

Zderzenia

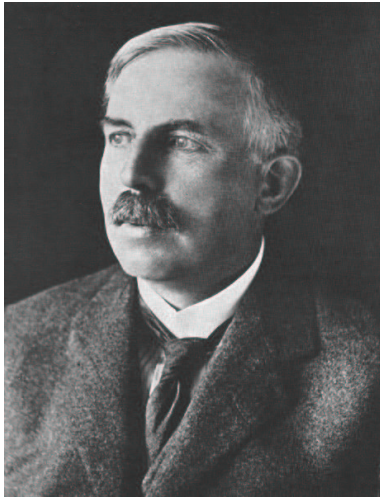
Fizyka I (B+C)

Wykład XVII:

- Doświadczenie Rutherforda
- Przekrój czynny
- Energia relatywistyczna, transformacja Lorentza
- Masa niezmiennicza
- Zderzenia relatywistyczne

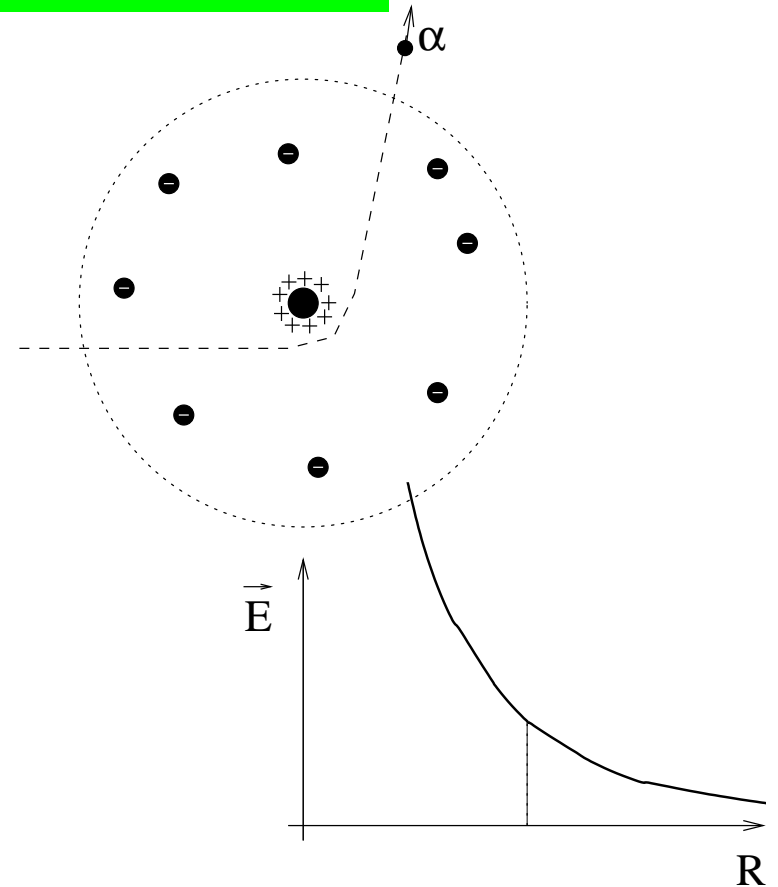
Doświadczenie Rutherforda

Model Rutherforda



Rutherford zaproponował
jądrowy model atomu.

Cały dodatni ładunek atomu (10^{-10} m)
skupiony jest w praktycznie **punktowym**
(10^{-14} m) **jądrze**



Przechodząca cząstka zawsze czuje cały
ładunek dodatni \Rightarrow kąty rozproszenia są
dużo większe.

Doświadczenie Rutherforda

Model Rutherforda

Ponieważ cząstka α rozprasza się na jądrze jako całości, a masa jądra $M_{Au} \gg M_{\alpha}$

⇒ brak ograniczeń na kąt rozproszenia cząstki α

możliwe nawet (choć mało prawdopodobne) rozproszenie o $\theta > \pi/2$.

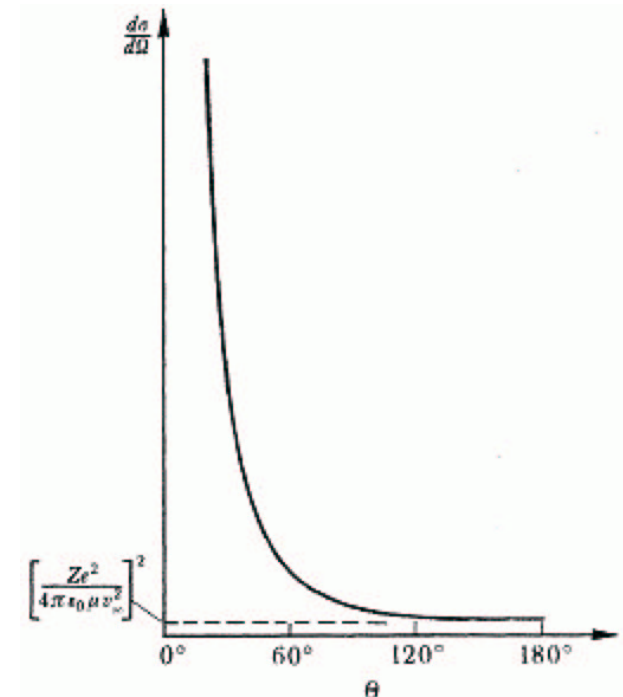
Rozkład kątowy

Obserwowany rozkład kątowy rozproszonych cząstek α
proporcjonalna do tzw. różniczkowego przekroju czynnego

$$N(\theta) \sim \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

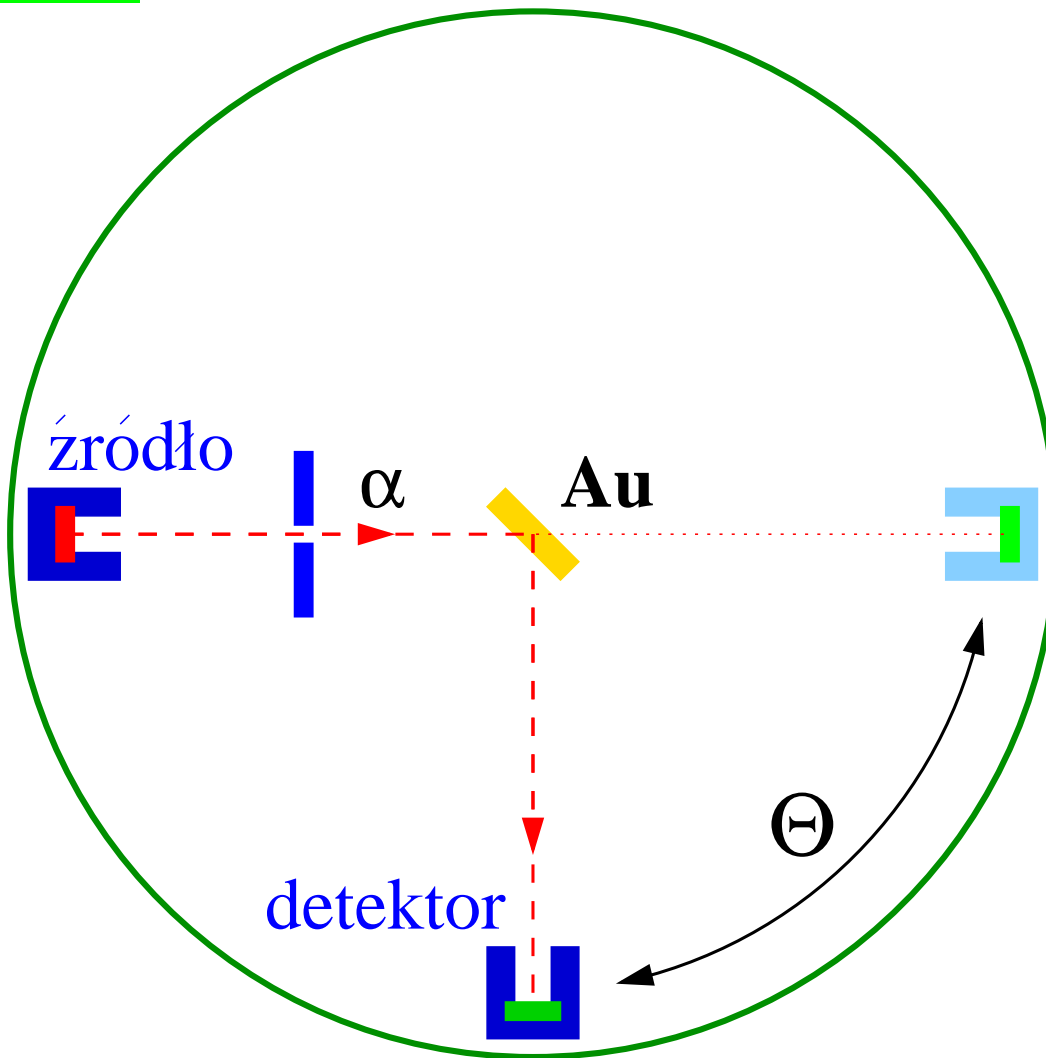
Wzór Rutherforda

Skończone prawdopodobieństwo rozproszenia $\theta = \pi$!



Doświadczenie Rutherforda

Pokaz



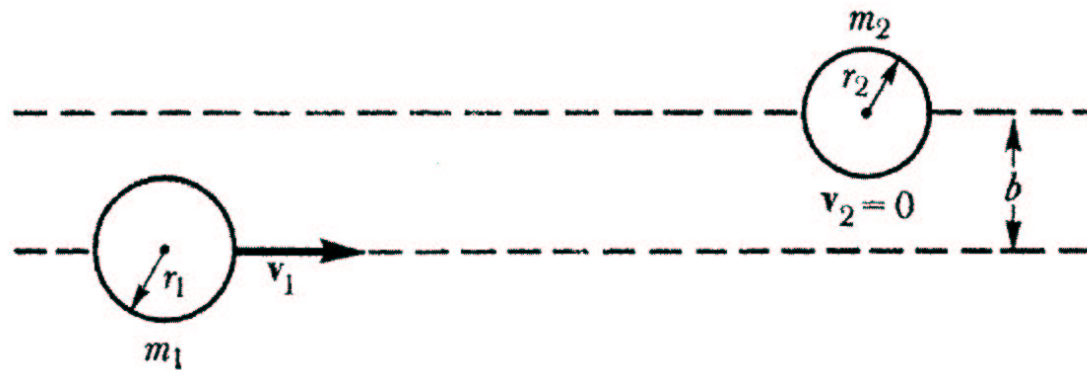
Rozproszone cząstki α
obserwujemy także dla kątów
rozproszenia $\theta \geq \frac{\pi}{2}$

Oddziaływanie z tarczą
zmniejsza strumień cząstek
lejących "do przodu" ($\theta = 0$)

Przekrój czynny

Definicja “klasyczna”

Zderzenie ciał makroskopowych zajdzie, jeśli parametr zderzenia $b < b_{max} = r_1 + r_2$



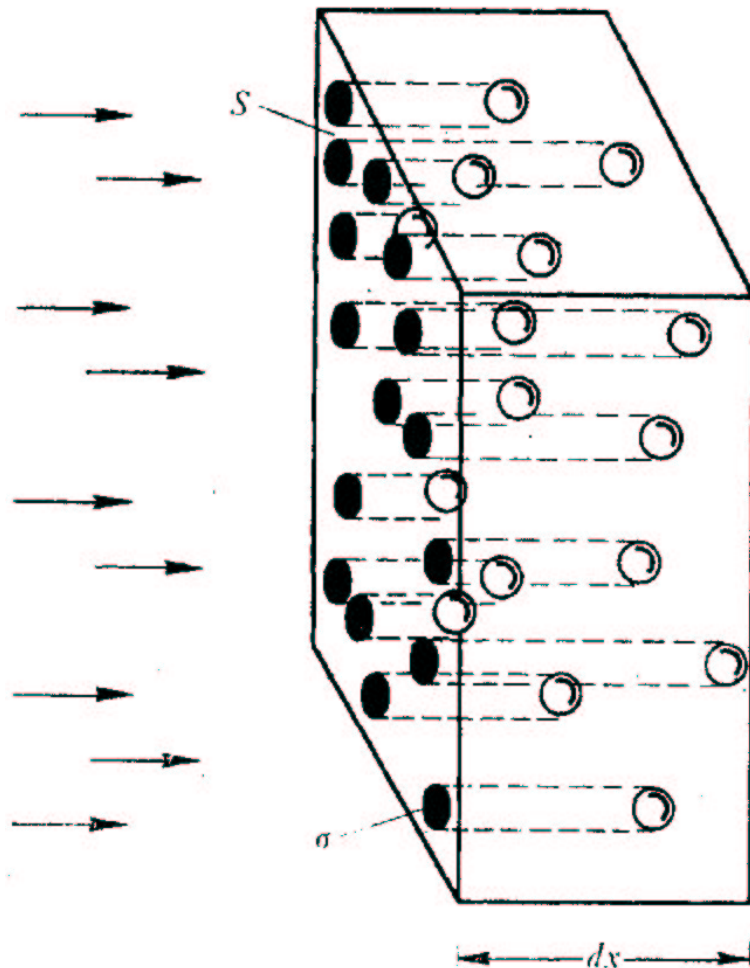
Jednak w przypadku zderzeń obiektów mikroskopowych (np. rozpraszanie cząstek α na jądrach złota) nie jesteśmy w stanie kontrolować parametru zderzenia.

⇒ możemy jedynie postawić pytanie o **prawdopodobieństwo zderzenia**

prawdopodobieństwo reakcji możemy wyrazić poprzez **całkowity przekrój czynny - σ**

Przekrój czynny

Definicja “klasyczna”



Wiązka cząstek padająca na tarczę o grubości dx i gęstości n centr rozproszenia na jednostkę objętości.

Pradopodobieństwo, że cząstka wiązki ulegnie rozproszeniu:

$$p = \frac{\Delta S}{S}$$

gdzie ΔS - “przesłonięta” powierzchnia tarczy

W przybliżeniu $\Delta S \ll S$ (dx małe):

$$\Delta S = n S dx \cdot \sigma$$

$$p = n \sigma dx \quad \leftarrow \text{definicja } \sigma$$

W ujęciu “klasycznym” (zderzenia sztywnych kul)

$$\sigma = \pi b_{max}^2 = \pi (r_1 + r_2)^2$$

“powierzchnia oddziaływania” na element tarczy

Przekrój czynny

W przypadku gdy cząstki mogą oddziaływać na odległość całkowity przekrój czynny może być większy niż przekrój “geometryczny”

Dla oddziaływań grawitacyjnych i kulombowskich (pojedynczych ładunków) $\sigma \rightarrow \infty$ (zasięg oddziaływań jest nieskończony - zawsze mamy niezerowe odchylenie) ogromna większość oddziaływań to jednak “mało ciekawe” rozpraszanie elastyczne

⇒ wprowadzamy niezależnie przekroje czynne na konkretne procesy

- anihilacja $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$: $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-} \sim 20 \text{ nb}$ dla wiązek o energii 1 GeV
- silne oddziaływanie proton-proton:

$$\sigma_{pp} \sim 50 \text{ mb} \approx \pi \left(2 \cdot 0.63 \cdot 10^{-15} \text{ m} \right)^2 \quad r_p \sim 10^{-15} \text{ m}$$

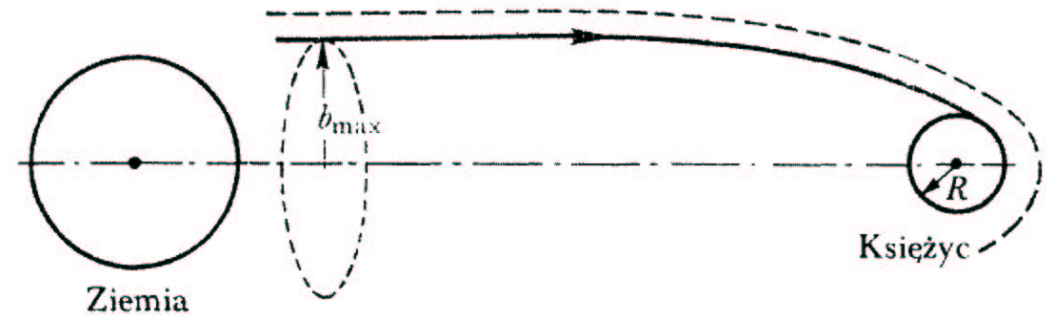
Jednostką przekroju czynnego w fizyce jądrowej i w fizyce cząstek elementarnych jest 1 barn: $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$

Przekrój czynny

Przykład

Przekrój czynny na **trafienie** rakieta w **Księżyc**

W pobliżu Księżycy rakieta (już bez napędu) porusza się po **hiperboli**.



Prędkość rakiety daleko od Księżycy: $v_\infty \Rightarrow E = \frac{m v_\infty^2}{2}, L = m b v_\infty$

Maksymalny parametr zderzenia zapewniający “zderzenie” z Księżycem: b_{max}
Z zasady zachowania energii (rakieta zawraca w $r = R_K$):

$$E = \frac{m v_\infty^2}{2} = E_p^{eff}(R_K) = \frac{L^2}{2 m R_K^2} + E_p(R_K) = \frac{b_{max}^2 v_\infty^2}{2 R_K^2} - \frac{GMm}{R_K}$$
$$\Rightarrow \sigma = \pi b_{max}^2 = \pi R_K^2 \left(1 + \frac{GM}{R v_\infty^2} \right) \rightarrow \pi R_K^2 \text{ dla } v_\infty \rightarrow \infty$$

Energia relatywistyczna

Dla ruchu ciała pod wpływem stałej siły otrzymaliśmy (wykład XI):

$$x(t) = \frac{c}{\alpha} \left(\sqrt{1 + (\alpha t)^2} - 1 \right)$$

$$\beta(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}} \quad \text{gdzie:} \quad \alpha = \frac{F}{mc}$$

Można zauważyć, że: $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2(t)}} = \sqrt{1 + (\alpha t)^2}$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{mc^2}{F} (\gamma - 1)$$

Energia kinetyczna jest równa **pracy** wykonanej przez siłę:

$$E_k(t) = F \cdot x(t) = mc^2 (\gamma(t) - 1)$$

Energia relatywistyczna

Transformacja

Wprowadzamy **energię spoczynkową**:

$$E_0 = m c^2$$

Energia całkowita:

$$E = E_0 + E_k = m c^2 \cdot \gamma$$

Poprzednio wyprowadziliśmy już wyrażenie na pęd:

$$p = m c \cdot \beta \gamma$$

W układzie własnym cząstki: $p_0 = 0$

Zgodnie z definicją układu środka masy.

Możemy zauważyć, że:

$$E = \gamma E_0$$

$$p c = \beta \gamma E_0$$

Jeśli cząstka porusza się wzdłuż osi X :

$$E = \gamma E_0$$

$$c p_x = \beta \gamma E_0$$

$$c p_y = 0$$

$$c p_z = 0$$

Energia relatywistyczna

Transformacja

Formalnie możemy zapisać:

$$(p_0 = p_{0,x} = p_{0,y} = p_{0,z} = 0)$$

$$\begin{pmatrix} E \\ c p_x \\ c p_y \\ c p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E_0 + \gamma \beta c p_{0,x} \\ \gamma \beta E_0 + \gamma c p_{0,x} \\ c p_{0,y} \\ c p_{0,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta & 0 & 0 \\ \gamma \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_0 \\ c p_{0,x} \\ c p_{0,y} \\ c p_{0,z} \end{pmatrix}$$

Okazuje się, że **energia** i **pęd** podlegają, przy zmianie układu odniesienia, transformacji **Lorenza** identycznej z transformacją **czasu i położenia**.

Masa niezmiennicza

Niezmiennik transformacji

Z definicji czynnika Lorentza

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\Rightarrow \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) = 1$$

$$\gamma^2 E_0^2 - \beta^2 \gamma^2 E_0^2 = E_0^2$$

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4$$

niezależnie od prędkości cząstki,
czyli niezależnie od układu odniesienia

Wyrażenie:

$$s = M^2 c^4 = E^2 - c^2 p^2$$

jest niezmiennikiem transformacji Lorentza
dla dowolnego układu fizycznego
(nie zależy od wyboru układu odniesienia)

$M \equiv \sqrt{s}$ - masa niezmiennicza układu
(masa inwariantna)

Kluczowa wielkość w opisie zderzeń
relatywistycznych...

Energia relatywistyczna

Transformacja Lorentza

Transformacja Lorentza ma zastosowanie do wszystkich **czterowektorów**:

- czterowektor **położenia** (w czasoprzestrzeni): (ct, x, y, z)
- czterowektor **energii-pędu** (“czteropęd”): (E, cp_x, cp_y, cp_z)
- czteropotencjał **poła elektromagnetycznego**: (Φ, A_x, A_y, A_z)

$$\vec{E} = -\text{grad}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \text{rot}\vec{A}$$

- różnica dwóch czterowektorów (np. odstęp między zdarzeniami, przekaz czteropędu...)

Niezmiennikiem transformacji Lorentza jest “kwadrat” każdego czterowektora

$$|A^{(4)}|^2 = A_0^2 - |\vec{A}|^2 = A_0^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2$$

- zmiana położenia \Rightarrow interwał: $s_{AB} = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$
- energia-pęd \Rightarrow masa niezmiennicza: $M^2 = E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$

Zderzenia relatywistyczne

Układ środka masy

Energia układu cząstek: $E = \sum_i E_i$

Pęd układu cząstek: $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$

⇒ masa niezmiennicza M

Jak znaleźć układ środka masy $\vec{P}^* = 0$?

Wiemy, że w CMS $E^* = M$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E &= \gamma M \\ cP &= \beta \gamma M \end{aligned}$$

Otrzymujemy związki na współczynniki transformacji do układu środka masy:

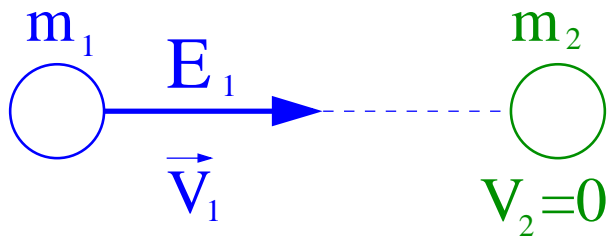
$$\begin{aligned} \beta &= \frac{cP}{E} \\ \gamma &= \frac{E}{Mc^2} \\ \beta\gamma &= \frac{P}{Mc} \end{aligned}$$

obowiązują zarówno dla pojedynczej cząstki jak i dowolnego układu cząstek

Zderzenia relatywistyczne

Rozpraszanie elastyczne

Rozważmy zderzenie “pocisku” o masie m_1 i energii E_1 z “tarczą” o masie m_2 .



Dla układu dwóch ciał mamy: ($c \equiv 1$)

$$E = E_1 + E_2 = E_1 + m_2$$

$$P = P_1 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$$

$$\begin{aligned} M^2 &= E^2 - P^2 = (E_1 + m_2)^2 - P_1^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2 E_1 m_2 \end{aligned}$$

Pęd obu ciał w układzie środka masy:

$$p_1^* = p_2^* = \beta \gamma m_2 = \frac{P}{M} m_2$$

$$(p^*)^2 = \frac{(E_1^2 - m_1^2) m_2^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2 E_1 m_2}$$

Jeśli spełniona ma być zasada zachowania pędu i zasada zachowania energii to tak jak w przypadku klasycznym:

$$p_1^* = p_2^* = p_1'^* = p_2'^*$$

W układzie środka masy wartości pędów nie ulegają zmianie.

Warunek: $m_1' = m_1$ i $m_2' = m_2$!!!

Rozpraszanie elastyczne

Zderzenia relatywistyczne

$$\underline{m_1 = m_2}$$

Dla zderzeń cząstek o równej masie:

$$E = E_1 + m$$

$$P = P_1 = \sqrt{E_1^2 - m^2}$$

$$M^2 = E^2 - P^2 = 2 E_1 m + 2 m^2$$

⇒ współczynniki transformacji:

$$\gamma = \sqrt{\frac{E_1 + m}{2m}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{E_1 - m}{E_1 + m}}$$

$$\beta \gamma = \sqrt{\frac{E_1 - m}{2m}}$$

Energia i pęd obu ciał w układzie środka masy:
(z transformacji Lorentza dla spoczywającego ciała)

$$p^* = \gamma \beta m$$

$$E^* = \gamma m$$

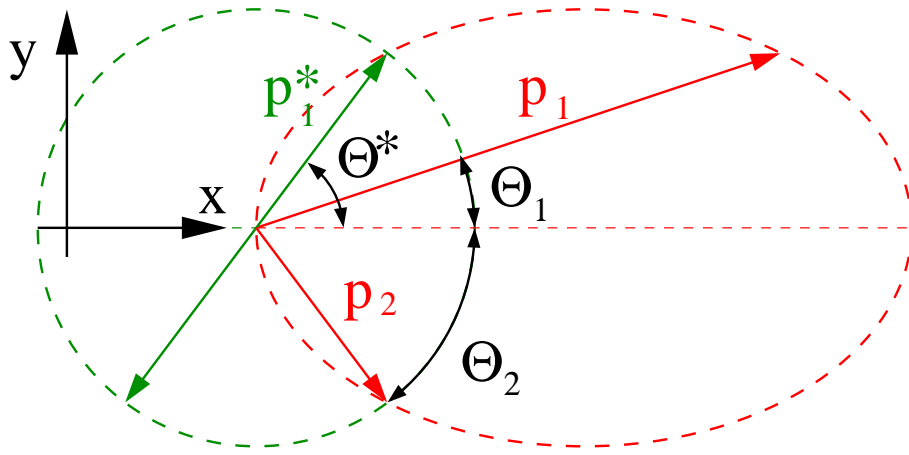
$$(p^*)^2 = \frac{1}{2} m (E_1 - m)$$

$$(E^*)^2 = \frac{1}{2} m (E_1 + m)$$

Zderzenia relatywistyczne

$$\underline{m_1 = m_2}$$

W układzie środka masy rozproszenie opisuje kąt θ^* :



$$p_{1,x}^* = \gamma \beta m \cos \theta^*$$

$$p_{1,y}^* = \gamma \beta m \sin \theta^*$$

$$E_1^* = \gamma m$$

Transformacja do układu laboratoryjnego:

$$\begin{aligned} p_{1,x} &= \gamma p_{1,x}^* + \gamma \beta E_1^* \\ &= \gamma^2 \beta m (1 + \cos \theta^*) \end{aligned}$$

$$p_{1,y} = \gamma \beta m \sin \theta^*$$

$$\gamma^2 \beta m = \frac{1}{2} P$$

Możliwe wartości $p_{1,x}$ i $p_{1,y}$ spełniają:

$$\gamma^2 p_{1,y}^2 + \left(p_{1,x} - \frac{P}{2} \right)^2 = \left(\frac{P}{2} \right)^2$$

⇒ elipsa

transformacja Lorenza “rozciąga” rozkład pędów wzdłuż kierunku ruchu pocisku.

Zderzenia relatywistyczne

$$\underline{m_1 = m_2}$$

Kąty rozproszenia mierzone w LAB:

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta^*}{\gamma(1 + \cos \theta^*)}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{\sin \theta^*}{\gamma(1 - \cos \theta^*)}$$

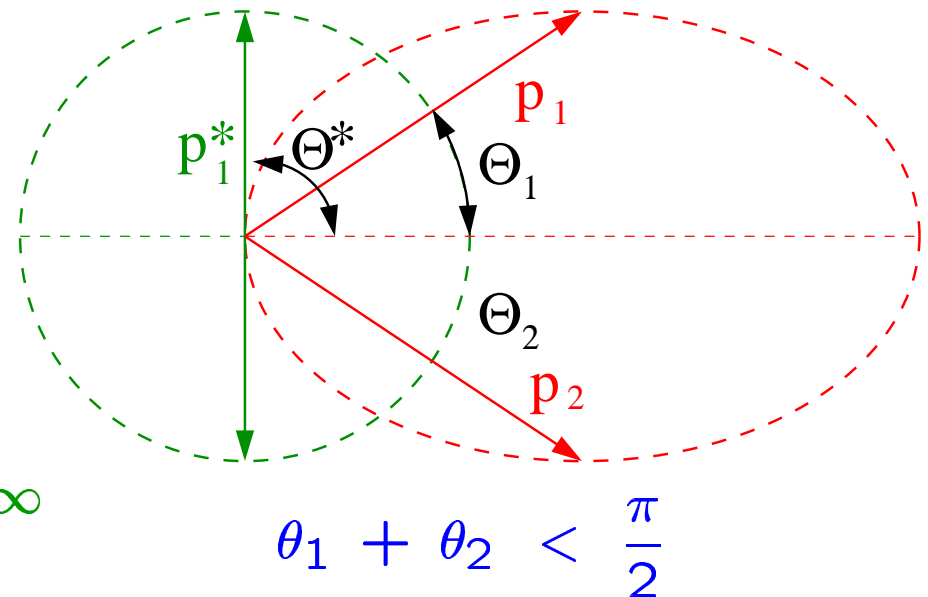
Kąt pomiędzy cząstkami:

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{2\gamma}{\sin \theta^* (\gamma^2 - 1)}$$

$$\rightarrow \frac{2}{\gamma \sin \theta^*} \rightarrow 0 \quad \text{dla } \gamma \rightarrow \infty$$

Dla rozproszenia z $\theta^* = \frac{\pi}{2}$

$$\tan \theta = \frac{1}{\gamma} < 1$$



W granicy ultrarelatywistycznej rozproszenie zachodzi naogół pod małymi kątami

Zderzenia relatywistyczne

Zderzenia nieelastyczne

Zderzenia elastyczne - cząstki rozproszone takie same jak cząstki zderzające się

Jest to jednak bardzo szczególny przypadek

W oddziaływaniach cząstek elementarnych, zwłaszcza przy wysokiej energii, obserwujemy bardzo wiele reakcji, w których powstają nowe cząstki:

- Produkcja pojedynczej cząstki (tzw. “rezonansu”): $a + b \rightarrow c$
- Produkcja dwóch cząstek: $a + b \rightarrow c + d$
jedna z nich może być cząstką stanu początkowego
- Produkcja wielu cząstek: $a + b \rightarrow X$
gdzie X oznacza dowolny stan wielocząstkowy