Zderzenia

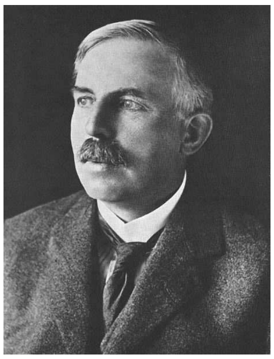
Fizyka I (B+C)

Wykład XVII:

- Doświadczenie Rutherforda
- Przekrój czynny
- Energia relatywistyczna, transformacja Lorenza
- Masa niezmiennicza
- Zderzenia relatywistyczne

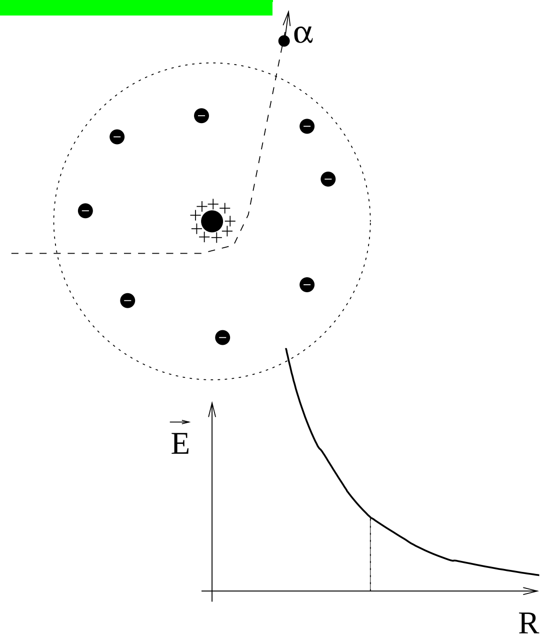
Doświadczenie Rutherforda

Model Rutherforda



Rutherford zaproponował jądrowy model atomu.

Cały dodatni ładunek atomu (10^{-10}m) skupiony jest w praktycznie punktowym (10^{-14}m) jądrze



Przechodząca cząstka zawsze czuje cały ładunek dodatni $\Rightarrow$ kąty rozproszenia są dużo większe.

Doświadczenie Rutherforda

Model Rutherforda

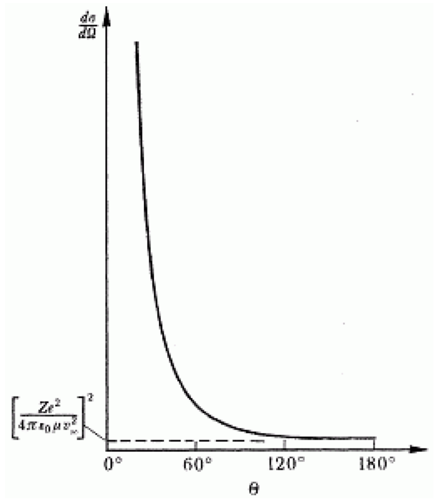
Ponieważ cząstka α rozprasza się na jądrze jako całości, a masa jądra $M_{Au} \gg M_\alpha$

$\Rightarrow$ brak ograniczeń na kąt rozproszenia cząstki α

możliwe nawet (choć mało prawdopodobne) rozproszenie o $\theta > \pi/2$.

Rozkład kątowy

Obserwowany rozkład kątowy rozproszonych cząstek α
proporcjonalna do tzw. rózniczkowego przekroju czynnego



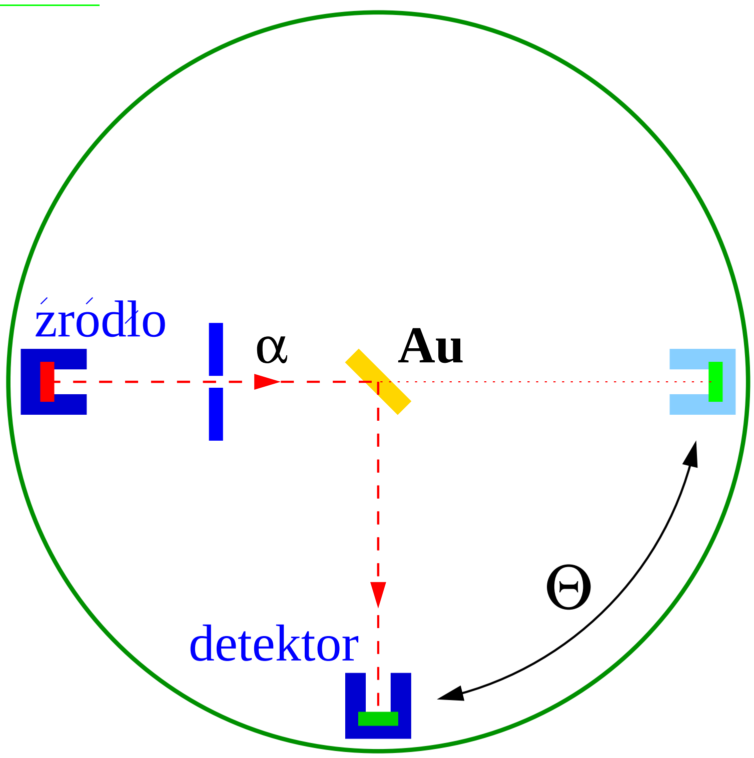
$$N(\theta) \sim \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{4E^2 \sin^4\frac{\theta}{2}}$$

Wzór Rutherforda

Skończone prawdopodobieństwo rozproszenia $\theta = \pi$!

Doświadczenie Rutherforda

Pokaz



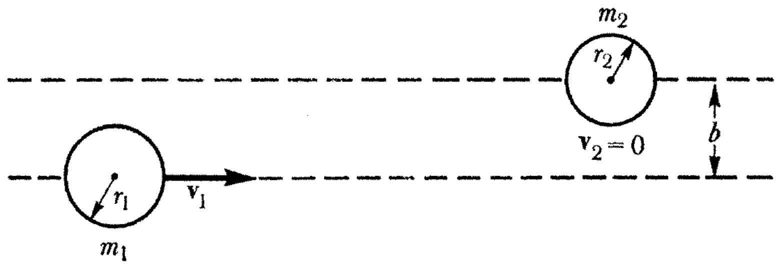
Rozproszone cząstki α obserwujemy także dla kątów rozproszenia $\theta \geq \frac{\pi}{2}$

Oddziaływanie z tarczą zmniejsza strumień cząstek lecących "do przodu" ($\theta = 0$)

Przekrój czynny

Definicja "klasyczna"

Zderzenie ciał makroskopowych zajdzie, jeśli parametr zderzenia $b < b_{max} = r_1 + r_2$



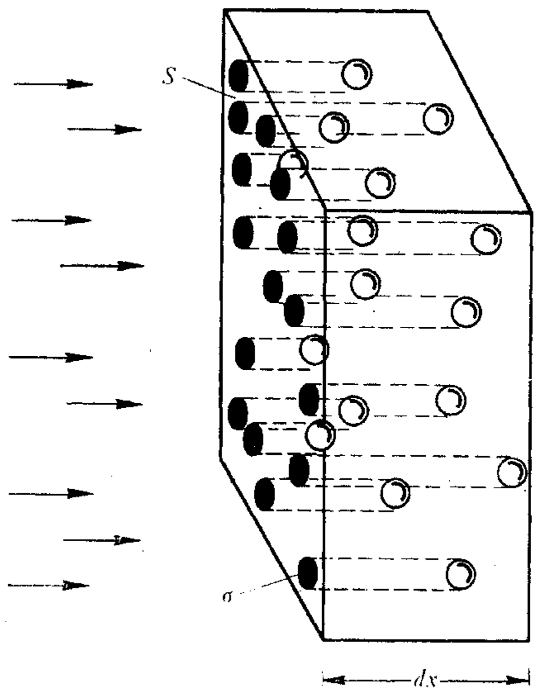
Jednak w przypadku zderzeń obiektów mikroskopowych (np. rozpraszanie cząstek α na jądrach złota) nie jesteśmy w stanie kontrolować parametru zderzenia.

$\Rightarrow$ możemy jedynie postawić pytanie o **prawdopodobieństwo zderzenia**

prawdopodobieństwo reakcji możemy wyrazić poprzez **całkowity przekrój czynny -** σ

Przekrój czynny

Definicja "klasyczna"



Wiązka cząstek padająca na tarczę o grubości dx i gęstości n centr rozproszenia na jednostkę objętości.

Pradopodobieństwo, że cząstka wiązki ulegnie rozproszeniu:

$$p = \frac{\Delta S}{S}$$

gdzie ΔS - "przesłonięta" powierzchnia tarczy

W przybliżeniu $\Delta S \ll S$ (dx małe):

$$\Delta S = n\, S\, dx \cdot \sigma$$
$$p = n\, \sigma\, dx \quad \leftarrow \text{ definicja } \sigma$$

W ujęciu "klasycznym" (zderzenia sztywnych kul)

$$\sigma = \pi\, b_{max}^2 = \pi\, (r_1 + r_2)^2$$

"powierzchnia oddziaływania" na element tarczy

Przekrój czynny

W przypadku gdy cząstki mogą oddziaływac na odległość całkowity przekrój czynny może być większy niż przekrój "geometryczny"

Dla oddziaływań grawitacyjnych i kulombowskich (pojedyńczych ładunków) $\sigma \to \infty$
(zasięg oddziaływań jest nieskończony - zawsze mamy niezerowe odchylenie)
ogromna większość oddziaływań to jednak "mało ciekawe" rozpraszanie elastyczne

$\Rightarrow$ wprowadzamy niezależnie przekroje czynne na konkretne procesy

- anihilacja $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$: $\sigma_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-} \sim 20\,nb$ dla wiązek o energii 1 GeV
- silne oddziaływanie proton-proton:

$$\sigma_{pp} \sim 50\,mb \approx \pi\left(2 \cdot 0.63\cdot 10^{-15}\,m\right)^2 \qquad r_p \sim 10^{-15}\,m$$

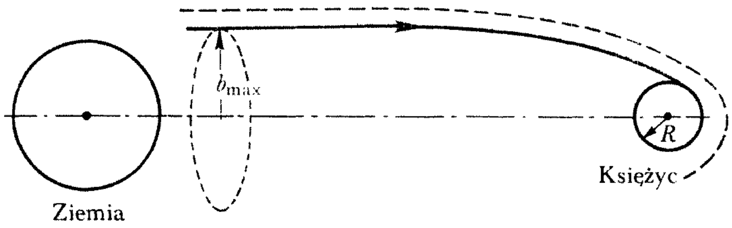
Jednostką przekroju czynnego w fizyce jądrowej i w fizyce cząstek elementarnych jest 1 barn: $1b = 10^{-28}\,m^2$

Przekrój czynny

Przykład

Przekrój czynny na trafienie rakietą w Księżyc

W pobliżu Księżyca rakieta (już bez napędu) porusza się po hiperboli.



Prędkość rakiety daleko od Księżyca: v_∞ $\Rightarrow$ $E = \frac{m\,v_\infty^2}{2}$, $L = m\,b\,v_\infty$

Maksymalny parametr zderzenia zapewniający "zderzenie" z Księżycem: b_{max}
Z zasady zachowania energii (rakieta zawraca w $r = R_K$):

$$E = \frac{m\,v_\infty^2}{2} = E_p^{eff}(R_K) = \frac{L^2}{2\,m\,R_K^2} + E_p(R_K) = \frac{b_{max}^2\,v_\infty^2}{2\,R_K^2} - \frac{GMm}{R_K}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \pi b_{max}^2 = \pi R_K^2\left(1 + \frac{GM}{Rv_\infty^2}\right) \quad \to \pi R_K^2 \text{ dla } v_\infty \to \infty$$

Energia relatywistyczna

Dla ruchu ciała pod wpływem stałej siły otrzymaliśmy (wykład XI):

$$x(t) = \frac{c}{\alpha}\left(\sqrt{1+(\alpha t)^2} - 1\right)$$

$$\beta(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1+(\alpha t)^2}} \qquad \text{gdzie:} \quad \alpha = \frac{F}{mc}$$

Można zauważyć, że: $$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2(t)}} = \sqrt{1+(\alpha t)^2}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{mc^2}{F}(\gamma - 1)$$

Energia kinetyczna jest równa pracy wykonanej przez siłę:

$$E_k(t) = F \cdot x(t) = m\,c^2\,(\gamma(t) - 1)$$

Energia relatywistyczna

Transformacja

Wprowadzamy energię spoczynkową:

$$E_\circ = m\,c^2$$

Energia całkowita:

$$E = E_\circ + E_k = m\,c^2 \cdot \gamma$$

Poprzednio wyprowadziliśmy już wyrażenie na pęd:

$$p = m\,c \cdot \beta\,\gamma$$

W układzie własnym cząstki: $p_\circ = 0$

Zgodnie z definicją układu środka masy.

Możemy zauważyć, że:

$$E = \gamma\,E_\circ$$
$$p\,c = \beta\,\gamma\,E_\circ$$

Jeśli cząstka porusza się wzdłuż osi X:

$$E = \gamma\,E_\circ$$
$$c\,p_x = \beta\,\gamma\,E_\circ$$
$$c\,p_y = 0$$
$$c\,p_z = 0$$

Energia relatywistyczna

Transformacja

Formalnie możemy zapisać:

($p_\circ = p_{\circ,x} = p_{\circ,y} = p_{\circ,z} = 0$)

$$\begin{pmatrix} E \\ c\,p_x \\ c\,p_y \\ c\,p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\,E_\circ + \gamma\,\beta\,c\,p_{\circ,x} \\ \gamma\,\beta\,E_\circ + \gamma\,c\,p_{\circ,x} \\ c\,p_{\circ,y} \\ c\,p_{\circ,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\,\beta & 0 & 0 \\ \gamma\,\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_\circ \\ c\,p_{\circ,x} \\ c\,p_{\circ,y} \\ c\,p_{\circ,z} \end{pmatrix}$$

Okazuje się, że energia i pęd podlegają, przy zmianie układu odniesienia, transformacji Lorenza identycznej z transformacją czasu i położenia.

Masa niezmienicza

Niezmiennik transformacji

Z definicji czynnika Lorenza

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \gamma^2(1-\beta^2) = 1$$

$$\gamma^2\,E_\circ^2 - \beta^2\gamma^2\,E_\circ^2 = E_\circ^2$$

$$\boxed{E^2 - c^2\,p^2 = m^2\,c^4}$$

niezależnie od prędkości cząstki,

czyli niezależnie od ukłądu odniesienia

Wyrażenie:

$$s = M^2\,c^4 = E^2 - c^2\,p^2$$

jest niezmiennikiem transformacji Lorenza dla dowolnego układu fizycznego (nie zależy od wyboru układu odniesienia)

$M \equiv \sqrt{s}$ - masa niezmienicza układu (masa inwariantna)

Kluczowa wielkość w opisie zderzeń relatywistycznych...

Energia relatywistyczna

Transformacja Lorenza

Transformacja Lorenza ma zastosowanie do wszystkich czterowektorów:

- czterowektor położenia (w czasoprzestrzeni): (ct, x, y, z)
- czterowektor energii-pędu („czteropęd"): (E, cp_x, cp_y, cp_z)
- czteropotencjał pola elektromagnetycznego: (Φ, A_x, A_y, A_z)

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$$

- różnica dwóch czterowektorów (np. odstęp między zdarzeniami, przekaz czteropędu...)

Niezmiennikiem transformacji Lorenza jest „kwadrat" każdego czterowektora

$$\left|A^{(4)}\right|^2 = A_0^2 - \left|\vec{A}\right|^2 = A_0^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2$$

- zmiana położenia $\Rightarrow$ interwał: $s_{AB} = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$
- energia-pęd $\Rightarrow$ masa niezmiennicza: $M^2 = E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$

Zderzenia relatywistyczne

Układ środka masy

Energia układu cząstek: $E = \sum_i E_i$

Pęd układu cząstek: $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$

$\Rightarrow$ masa niezmiennicza M

Jak znaleźć układ środka masy $\vec{P}^\star = 0$?

Wiemy, że w CMS $E^\star = M$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} E &= \gamma M \\ c P &= \beta \gamma M \end{aligned}$$

Otrzymujemy związki na współczynniki transformacji do układu środka masy:

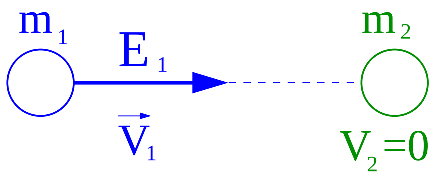
$$\boxed{\begin{aligned} \beta &= \frac{c P}{E} \\ \gamma &= \frac{E}{M c^2} \\ \beta\gamma &= \frac{P}{M c} \end{aligned}}$$

obowiązują zarówno dla pojedyńczej cząstki jak i dowolnego układu cząstek

Zderzenia relatywistyczne

Rozpraszanie elastyczne

Rozważmy zderzenie “pocisku” o masie m_1 i energii E_1 z “tarczą” o masie m_2.



Dla układu dwóch ciał mamy: ($c \equiv 1$)

$$E = E_1 + E_2 = E_1 + m_2$$

$$P = P_1 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$$

$$M^2 = E^2 - P^2 = (E_1 + m_2)^2 - P_1^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\,E_1\,m_2$$

Pęd obu ciał w układzie środka masy:

$$p_1^\star = p_2^\star = \beta\gamma\, m_2 = \frac{P}{M}\, m_2$$

$$(p^\star)^2 = \frac{(E_1^2 - m_1^2)\, m_2^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2\,E_1\,m_2}$$

Jeśli spełniona ma być zasada zachowania pędu i zasada zachowania energii to tak jak w przypadku klasycznym:

$$p_1^\star = p_2^\star = p_1'^\star = p_2'^\star$$

W układzie środka masy wartości pędów nie ulegają zmianie.

Warunek: $m_1' = m_1$ i $m_2' = m_2$!!!

Rozpraszanie elastyczne

Zderzenia relatywistyczne

$m_1 = m_2$

Dla zderzeń cząstek o równej masie:

$$E = E_1 + m$$

$$P = P_1 = \sqrt{E_1^2 - m^2}$$

$$M^2 = E^2 - P^2 = 2\,E_1\,m + 2\,m^2$$

$\Rightarrow$ współczynniki transformacji:

$$\gamma = \sqrt{\frac{E_1 + m}{2m}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{E_1 - m}{E_1 + m}}$$

$$\beta\,\gamma = \sqrt{\frac{E_1 - m}{2m}}$$

Energia i pęd obu ciał w układzie środka masy:

(z transformacji Lorenza dla spoczywającego ciała)

$$p^\star = \gamma\,\beta\,m$$

$$E^\star = \gamma\,m$$

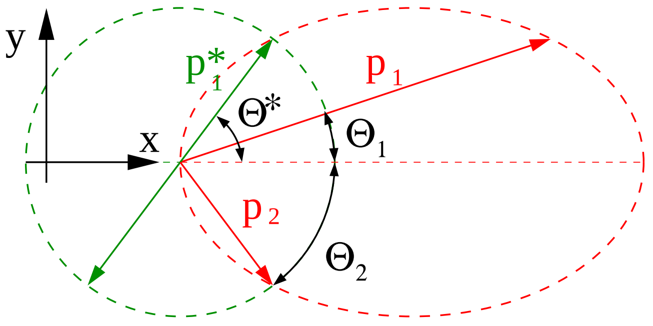
$$(p^\star)^2 = \frac{1}{2}\,m\,(E_1 - m)$$

$$(E^\star)^2 = \frac{1}{2}\,m\,(E_1 + m)$$

Zderzenia relatywistyczne

$m_1 = m_2$

W układzie środka masy rozproszenie opisuje kąt $\theta^\star$:



$$\begin{aligned} p^\star_{1,x} &= \gamma\,\beta\,m\,\cos\theta^\star \\ p^\star_{1,y} &= \gamma\,\beta\,m\,\sin\theta^\star \\ E^\star_1 &= \gamma\,m \end{aligned}$$

Transformacja do układu laboratoryjnego:

$$\begin{aligned} p_{1,x} &= \gamma\,p^\star_{1,x} + \gamma\,\beta\,E^\star_1 \\ &= \gamma^2\,\beta\,m\,(1+\cos\theta^\star) \\ p_{1,y} &= \gamma\,\beta\,m\,\sin\theta^\star \end{aligned}$$

$$\gamma^2\,\beta\,m = \frac{1}{2}P$$

Możliwe wartości $p_{1,x}$ i $p_{1,y}$ spełniają:

$$\gamma^2\,p^2_{1,y} + \left(p_{1,x} - \frac{P}{2}\right)^2 = \left(\frac{P}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow$ elipsa

transformacja Lorenza “rozciąga” rozkład pędów wzdłuż kierunku ruchu pocisku.

Zderzenia relatywistyczne

$m_1 = m_2$

Kąty rozproszenia mierzone w LAB:

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\theta^\star}{\gamma(1+\cos\theta^\star)}$$

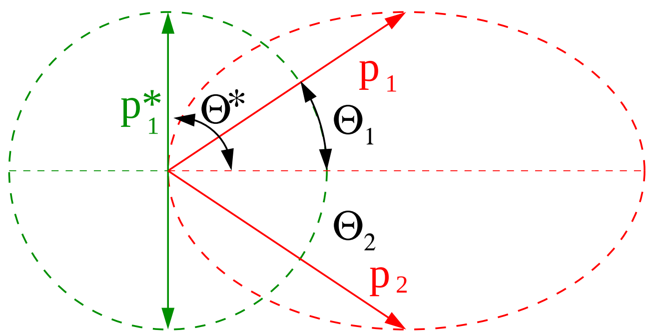
$$\tan\theta_2 = \frac{\sin\theta^\star}{\gamma(1-\cos\theta^\star)}$$

Kąt pomiędzy cząstkami:

$$\tan(\theta_1+\theta_2) = \frac{2\gamma}{\sin\theta^\star\,(\gamma^2-1)} \rightarrow \frac{2}{\gamma\,\sin\theta^\star} \rightarrow 0 \quad \text{dla } \gamma\rightarrow\infty$$

Dla rozproszenia z $\theta^\star = \frac{\pi}{2}$

$$\tan\theta = \frac{1}{\gamma} < 1$$



$$\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$$

W granicy ultrarelatywistycznej rozproszenie zachodzi naogół pod małymi kątami

Zderzenia relatywistyczne

Zderzenia nieelastyczne

Zderzenia elastyczne - cząstki rozproszone takie same jak cząstki zderzające się

Jest to jednak bardzo szczególny przypadek

W oddziaływaniach cząstek elementarnych, zwłaszcza przy wysokiej energii, obserwujemy bardzo wiele reakcji, w których powstają nowe cząstki:

- Produkcja pojedyńczej cząstki (tzw. "rezonansu"): $a + b \to c$
- Produkcja dwóch cząstek: $a + b \to c + d$
  jedna z nich może być cząstką stanu początkowego
- Produkcja wielu cząstek: $a + b \to X$
  gdzie X oznacza dowolny stan wielocząstkowy