# Bryła sztywna

Fizyka I (B+C)

## Wykład XXI:

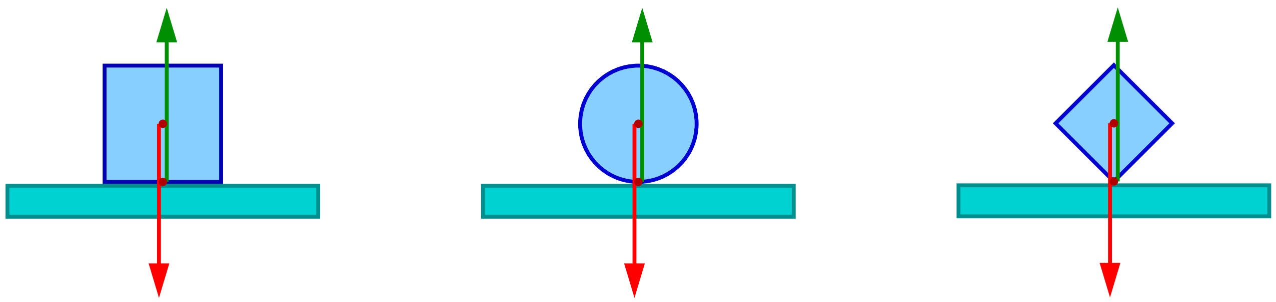
- Statyka
- Prawa ruchu
- Moment bezwładności
- Energia ruchu obrotowego

# Statyka

## Równowaga

Bryły sztywnej umieszczonej na płaski podłożu:

równowaga trwała | obojętna | chwiejna



Nieznaczne (infintezymalne) wychylenie bryły z położenia równowagi powoduje:

| | | |
|---|---|---|
| podniesienie środka masy | stała wysokość | obniżenie środka masy |
| wzrost energii potencjalnej | środka masy | zmniejszenie energii potencjalnej |

Typ równowagi zależy od zmiany położenia środka masy $(\vec{F} = -\mathrm{grad} E_p)$

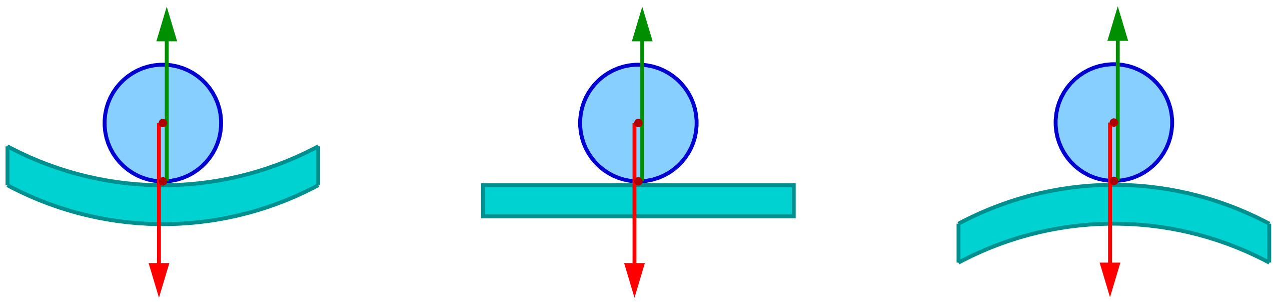
# Statyka

## Równowaga

Zmiana położenia środka masy, przy wychyleniu z położenia równowagi, zależy od kształtu bryły, ale także od charakteru więzów.

Np: równowaga kuli zależy od kształtu powierzchni na której leży

równowaga trwała | obojętna | chwiejna



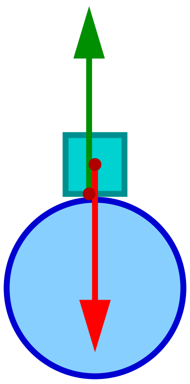


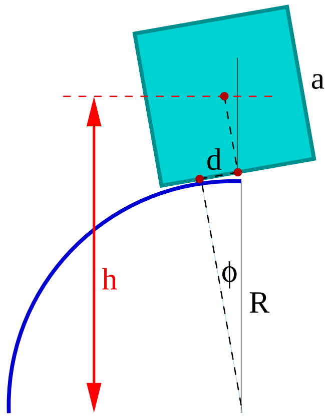
# Statyka

## Równowaga

Kryterium zmiany położenia środka masy $\Rightarrow$ energii potencjalnej ma zastosowanie także w bardziej ogólnych przypadkach

Np: sześcian ustawiony na kuli






Położenie środka masy sześcianu (nad środkiem kuli):

$$h = R\cos\phi + d\sin\phi + \frac{1}{2}a\cos\phi$$

$$d = R\phi$$

$$h = \left(R+\frac{a}{2}\right)\cos\phi + R\phi\sin\phi$$

w przybliżeniu małych kątów:

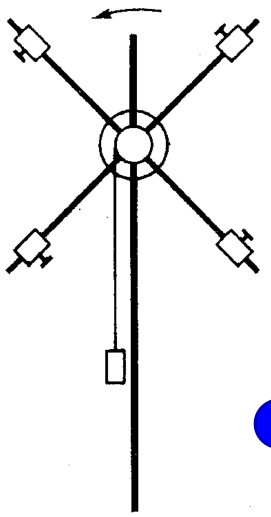
$\sin\phi \approx \phi$, $\cos\phi \approx 1-\frac{1}{2}\phi^2$

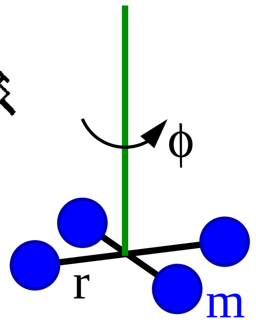
$$h = \left(R+\frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(R-\frac{a}{2}\right)\cdot\phi^2$$

Równowaga trwała jeśli $R > \frac{a}{2}$

# Prawa ruchu

## Obrót wokół ustalonej osi






Pod wpływem momentu siły $\vec{M}$:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\sum_i m_i\, r_{\perp\, i}^2 = \vec{\varepsilon}\, I$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad - \quad \text{przyspieszenie kątowe}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I} = \text{const}$$

$I$ - moment bezwładności **względem wybranej osi**.



# Moment bezwładności

Przyspieszenie kątowe w ruchu bryły sztywnej zależy nie tylko od masy całkowitej, ale także od jej rozłożenia względem osi obrotu.

Rozkład masy względem wybranej osi obrotu
(najczęściej przechodzącej przez środek masy, ale nie koniecznie)
opisuje moment bezwładności

$$I = \sum_i m_i\, r_{\perp\, i}^2$$

w przypadku ciągłego rozkładu masy - całka po objętości:

$$I = \int dV\, \rho\, r_\perp^2$$

Dla ciała jednorodnego ($\rho$ = const = $\frac{M}{V}$):

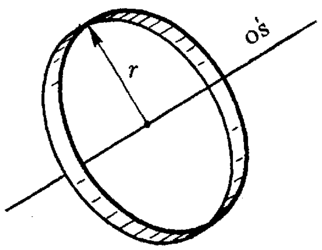
$$I = \frac{M}{V}\int dV\ r_\perp^2 = M\,\frac{\int dV\, r_\perp^2}{\int dV} = M\langle r_\perp^2\rangle$$

gdzie $\langle r_\perp^2\rangle$ - średni kwadrat odległości od osi obrotu

# Moment bezwładności

Stosunek momentu bezwładności do masy zależy od kształtu i rozmiarów ciała:

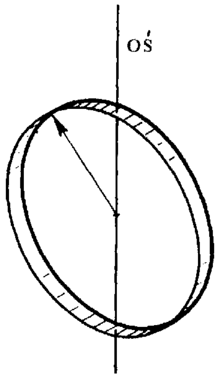
$$\frac{I}{M} = \langle r_\perp^2 \rangle$$




## Obręcz (pusta w środku)

Obrót **wokół osi symetrii** $\Rightarrow$ wszystkie punkty równoodległe od osi:

$$\langle r_\perp^2 \rangle = r^2 \Rightarrow I_\perp = M\, r^2$$




Obrót **wokół średnicy**

oś obrotu - oś X, średnica prostopadła do osi obrotu - oś Y

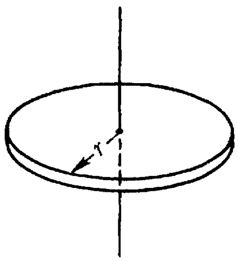
$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{i} \quad \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle r_\perp^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \frac{1}{2} r^2$$

$$\Rightarrow \quad I_\parallel = \frac{1}{2} M\, r^2$$



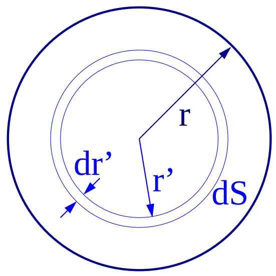
# Moment bezwładności




## Koło (krążek - masa rozłożona po powierzchni)

Obrót **wokół osi symetrii**

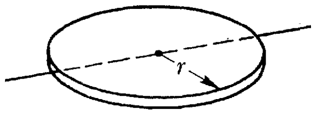
Koło = suma wielu obręczy $\Rightarrow$ śrenia po powierzchni:




$$\langle r_\perp^2 \rangle = \frac{\int r'^2 \cdot dS}{S} = \frac{1}{\pi r^2} \int r'^2 \cdot 2\pi r' dr'$$

$$= \frac{2\pi}{\pi r^2} \frac{1}{4} r^4 = \frac{1}{2} r^2$$

$$\Rightarrow \quad I_\perp = \frac{1}{2} M\, r^2$$

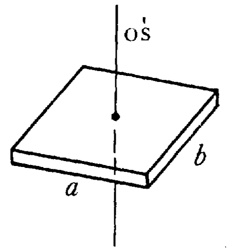



Obrót **wokół średnicy**

Dla każdej obręczy $\langle r'^2_\perp \rangle$ zmniejsza się 2 razy

$$\Rightarrow \quad I_\parallel = \frac{1}{4} M\, r^2$$

# Moment bezwładności



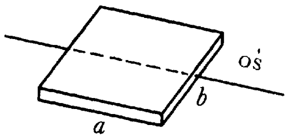

## Prostokąt (masa rozłożona po powierzchni)

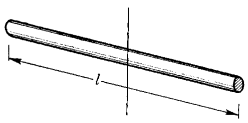
Obrót **wokół osi prostopadłej**, przechodzącej przez środek masy

$$\langle r_\perp^2 \rangle = \frac{\int (x^2+y^2)\cdot dS}{S} = \frac{1}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy\,(x^2+y^2)$$

$$= \frac{1}{ab}\frac{1}{12}(a^3b+ab^3) = \frac{1}{12}(a^2+b^2)$$

$$\Rightarrow \quad I_\perp = \frac{1}{12} M\,(a^2+b^2)$$




Obrót **wokół osi równoległej**, przechodzącej przez środek masy

Wymiar wzdłuż osi obrotu przestaje być istotny $\Rightarrow$ pręt

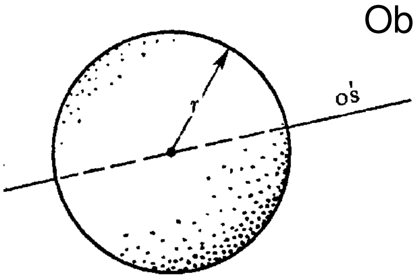
$$\Rightarrow \quad I_\parallel = \frac{1}{12} M\,b^2 = \frac{1}{12} M\,l^2$$



# Moment bezwładności

## Sfera (masa rozłożona na powierzchni kuli)

Obrót **wokół osi symetrii**




$$x^2+y^2+z^2 = r^2 \quad \text{i} \quad \langle x^2\rangle = \langle y^2\rangle = \langle z^2\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle r_\perp^2\rangle = \langle x^2+y^2\rangle = \frac{2}{3} r^2$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2}{3} M\,r^2$$

## Kula (masa rozłożona objętościowo)

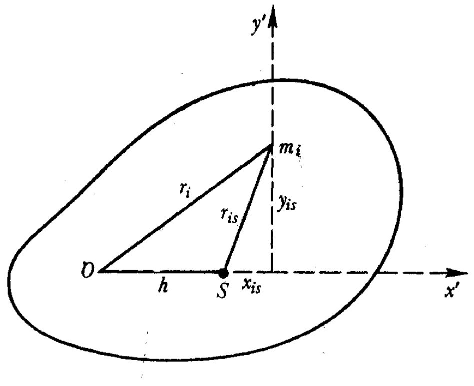
Suma wielu sfer $\Rightarrow$ śrenia po objętości:

$$\langle r_\perp^2\rangle = \frac{\int \frac{2}{3} r'^2 \cdot dV}{V} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int \frac{2}{3} r'^2 \cdot 4\pi r'^2 dr'$$

$$= \frac{\frac{8}{3}\pi}{\frac{4}{3}\pi r^3}\frac{1}{5} r^5 = \frac{2}{5} r^2 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2}{5} M\,r^2$$

# Moment bezwładności

## Twierdzenie o osiach równoległych




Zazwyczaj liczymy moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek ciężkości S
(wszystkie podane przykłady)

Bryła może jednak wirować wokół dowolnej osi...

Moment bezwładności względem osi równoległej 0, odległej o $h$ od osi S: (XY: układ środka masy)

$$r_{iO}^2 = (x_i + h)^2 + y_i^2 \;=\; h^2 + 2hx_i + r_{iS}^2$$

$$I_O = \sum_i m_i r_{iO}^2 = h^2 \sum_i m_i \;+\; 2h \sum_i m_i x_i + \sum_i m_i r_{iS}^2$$

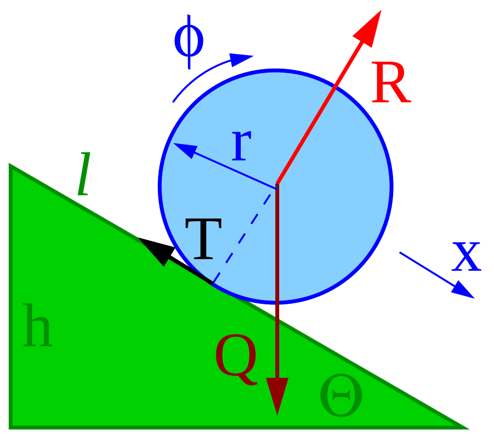
$$\Rightarrow \quad I_O \;=\; I_S \;+\; M\,h^2$$

Twierdzenie Steinera



# Prawa ruchu

## Równia pochyła




Staczanie po równi pochyłej symetrycznej bryły (obręcz, walec, kula...) bez poślizgu:

$$x = r\,\phi \;\Rightarrow\; a = r\,\varepsilon$$

Ruch postępowy (wzdłuż równi):

$$ma \;=\; Q\,\sin\theta \;-\; T$$

Ruch obrotowy (względem środka masy):

$$I\,\varepsilon \;=\; T\,r$$

Eliminując siłę tarcia:

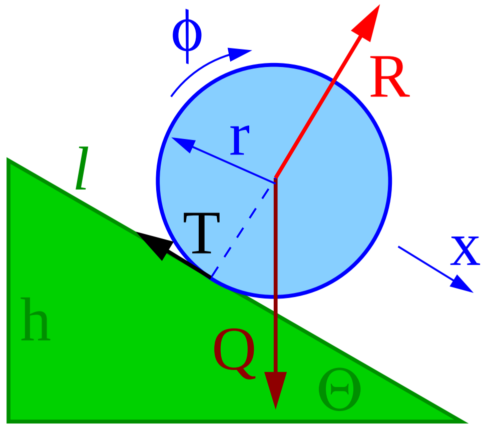
$$ma \;+\; \frac{I\varepsilon}{r} \;=\; mg\,\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad a \;=\; \frac{g\,\sin\theta}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

Im większy moment bezwładności, tym wolniej stacza się ciało...

# Prawa ruchu

## Równia pochyła




Zagadnienie można rozwiązać w sposób równoważny korzystając z chwilowej osi obrotu i twierdzenia Steinera

Równanie ruchu obrotowego względem chwilowej osi obrotu (linia styku bryły z równią):

$$I_o \, \varepsilon = Q \sin\theta \cdot r$$

Z twierdzenia Steinera:

$$I_o = I + m\, r^2$$

Otrzymujemy:

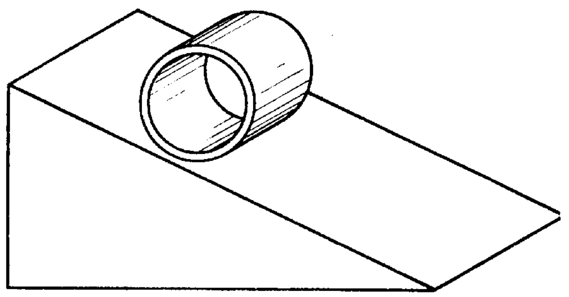
$$a = r\,\varepsilon = \frac{mg \sin\theta \, r^2}{I_o} = \frac{mr^2 \, g \sin\theta}{mr^2 + I}$$



# Prawa ruchu

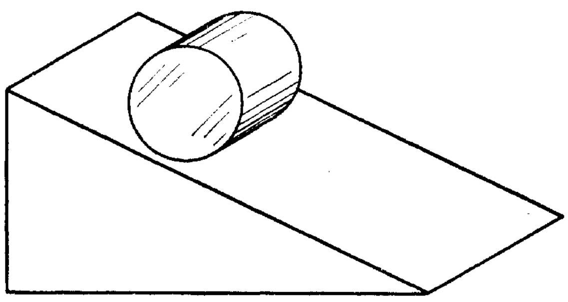
## Równia pochyła

Rura



$$a = \frac{1}{2} g \sin\theta$$

Walec

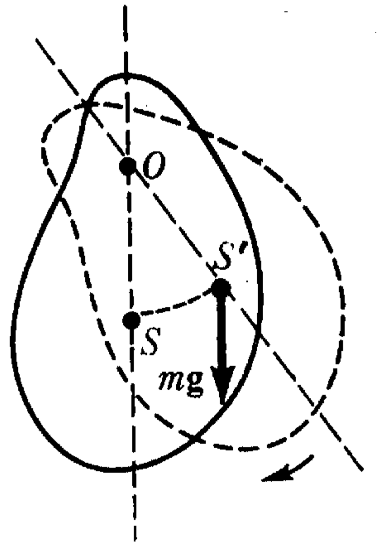


$$a = \frac{2}{3} g \sin\theta$$

$\frac{1}{3}$ szybciej

# Prawa ruchu

## Wahadło fizyczne




Równanie małych drgań bryły sztywnej, wokół osi obrotu O przechodzącej w odległości $l$ od środka ciężkości S:

$$I_o\,\varepsilon = -mg\sin\phi\cdot l$$

$$\left(I+ml^2\right)\frac{d^2\phi}{dt^2} \approx -mgl\,\phi$$

Częstość drgań (równanie oscylatora harmonicznego):

$$\nu = \sqrt{\frac{mgl}{I+ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l(1+\frac{I}{ml^2})}}$$

$l_z = l(1+\frac{I}{ml^2})$ - długość zredukowana wahadła
długość wahadła matematycznego o tej samej częstości



# Energia

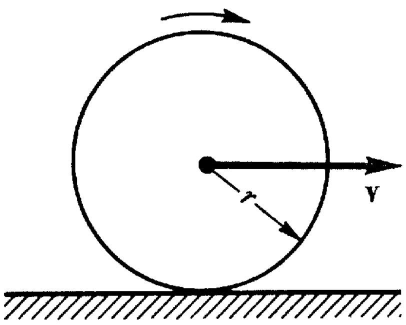
## Energia ruchu obrotowego

Energia kinetyczna układu ciał:

$$E_k = E_k^\star + \frac{M\,V_{CM}^2}{2}$$

Bryła sztywna: energia "wewnętrzna"⇒ energia kinetyczna ruchu obrotowego

$$E_k^\star = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i (r_i\,\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 I$$



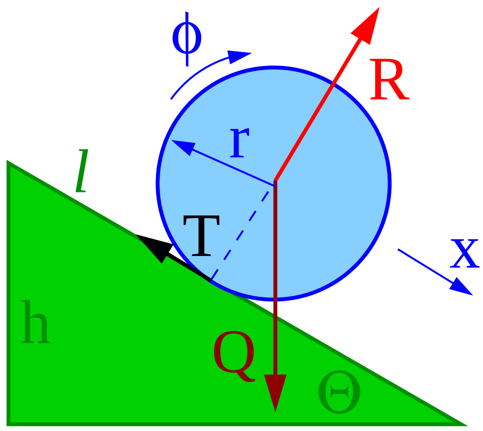

Ciało toczące się bez poślizgu: $v = \omega\, r$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)$$

$m\,\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)$ - efektywna masa bezwładna
przy niezmienionej masie grawitacyjnej

# Energia

## Równia pochyła




Prędkość jaką uzyska ciało staczające się bez poślizgu z równi o wysokości $h$. Z zasady zachowania energii:

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mr^2}}}$$

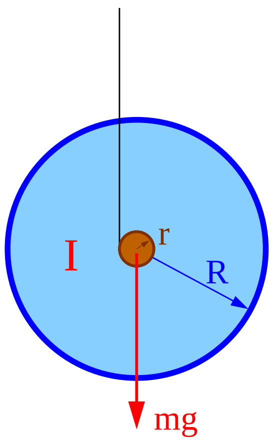
Przyspieszenie    prędkość średnia $\langle v \rangle = \frac{1}{2} v$

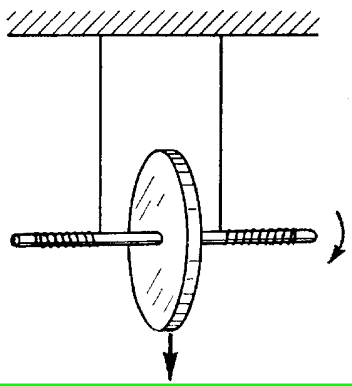
$$a = \frac{v}{t} = \frac{v^2}{2l} = \frac{2gh}{2l\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} = \frac{g \sin\theta}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$



# Energia

## Koło Maxwella



Koło o promieniu R “toczy się” po osi o promieniu r.

Jak w przypadku równi pochyłej  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$a = \frac{g}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

obręcz: $I = mR^2$

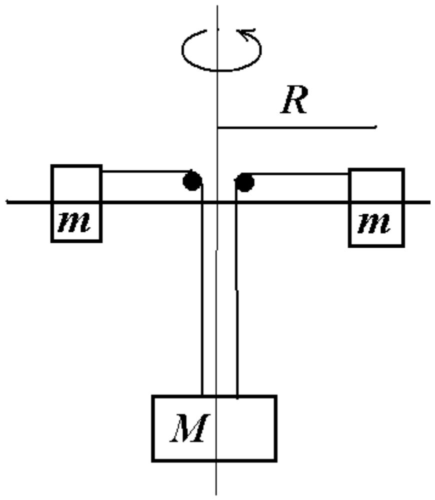
$$\Rightarrow \quad a = g \frac{r^2}{R^2 + r^2} \ll g$$

Przyspieszenie liniowe wielokrotnie mniejsze od przyspieszenia w spadku swobodnym...

Energia potencjalna zamienia się głównie na energię ruchu obrotowego.

# Energia

## Energia przy zmiennym momencie bezwładności




Masy przesuwają się z $R = r_1$ do $R = r_2$. $I \approx 2mR^2$

Z zasady zachowania momentu pędu (układ izolowany):

$$L_1 = \omega_1 I_1 = \omega_2 I_2 = L_2$$
$$\Rightarrow \quad \omega_2 = \omega_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

Energia kinetyczna układu:

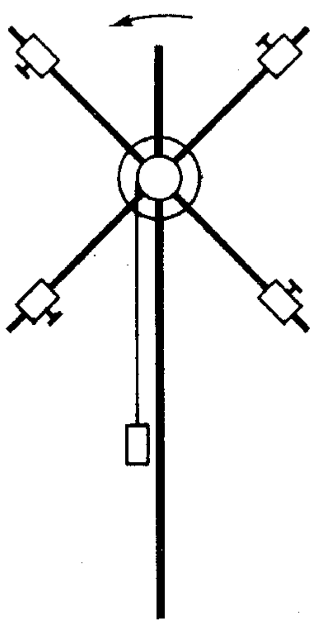
$$E_2 = \frac{1}{2}\omega_2^2 I_2 = \frac{1}{2}\frac{\omega_2}{\omega_1}\omega_1^2 I_1 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 E_1$$

$r_2 < r_1 \Rightarrow$ energia kinetyczna rośnie
kosztem pracy siły dośrodkowej (energii potencjalnej $M$)



# Prawa ruchu

## Uściślenie



Rozważając zagadnienie jednostajnie przyspieszonego ruchu obrotowego zakładaliśmy że moment siły jest stały i nie zależy od I. Jednak ciężarek też porusza się ruchem przyspieszonym:

$$\text{ciężarek:} \quad ma = Q - N$$
$$\text{rotor:} \quad I\varepsilon = rN$$

Q - ciężar ciężarka, N - siła naprężenia nici.

Eliminując $N = m(g - a)$:

$$I\varepsilon = r\,m(g - r\varepsilon)$$
$$(I + mr^2)\,\varepsilon = mgr$$
$$\varepsilon = \frac{mgr}{I + mr^2} = \frac{mgr}{I'}$$

Bezwładność ciężarka efektywnie zwiększa moment bezwładności rotora: $I' = I + mr^2$

Nigdy nie uzyskamy przyspieszenia większego niż $\varepsilon_{max} = \frac{g}{r}$