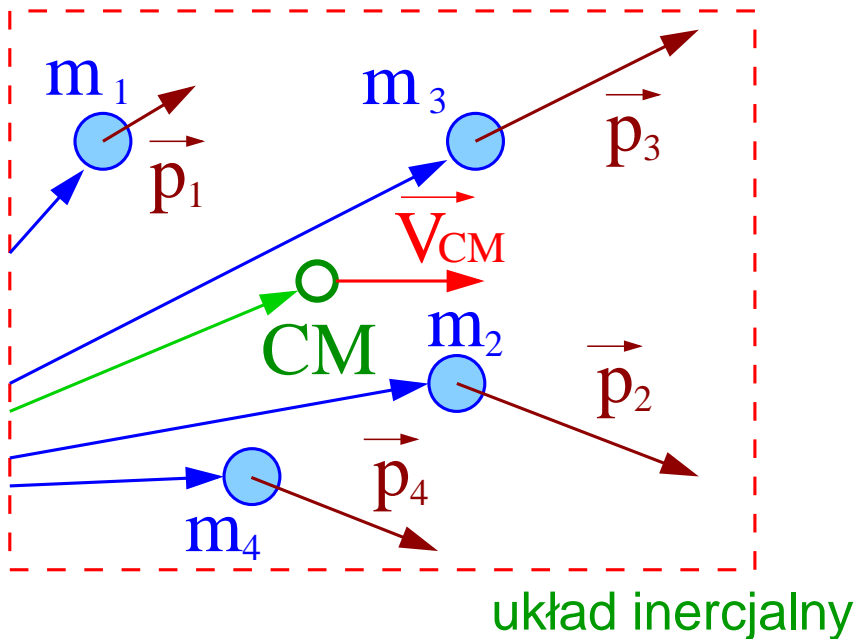
## Wykład XVI:

- Układ środka masy
- Oddziaływanie dwóch ciał
- Zderzenia
- Doświadczenie Rutherforda

# Układ środka masy

## Układ izolowany

Izolowany układ wielu ciał:



Zasada zachowania pędu:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{const}$$

## Środek masy

Klasyczna definicja położenia środka masy:

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

⇒ średnia ważona z  $\vec{r}_i$  (z wagami  $w_i = m_i$ )

Ruch środka masy:  $m_i = \text{const}$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d}{dt} \vec{R} = \frac{\sum_i m_i \frac{d}{dt} \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\Rightarrow \left( \sum_i m_i \right) \vec{V}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\Rightarrow \vec{P} = M \vec{V}_{CM} = \sum_i \vec{p}_i$$

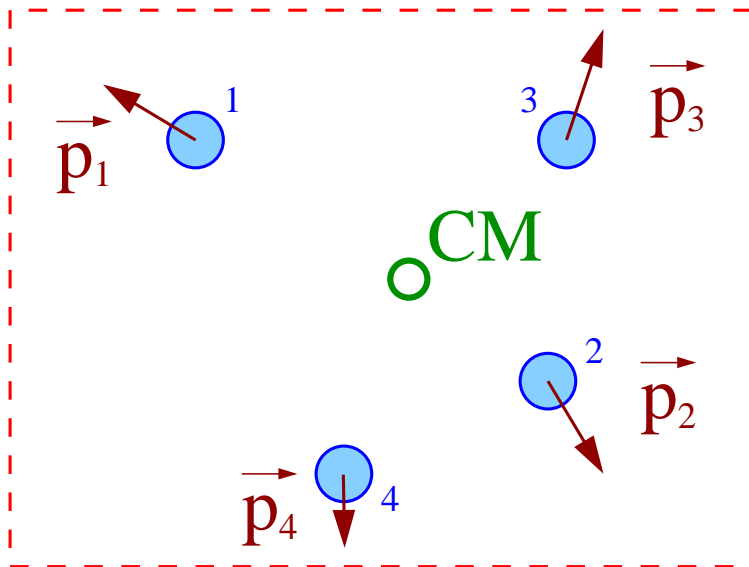
pęd układu możemy związać z ruchem środka masy

# Układ środka masy

Prędkość środka masy: (klasycznie)

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{M}$$

Zawsze możemy tak zmienić układ odniesienia, żeby **środek masy spoczywał**



⇒ układ środka masy (CMS)

## Układ środka masy

Układ środka masy jest w wielu przypadkach najwygodniejszym układem odniesienia

⇒ szereg relacji bardzo się upraszcza

Zasada zachowania pędu w CMS:  
(zmiennne w CMS oznaczamy \*)

$$\vec{P}^* = \sum_i \vec{p}_i^* = 0$$

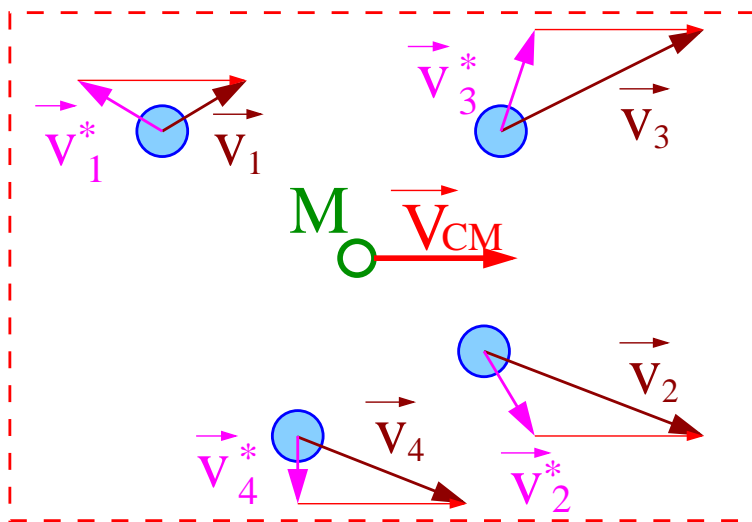
ogólna definicja układu środka masy  
słuszna także w przypadku  $v \sim c$

# Układ środka masy

## Energia układu

Transformacja galileusza:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{V}_{CM}$$



Energia kinetyczna układu:

$$\begin{aligned} E_k &= \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i |\vec{v}_i^* + \vec{V}_{CM}|^2}{2} \\ &= \sum_i \left( \frac{m_i (v_i^*)^2}{2} + 2 \frac{m_i \vec{v}_i^* \vec{V}_{CM}}{2} + \frac{m_i V_{CM}^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Z zasady zachowania pędu:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i^* \vec{V}_{CM} = \vec{V}_{CM} \sum_i m_i \vec{v}_i^* = \vec{V}_{CM} \vec{P}^* = 0$$

Ostatecznie:

$$E_k = E_k^* + \frac{M V_{CM}^2}{2}$$

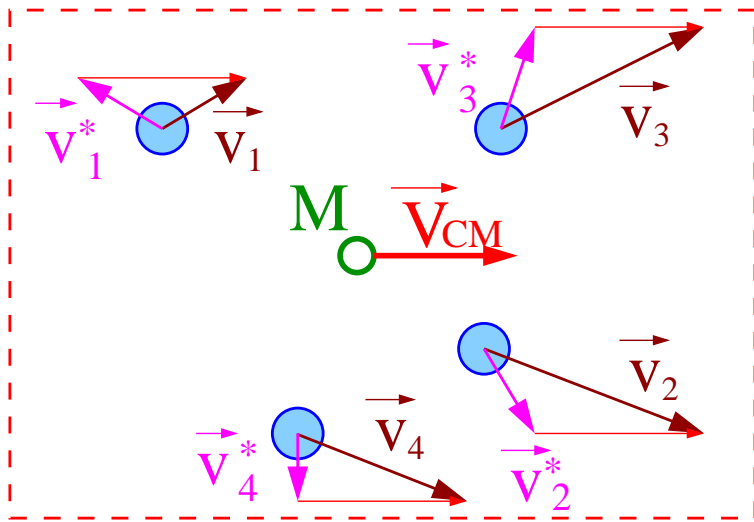
Energia kinetyczna układu jest sumą energii “wewnętrznej” ( $E_k^*$ ) i energii kinetycznej układu jako całości.

# Układ środka masy

## Moment pędu układu

Transformacja galileusza:

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{r}_i^* + \vec{R}_{CM} \\ \vec{v}_i &= \vec{v}_i^* + \vec{V}_{CM}\end{aligned}$$



Całkowity moment pędu względem początku układu

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} + \vec{r}_i^*) \times (\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i^*) \\ &= \left[ \sum_i m_i \right] \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{v}_i^* \\ &\quad + \left[ \sum_i m_i \vec{r}_i^* \right] \times \vec{V}_{CM} + \sum_i m_i \vec{r}_i^* \times \vec{v}_i^*\end{aligned}$$

Z definicji CMS:  $\sum m_i \vec{v}_i^* = \sum m_i \vec{r}_i^* = 0$

⇒ otrzymujemy:

$$\vec{L} = M \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{L}_{CM}^*$$

Moment pędu układu jest sumą “wewnętrznego” momentu pędu ( $\vec{L}_{CM}^*$ ) (względem CM) i momentu pędu układu jako całości.

# Układ środka masy

## Ruch środka masy

Dla układu izolowanego

$$\vec{P} = \text{const}$$

środek masy pozostaje w spoczynku  
lub porusza się ruchem jednostajnym  
prostoliniowym    I Zasada Dynamiki

Pod działaniem sił zewnętrznych:

$$\vec{F}^{zw} = \sum_i \vec{F}_i^{zw}$$

zmiana pędu układu:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ &= \sum_i \vec{F}_i^{zw} + \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} = \vec{F}^{zw} \end{aligned}$$

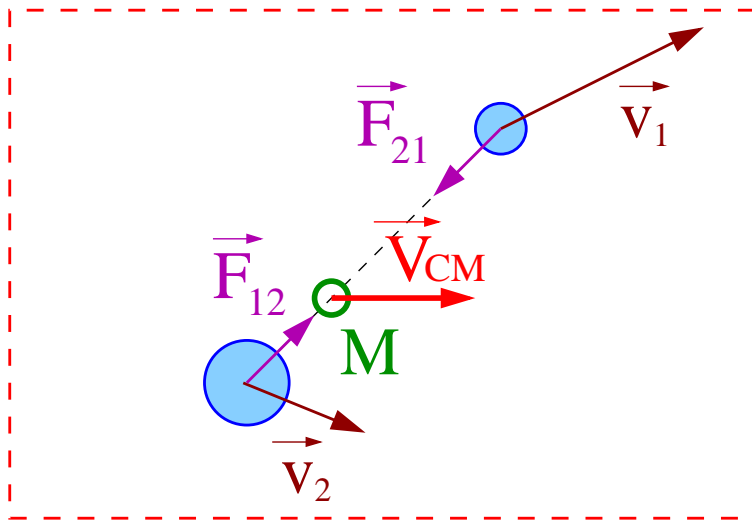
II Zasada Dynamiki

W oparciu o pojęcie **środku masy** możemy opisać **ruch układu** jako całości  
stosując równania ruchu **punktu materialnego**.

# Oddziaływanie dwóch ciał

## Ruch względny

Dla układu dwóch ciał zagadnienie ruchu “wewnętrznego” daje się bardzo uprościć.



Względne położenie (np. ciała 2 względem 1):

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Względna prędkość:

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_{12}}{dt}$$

III zasada dynamiki:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21} &= -\vec{F}_{12} \\ m_1 \vec{a}_1 &= -m_2 \vec{a}_2\end{aligned}$$

Układ izolowany !

Przyspieszenie:

$$\vec{a}_{12} = \frac{d\vec{v}_{12}}{dt} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \frac{m_2}{m_1} \vec{a}_2$$

# Oddziaływanie dwóch ciał

## Masa zredukowana

Przyspieszenie w ruchu względnym:

$$\vec{a}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{a}_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \frac{\vec{F}_{12}}{m_2}$$

Możemy sprowadzić równania ruchu do postaci:

$$\mu \vec{a}_{12} = \vec{F}_{12}(\vec{r}_{12})$$

gdzie  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  - masa zredukowana  $\left(\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$

Problem względnego ruchu dwóch oddziałujących ciał możemy sprowadzić do problemu ruchu jednego ciała o masie  $\mu$  w polu siły  $\vec{F}_{12}(\vec{r}_{12})$

Ściśle w przypadku klasycznym (nierelatywistycznym) dla układu izolowanego.

Obowiązuje też w przypadku sił zewnętrznych nadających ciałom to samo przyspieszenie



# Oddziaływanie dwóch ciał

## Przykład



Układ Ziemia-Księżyc

$$m_K : m_Z \approx 1 : 81$$

$$\mu \approx 0.988 m_K$$

Ziemia i Księżyc krążą wokół wspólnego środka masy, który znajduje się ok. 4700 km od środka Ziemi.

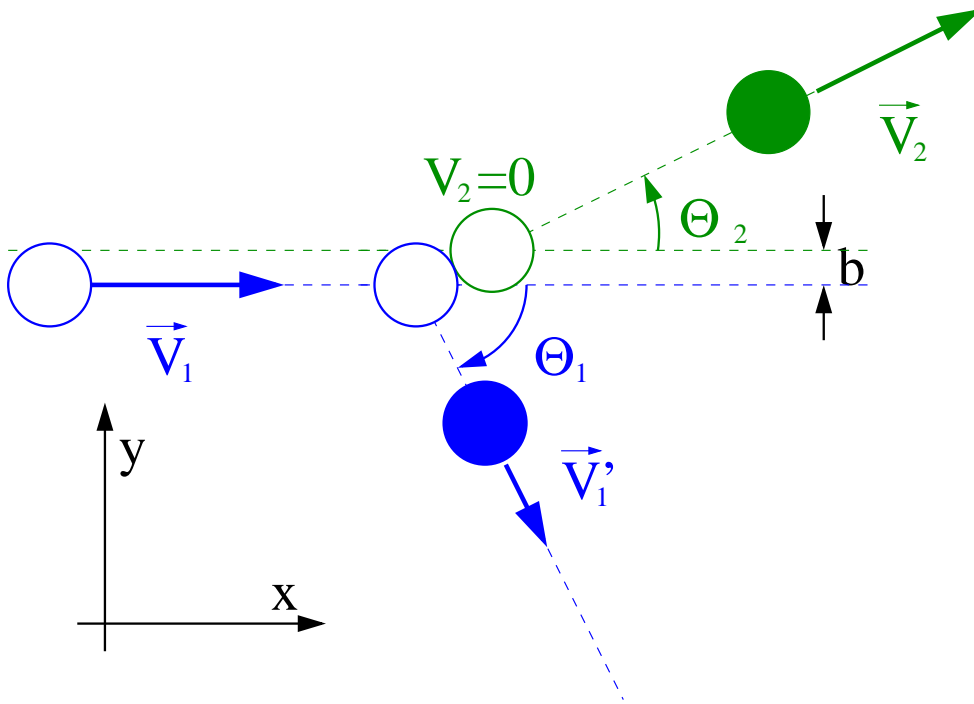
Częstość obiegu jest  $\sqrt{\frac{m_K}{\mu}}$  raza większa niż gdyby Ziemia była “nieruchoma” (0.6%)  
(przy danych masach i odległości Ziemia-Księżyc ;  $\mu \omega^2 r_{12} = F(r_{12})$ )

Przymiując, że pole grawitacyjne Słońca jest jednorodne na odległościach Ziemia-Księżyc problem ruchu trzech ciał możemy zredukować do dwóch problemów jednociiałowych (ruch względny w układzie Ziemia-Księżyc i w układzie Słońce-[Ziemia+Księżyc] )  
( $R_{SZ} \approx 150\ 000$  tys. km.  $\gg R_{ZK} \approx 385$  tys. km.;  $m_Z : m_S \approx 1 : 335\ 000$  )

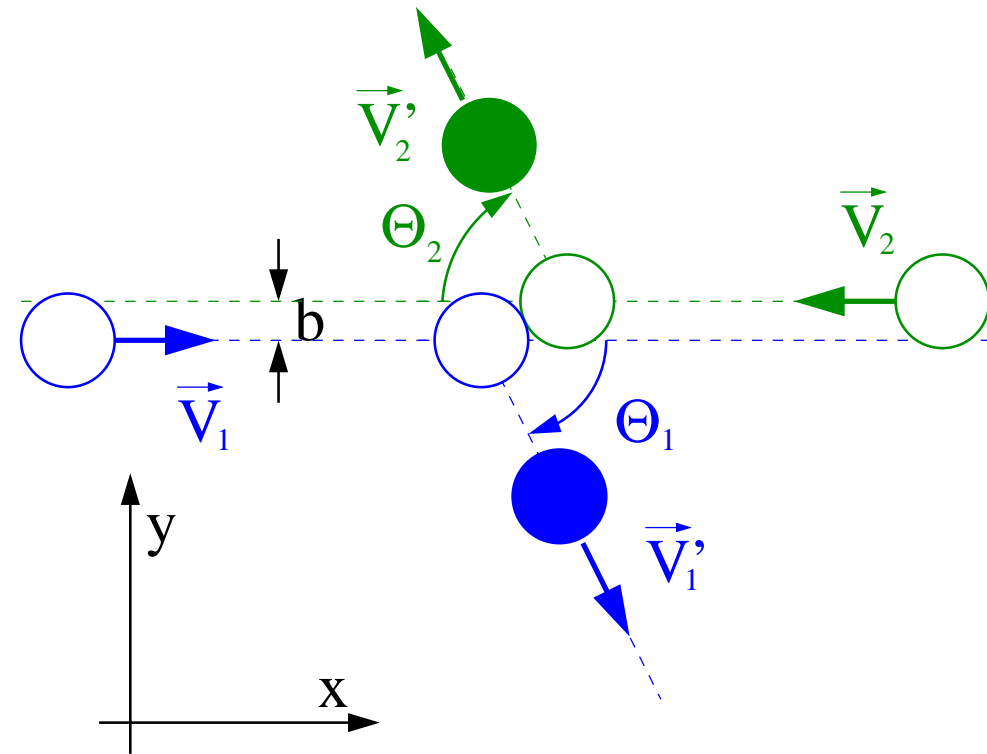
# Zderzenia

## Zderzenia nie centralne

Układ laboratoryjny:



Układ środka masy:



Zasada zachowania pędu:  $\vec{P}^* = 0$

Skomplikowane wyrażenia na prędkości końcowe w funkcji np. kąta rozproszenia  $\theta_1$ .

Łatwiej jeśli  $m_1 = m_2$

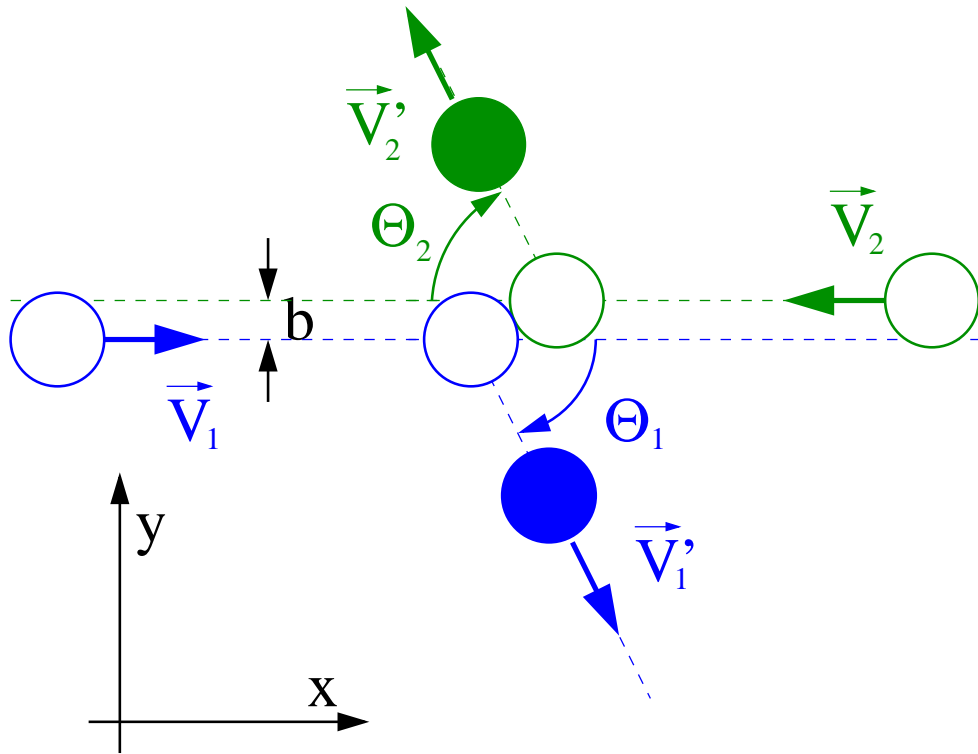
$$\theta_1 = \theta_2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1'}{V_2'} = \frac{m_2}{m_1}$$

# Zderzenia

## Zderzenia sprężyste

Układ środka masy:



Zasada zachowania energii:  $V_2 = \frac{m_1}{m_2} V_1$

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2}$$

$$\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) V_1^2 = \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) V_1'^2$$

$$\Rightarrow V_1' = V_1 \quad V_2' = V_2$$

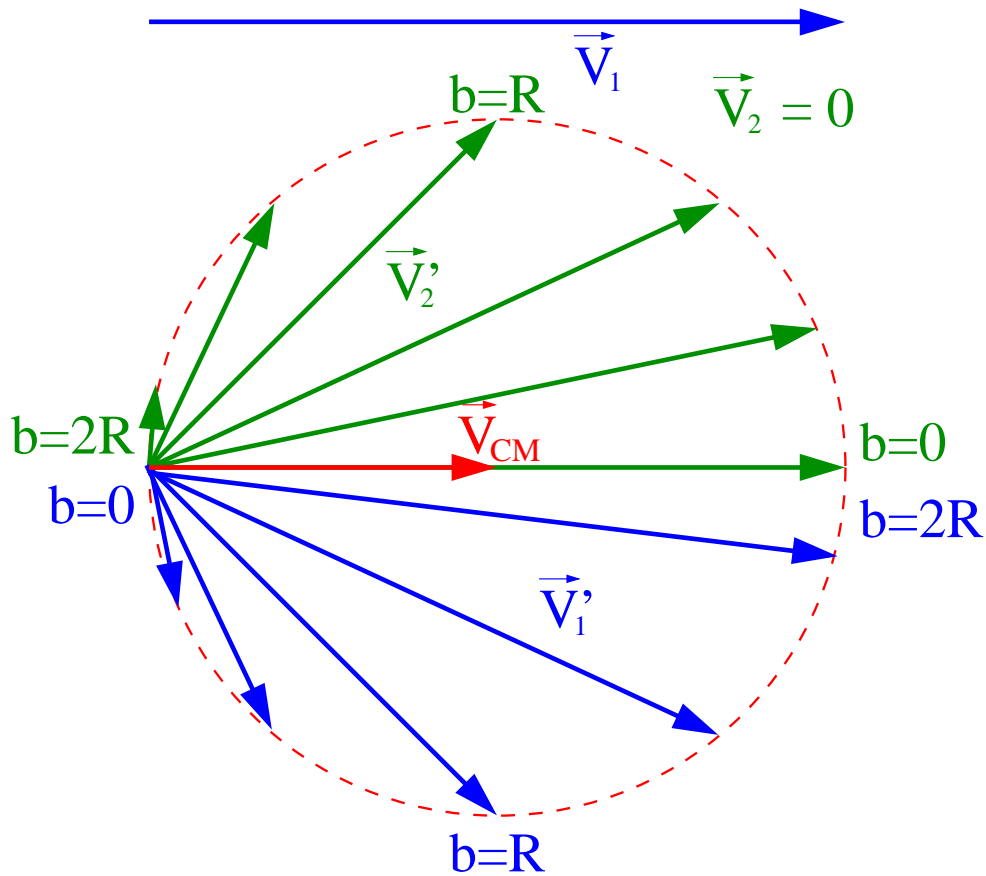
Niezależnie od mas zderzających się ciał, wartości ich prędkości przed i po zderzeniu sprężystym są takie same.

**W układzie środka masy !**

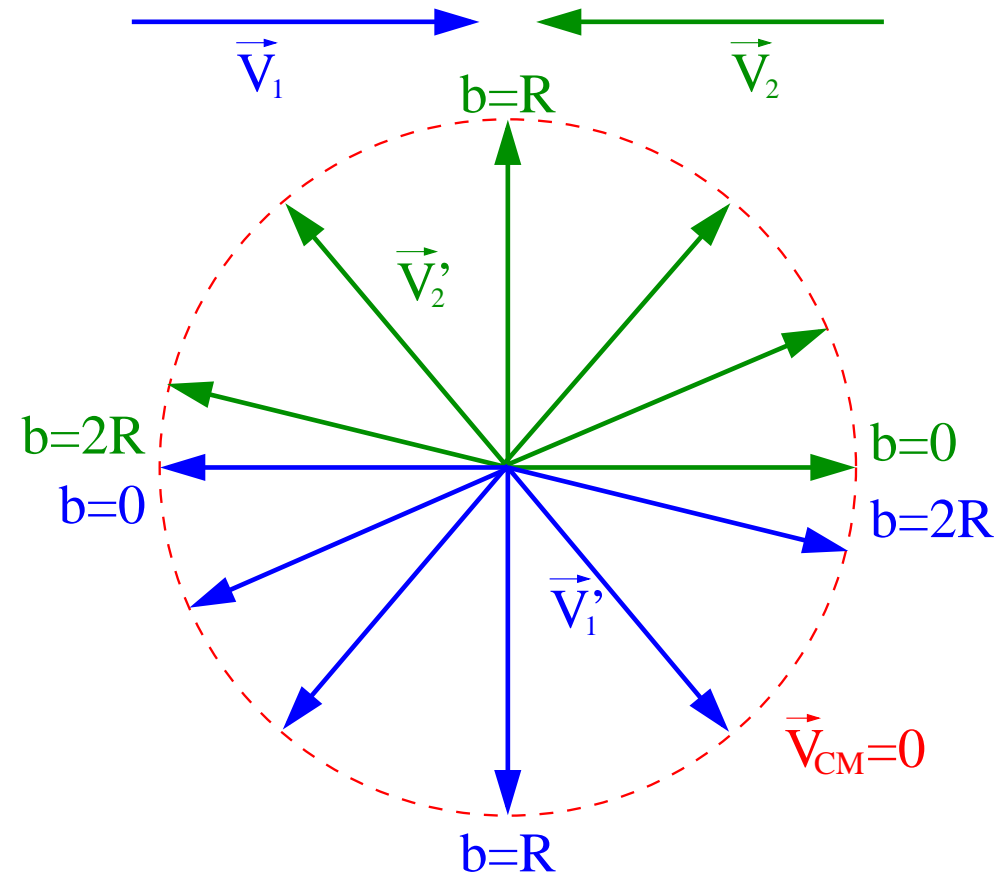
# Zderzenia

$$\underline{m_1 = m_2}$$

Układ laboratoryjny:



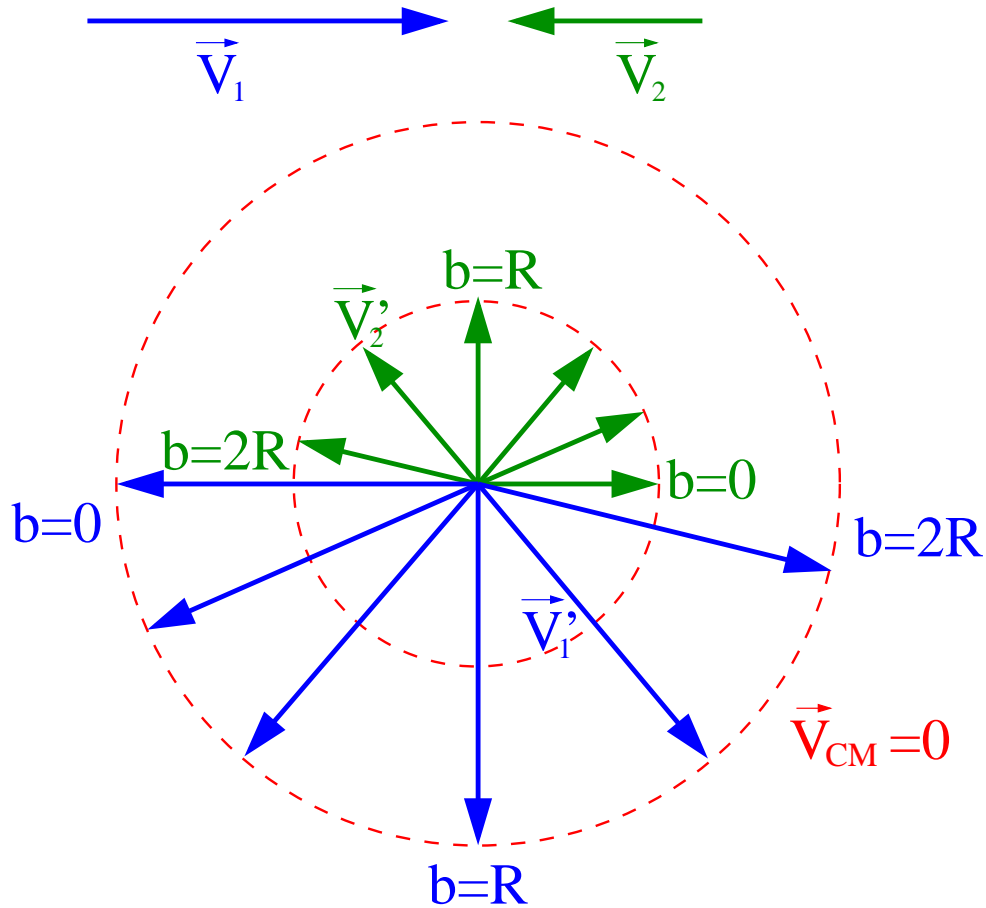
Układ środka masy:



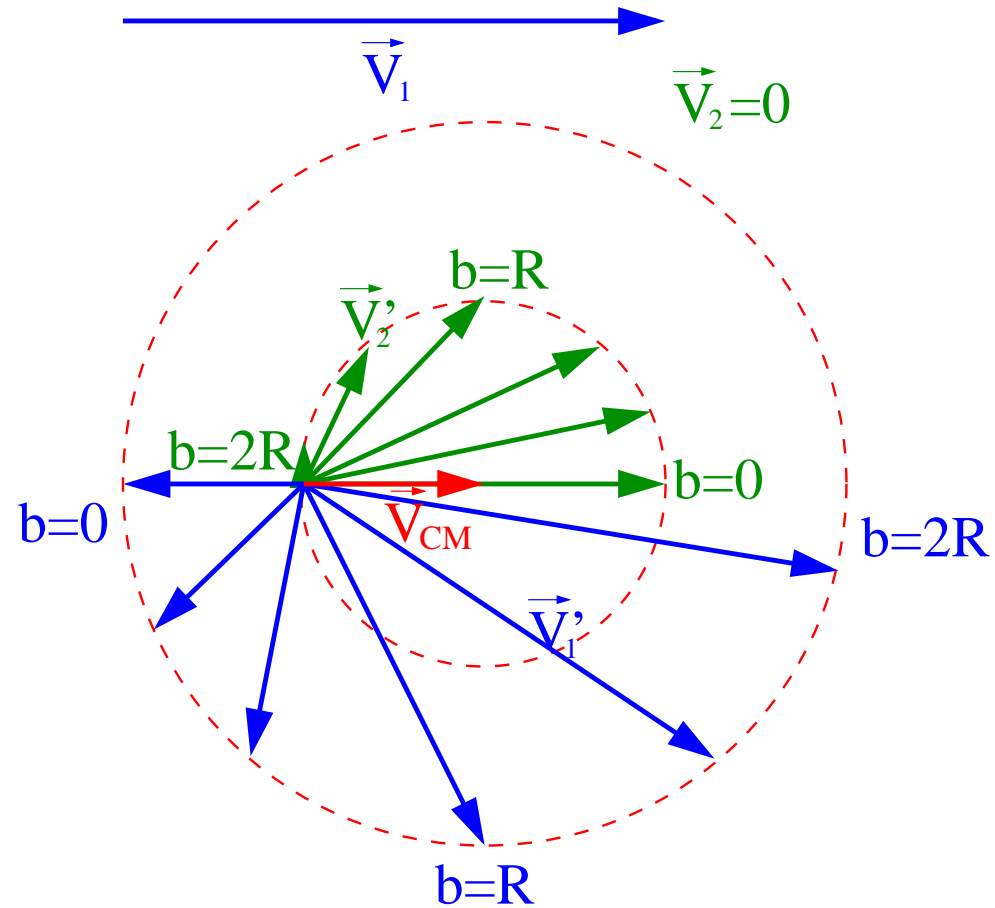
# Zderzenia

$m_1 < m_2$

Układ środka masy:



Układ laboratoryjny



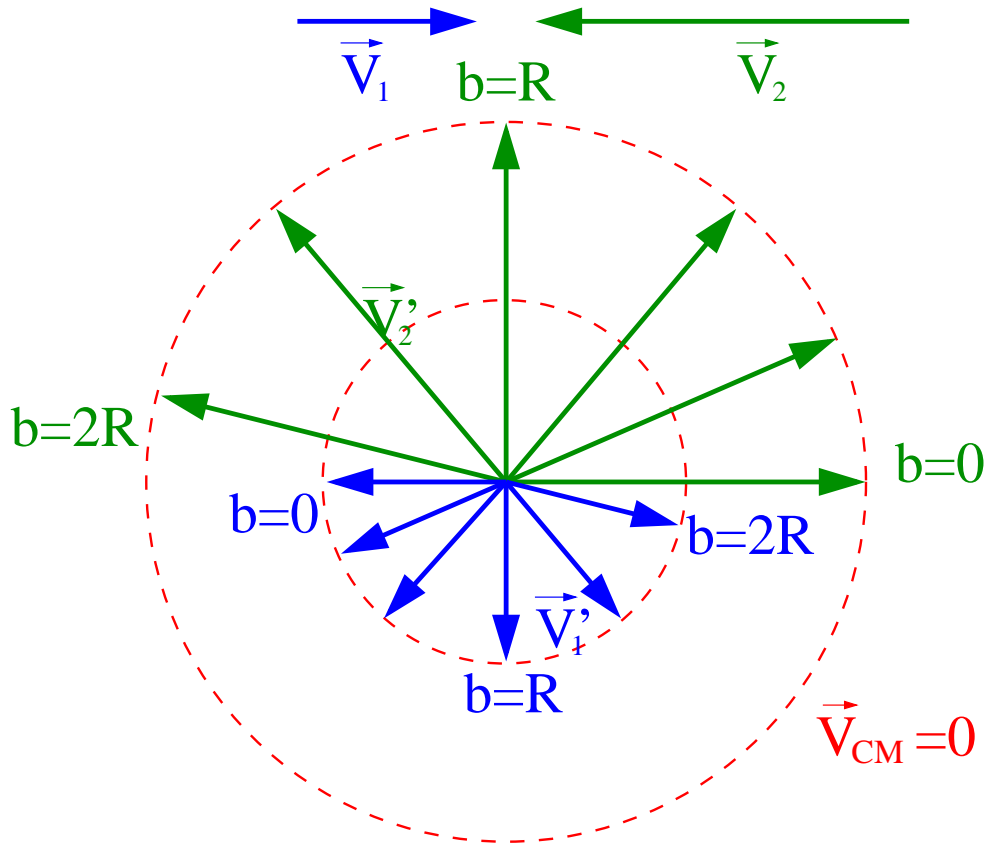
Dla  $m_1 = \frac{1}{2}m_2 \Rightarrow v_1 = 2v_2$

$V_{CM} = \frac{1}{3}V_1$

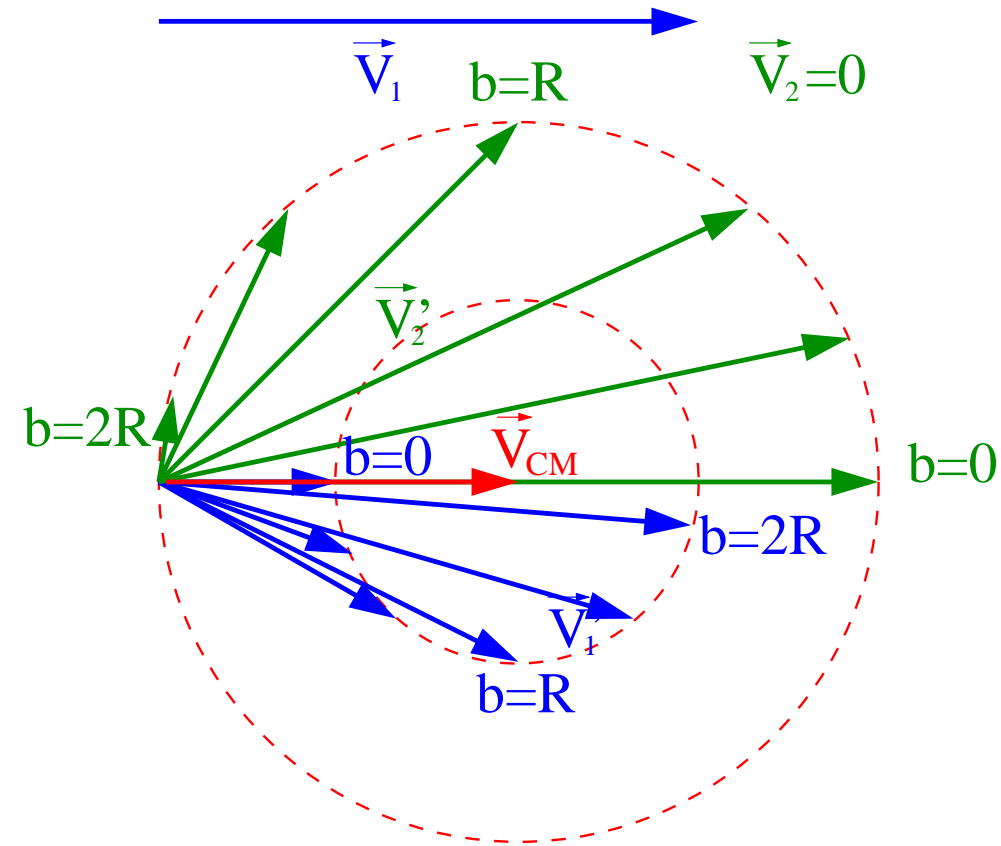
# Zderzenia

$$\underline{m_1 > m_2}$$

Układ środka masy:



Układ laboratoryjny:



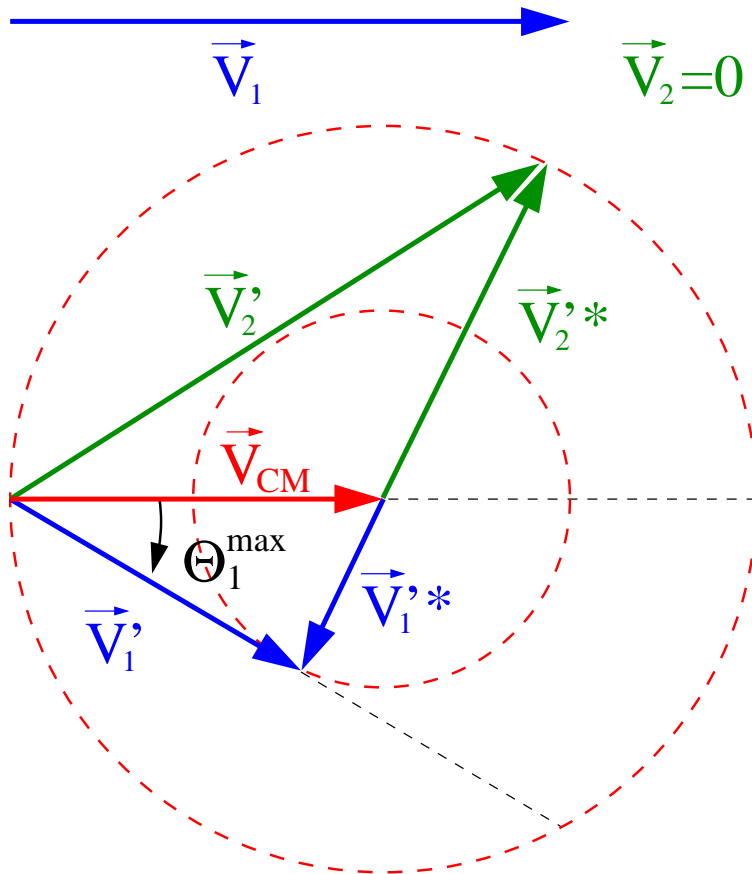
Dla  $m_1 = 2 m_2 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{2} v_2$

$$V_{CM} = \frac{2}{3} V_1$$

# Zderzenia

$$\underline{m_1 > m_2}$$

Układ laboratoryjny:



Związek między prędkościami:

$$V_{CM} = v_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1$$

$$v_1^* = \frac{m_2}{m_1} v_2^* = \frac{m_2}{m_1 + m_2} V_1$$

Maksymalny kąt rozproszenia “pocisku”:

$$\sin \theta_1^{max} = \frac{v_1^*}{V_{CM}} = \frac{m_2}{m_1}$$

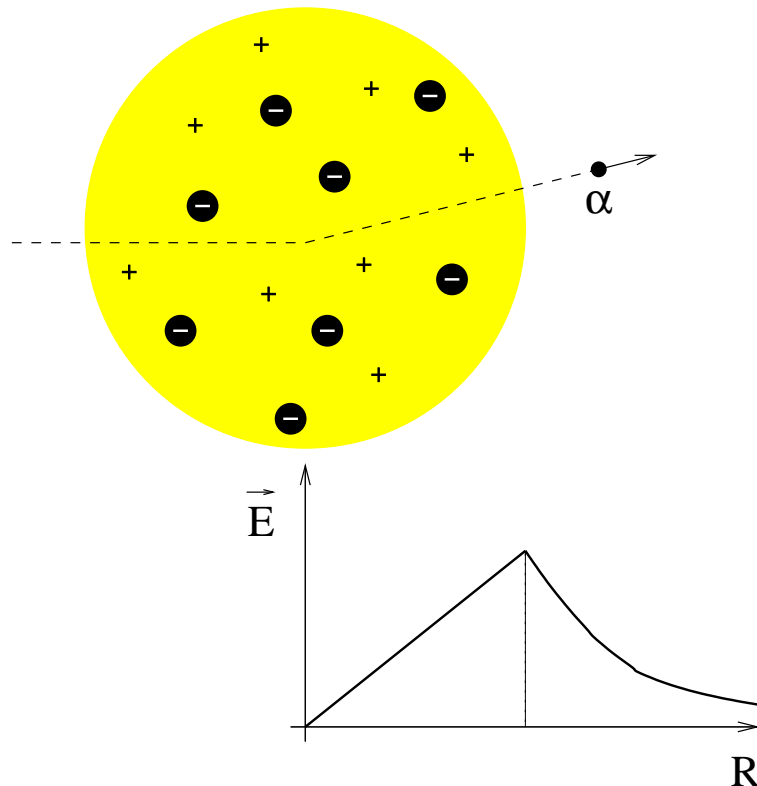
Dla “tarczy” ograniczenie nie zależy od stosunku mas:

$$0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$$

# Doświadczenie Rutherforda

## Model Thomson

Po odkryciu elektronu (1897), J.J.Thomson zaproponował model atomu w postaci “ciastka z rodzynkami”.



Cała **objętość** atomu była jednorodnie **naładowana dodatnio** (“ciastko”), a wewnątrz “pływały” **elektrony** (“rodzynki”).

Ponieważ ładunek był rozłożony **równomiernie** w dużej objętości, nie powinien silnie zakłócać ruchu przechodzący cząstek  $\alpha$ .

**Oczekujemy jedynie niewielkich odchyień toru...**

**Wpływ elektronów można zaniedbać ze względu na małą masę.**



# Doświadczenie Rutherforda

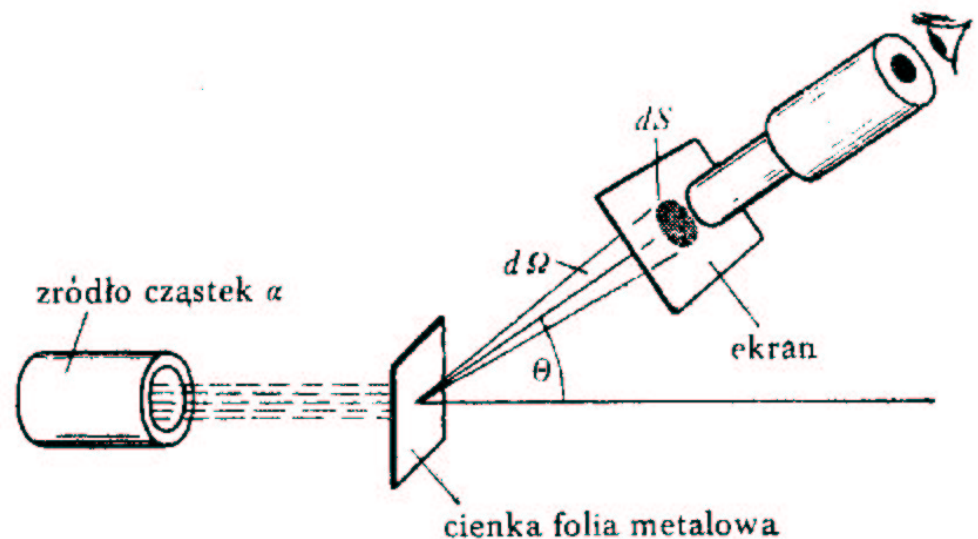
W modelu Thomsona można było oszacować maksymalny kąt rozproszenia cząstki  $\alpha$  i był on mały  $\theta^{max} \ll \pi$ .

Odpowiada to sytuacji rozproszenia “pocisku” na dużo lżejszej “tarczy”.

Masa przypadająca na jednostkę “rozmytego” ładunku atomu wynosiła ok.  $\frac{1}{8}$  masy cząstki  $\alpha$ .

## Doświadczenie Rutherforda

Rozpraszanie cząstek  $\alpha$  na cienkiej złotej folii



Obserwowano błyski wywoływane przez padające cząstki na ekranie scyntylacyjnym

# Doświadczenie Rutherforda

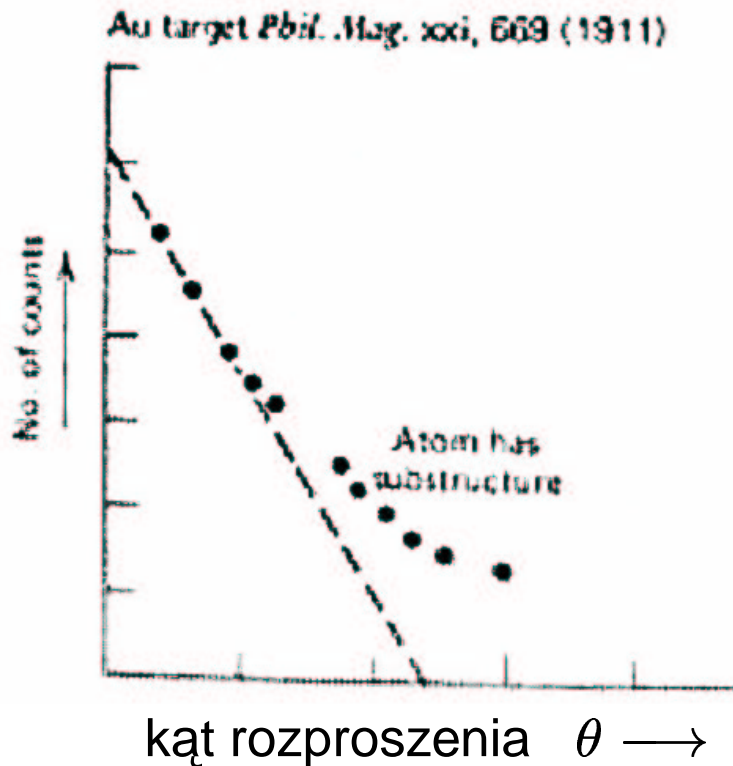
## Wyniki pomiarów

Przeprowadzonych przez  
H.Geigera i E.Marsdena:

Zaobserwowano rozproszenia cząstek  $\alpha$  pod bardzo dużymi kątami,  $\theta \gg \theta_{Th}^{max}$ , czego nie można było wyjaśnić w modelu Thomsona

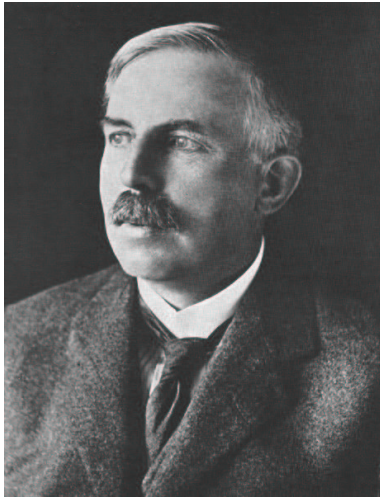
*“To było tak jakbyście wystrzelili piętnastocalowy pocisk w kierunku kawałka bibułki, a on odbił się i was uderzył.”*

E. Rutherford



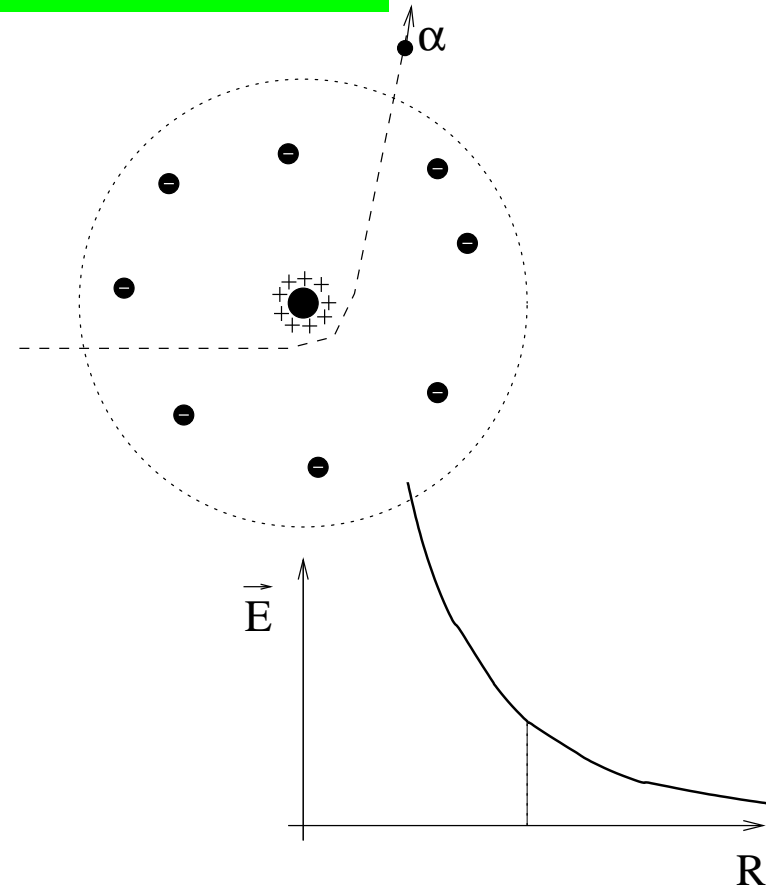
# Doświadczenie Rutherforda

## Model Rutherforda



Rutherford zaproponował  
jądrowy model atomu.

Cały dodatni ładunek atomu ( $10^{-10}$  m)  
skupiony jest w praktycznie **punktowym**  
( $10^{-14}$  m) **jądrze**



Przechodząca cząstka zawsze czuje cały  
ładunek dodatni  $\Rightarrow$  kąty rozproszenia są  
dużo większe.

# Doświadczenie Rutherforda

## Model Rutherforda

Ponieważ cząstka  $\alpha$  rozprasza się na jądrze jako całości, a masa jądra  $M_{Au} \gg M_{\alpha}$

⇒ brak ograniczeń na kąt rozproszenia cząstki  $\alpha$

możliwe nawet (choć mało prawdopodobne) rozproszenie o  $\theta > \pi/2$ .

## Rozkład kątowy

Obserwowany rozkład kątowy rozproszonych cząstek  $\alpha$   
proporcjonalna do tzw. różniczkowego przekroju czynnego

$$N(\theta) \sim \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Wzór Rutherforda

Skończone prawdopodobieństwo rozproszenia  $\theta = \pi$  !

