

# Bryła sztywna

## Fizyka I (B+C)

### Wykład XXII:

- Porównanie ruchu obrotowego z ruchem postępowym
- Bąk
- Precesja
- Żyroskop
- Ogólne wyrażenie na moment pędu
- Tensor momentu bezwładności
- Osie główne

# Porównanie

## Punkt materialny

ruch postępowy

- przesunięcie  $\vec{x}$
- prędkość  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$
- przyspieszenie  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$
- masa  $m$
- pęd  $\vec{p} = m\vec{v}$
- układ izolowany  $\vec{p} = const$

## Bryła sztywna

ruch obrotowy (względem osi symetrii !)

- ⇒ kąt obrotu  $\vec{\phi}$
- ⇒ prędkość kątowna  $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$
- ⇒ przyspieszenie kątowe  $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
- ⇒ moment bezwładności  $I$
- ⇒ moment pędu  $\vec{L} = I\vec{\omega}$
- ⇒ układ izolowany  $\vec{L} = const$

# Porównanie

## Punkt materialny

ruch postępowy

• siła

$$\vec{F}$$

• równania ruchu

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

• praca

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

• energia kinetyczna

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

## Bryła sztywna

ruch obrotowy (względem osi symetrii !)

⇒ moment siły

$$\vec{M}$$

⇒ równania ruchu

$$\vec{M} = I\vec{\epsilon}$$

⇒

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

⇒ praca

$$W = \int \vec{M} \cdot d\vec{\phi}$$

⇒ energia kinetyczna

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Dla ruchu obrotowego względem **ustalonej osi**, pokrywającej się z osią **symetrii** bryły !!!

# Bąk

## Równowaga



### Zasada zachowania momentu pędu

Jeśli zapewnimy **znikanie momentów sił** to **kierunek** momentu pędu pozostanie **stały** niezależnie od działających sił i ruchu postępowego

⇒ efekt żyroskopowy

Bąk wirujący wokół  **pionowej osi** jest w **równowadze**.

Momenty działających sił są równe zero (względem **S** i **O**)

⇒ moment pędu jest stały

⇒ orientacja osi obrotu jest stała (**bąk symetryczny**)

$$\vec{L} = \vec{\omega} I = \text{const}$$

Czy jest to równowaga trwała?

# Bąk

## Moment sił

Gdyby bąk nie wirował ( $L = 0$ ) to ustawienie pionowe byłoby stanem **równowagi nietrwałej**.

Wychylenie z tego położenia powodowałoby powstanie wypadkowego momentu sił oraz niezerowej siły wypadkowej, które powodowałyby wywrócenie bąka.

Moment siły ciężkości względem punktu podparcia  $O$ :

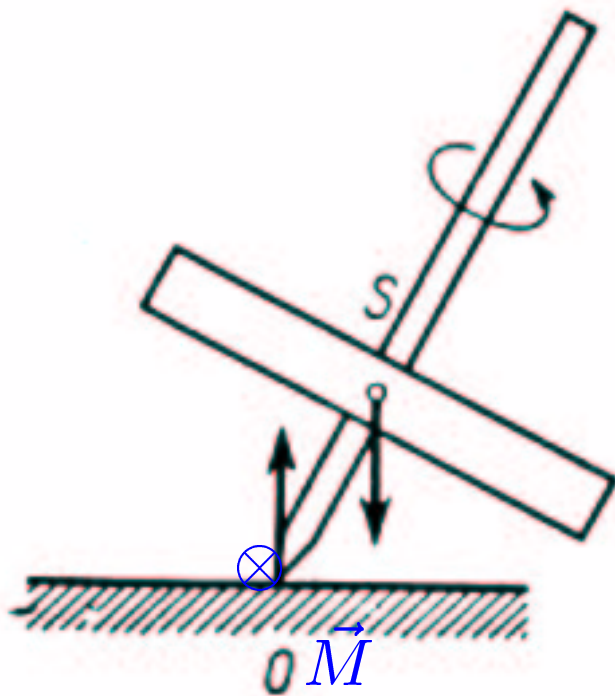
$$\vec{M} = \vec{R} \times m\vec{g}$$

$$M = mgR \sin \theta$$

$R$  - odległość środka ciężkości od punktu podparcia

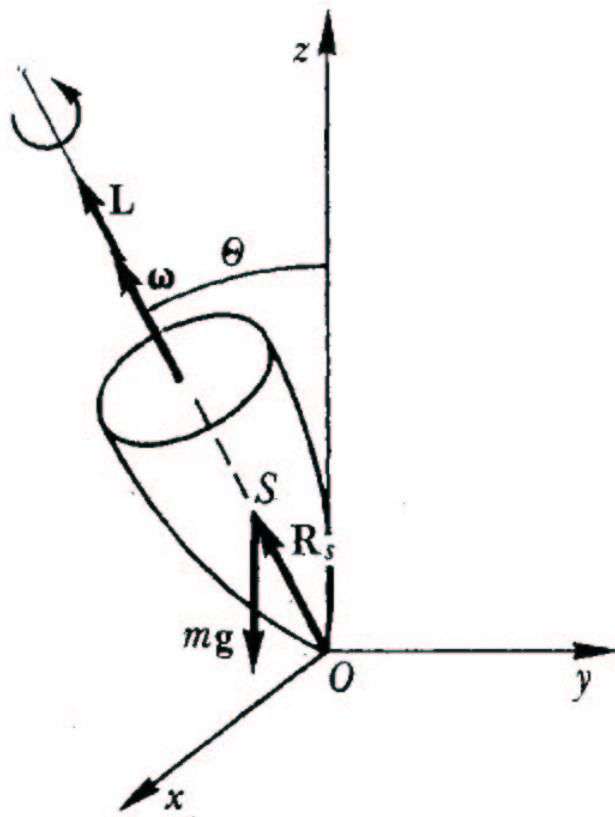
$\theta$  - kąt odchylenia osi od pionu

Moment siły  $\vec{M}$  skierowany jest prostopadle do osi bąka...



# Bąk

## Precesja



W przypadku gdy bąk wiruje, przyłożony moment siły powoduje zmianę całkowitego momentu pędu:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Wektor momentu pędu pokrywa się z osią obrotu

$$\vec{L} \parallel \vec{\omega} \parallel \vec{r}$$

natomiast wektor momentu siły jest do niej prostopadły

$$\vec{M} = m\vec{R} \times \vec{g} \perp \vec{R}$$

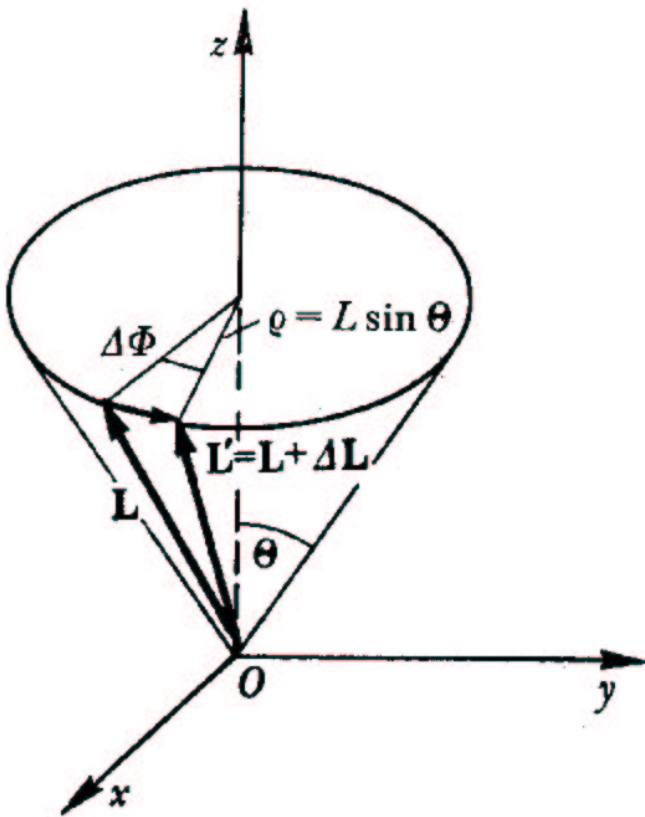
⇒ wartość momentu pędu nie ulega zmianie

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

⇒ kierunek momentu pędu zmienia się ⇒ **precesja**

# Precesja

## Częstość



W przedziale czasu  $\Delta t$  moment pędu zmieni się o:

$$\Delta L = M \Delta t = mRg \sin \theta \Delta t$$

Spowoduje to obrót **poziomej składowej**  $\vec{L}$  o kąt

$$\Delta \phi = \frac{\Delta L}{L \sin \theta} = \frac{mRg \sin \theta}{L \sin \theta} \Delta t$$

⇒ częstość z jaką wektor  $\vec{L}$  będzie zakreślał stożek:

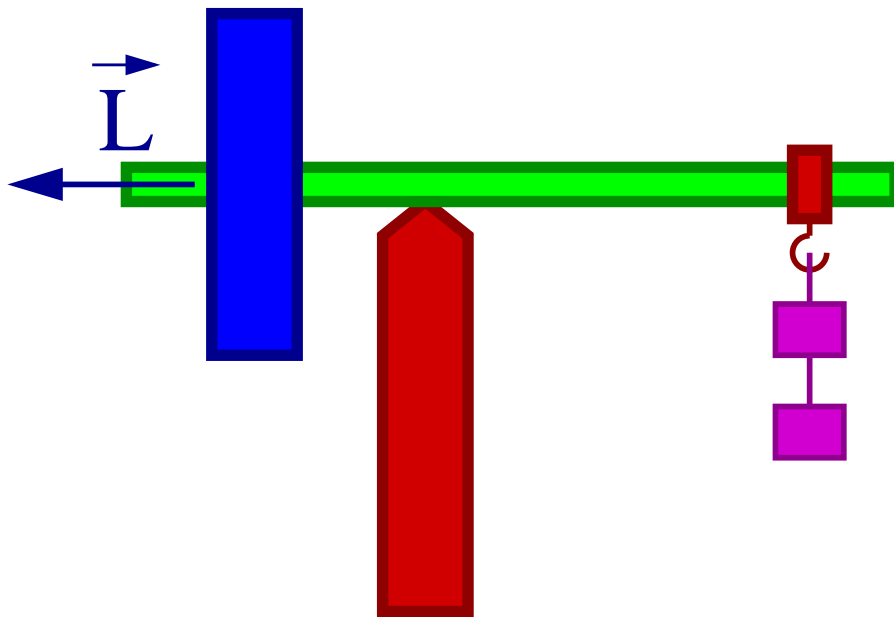
$$\omega_p = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{mRg}{L}$$

⇒ **częstość precesji**

Częstość precesji maleje ze wzrostem momentu pędu (częstości ruchu wirowego bąka)

# Żyroskop

## Równowaga



“Waga”: ciężar żyroskopu jest zrównoważona przez odpowiednio dobrane ciężarki.

Jeśli żyroskop jest w równowadze przy  $\vec{L} = 0$  to będzie także w równowadze dla  $\vec{L} \neq 0$

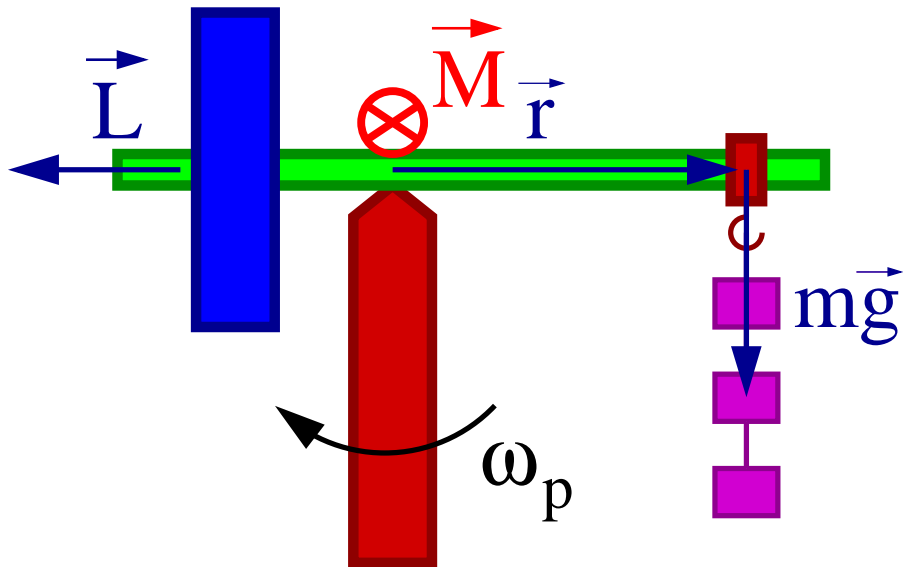
Jak zachowa się żyroskop gdy zwiększymy lub zmniejszymy “przeciwwagę” ?



# Żyroskop

## Precesja

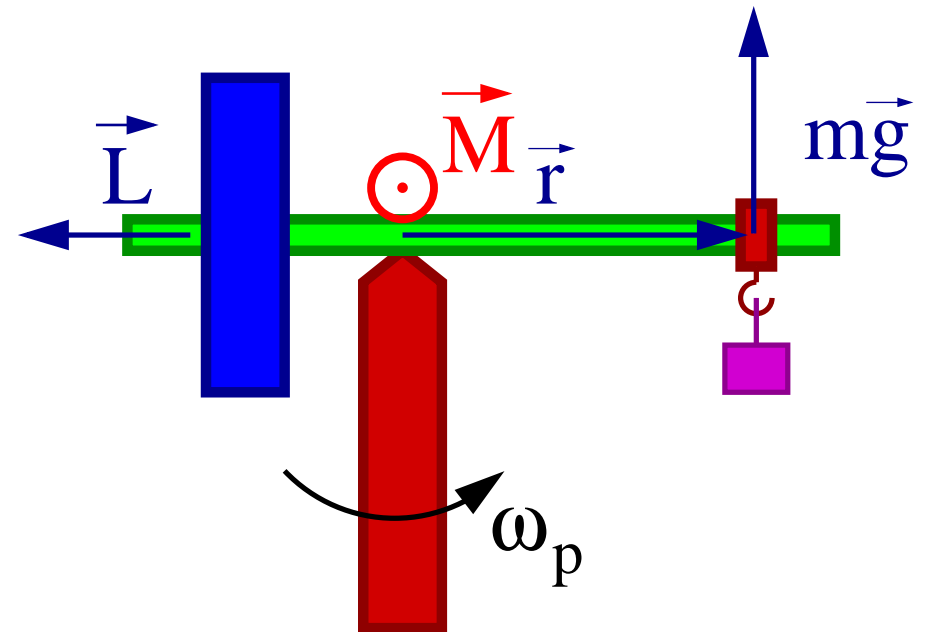
zwiększone obciążenie



zgodnie z ruchem wskazówek zegara  
(patrząc os góry)

$$\text{Częstość precesji } \omega_p = \frac{mrg}{L}$$

zmniejszone obciążenie  
(przypadek bąka)



przeciwnie do ruchu wskazówek zegara

$\Rightarrow$  proporcjonalna do dodanej/brakującej masy

# Żyroskop

## Paradoks ?

Nie wirujący bąk wychylony z położenia równowagi  $\vec{L} = 0$   
lub nie zrównoważony żyroskop  $\vec{L} = 0 \Rightarrow$  wywracają się

Natomiast jeśli  $\vec{L} \neq 0$  to bąk i żyroskop podlegają precesji  
 $\Rightarrow$  nigdy się nie wywróca (zaniedbując siły tarcia).

Czy jest to słuszne dla dowolnie małych wartości  $\vec{L}$  ?

Z doświadczenia wiemy, że nie !

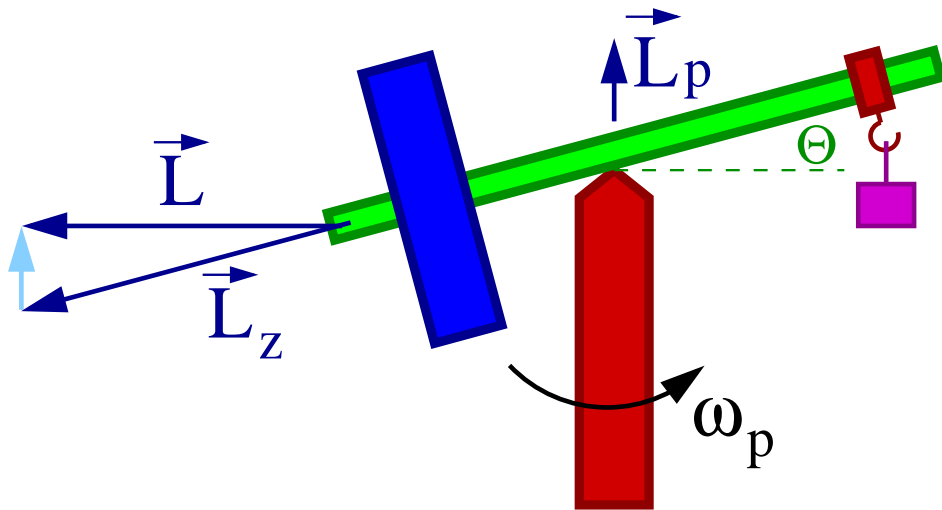
Wirujący bąk wywraca się zanim prędkość kątowna jego ruchu wirowego spadnie do zera.

Nasze rozważania precesji nie były ścisłe

$\Rightarrow$  dla małych momentów pędu musimy uwzględnić dodatkowe efekty...

# Żyroskop

## Precesja



Niech moment pędu zrównoważonego żyroskopu wynosi  $\vec{L}$ .

Co się dzieje gdy zdejmujemy jeden ciężarek ?

Wartość całkowitego moment pędu nie ulega zmianie, gdyż moment siły ciężkości jest prostopadły do  $\vec{L}$ .

Obrót żyroskopu z częstością  $\omega_p$  względem pionowej osi  $\Rightarrow$  moment pędu  $\vec{L}_p = \omega_p I_p$ .

Aby całkowity moment pędu nie uległ zmianie, oś żyroskopu musi się nachylić o kąt:

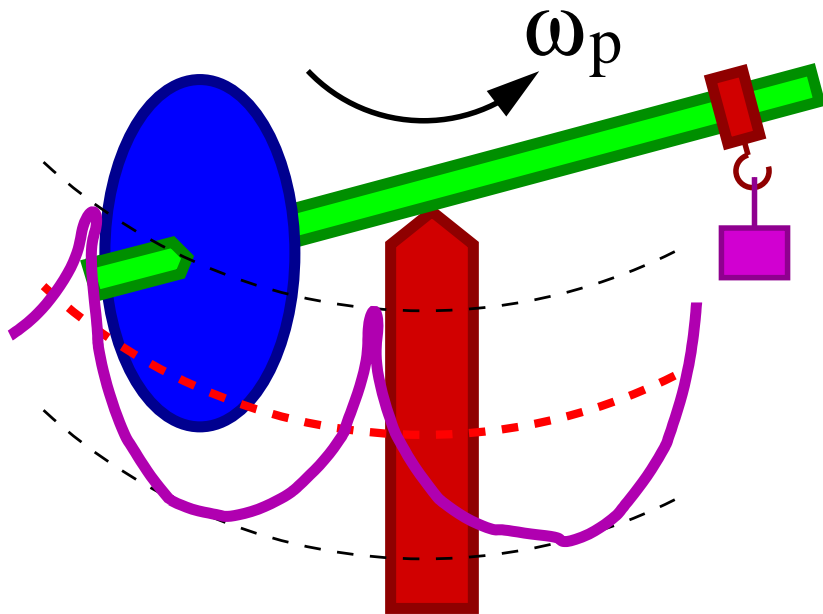
$$\theta \sim \frac{L_p}{L} = \frac{mrgI_p}{L^2}$$

Duże  $L \Rightarrow \theta \rightarrow 0$  ( $L_p$  można pominąć)

Małe  $L \Rightarrow$  żyroskop/bąk wywracają się...

# Żyroskop

## Nutacja



Idealna precesja, gdy koniec ramienia żyroskopu porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, zachodzi tylko przy **szczególnym** wyborze warunków początkowych.

W ogólnym przypadku na precesję nakładają się oscylacje ramienia żyroskopu wokół położenia “**stacjonarnej precesji**”  $\Rightarrow$  **nutacje**.

Charakter tych dodatkowych oscylacji zależy od warunków początkowych.

Zazwyczaj są mało widoczne i zanikają w czasie (tłumienie).

Ich amplituda rośnie dla małych wartości  $L$

# Moment pędu

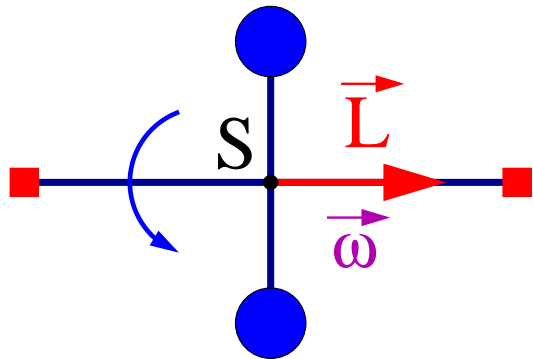
Do tej pory rozpatrywaliśmy wyłącznie ruch obrotowy względem ustalonej osi.

Naogół była to oś symetrii bryły, lub oś do niej równoległa.

W ogólnym przypadku problem jest bardziej skomplikowany

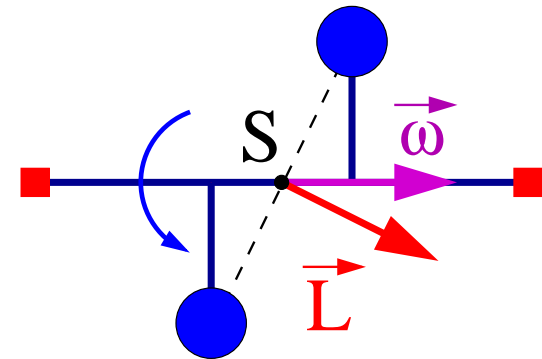
Przykład - dwa wirujące ciężarki

Ciężarki w jednej płaszczyźnie  $\perp$  osi



Oś obrotu jest osią symetrii  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

Ciężarki rozsunięte wzdłuż osi obrotu



Oś obrotu nie jest osią symetrii  $\Rightarrow \vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$

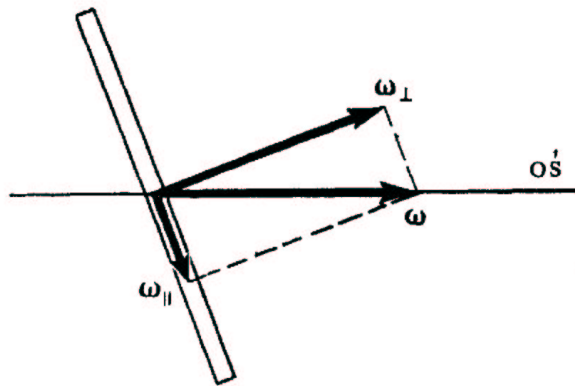
$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \perp \vec{r}_i$$

# Moment pędu

## Przykład II

Dysk wirujący wokół osi nachylonej do osi symetrii

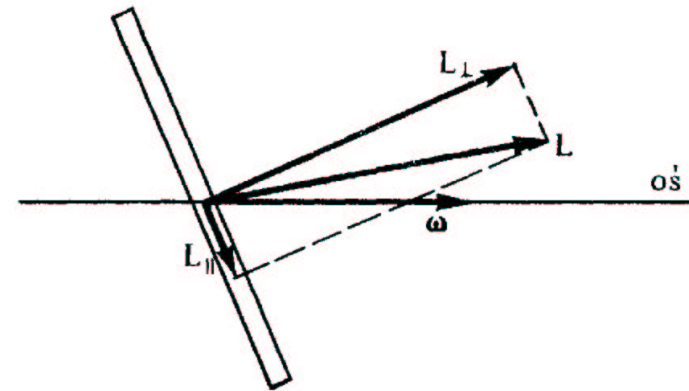
Prędkość kątową możemy rozłożyć na składową równoległą i prostopadłą do osi symetrii



$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\perp} + \vec{\omega}_{\parallel}$$

Moment pędu dysku

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{L}_{\perp} + \vec{L}_{\parallel} \\ &= I_{\perp} \vec{\omega}_{\perp} + I_{\parallel} \vec{\omega}_{\parallel} \\ &= I_{\perp} \left( \vec{\omega}_{\perp} + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{\parallel} \right)\end{aligned}$$



$$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

Moment bezwładności dysku: (wykład 19)

$$I_{\perp} = \frac{1}{2} m r^2 \quad I_{\parallel} = \frac{1}{4} m r^2 = \frac{1}{2} I_{\perp}$$

# Moment pędu

W ogólnym przypadku bryła sztywna może nie mieć żadnej osi symetrii.

Jak wtedy wyznaczyć moment pędu, znając prędkość kątową  $\vec{\omega}$  ?

Zdefinicji momentu pędu:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Z definicji bryły sztywnej:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

Otrzymujemy:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i [\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})]$$

korzystamy z tożsamości wektorowej:  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$

Kierunek  $\vec{L}$  zależy od kierunku  $\vec{\omega}$  jak i położenia poszczególnych elementów bryły  $\vec{r}_i$ .

# Moment pędu

Rozpisując na składowe:

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \quad \vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_i \vec{\omega} = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z$$

Otrzymujemy (na przykładzie  $L_x$ ):

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_i m_i \left[ \omega_x r_i^2 - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \right] \\ &= \omega_x \cdot \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \cdot \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \cdot \sum_i m_i x_i z_i \end{aligned}$$

$L_x$  zależy w ogólności od wszystkich składowych prędkości kątowej !

Podobnie:

$$\begin{aligned} L_y &= -\omega_x \cdot \sum_i m_i x_i y_i + \omega_y \cdot \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) - \omega_z \cdot \sum_i m_i y_i z_i \\ L_z &= -\omega_x \cdot \sum_i m_i x_i z_i - \omega_y \cdot \sum_i m_i y_i z_i + \omega_z \cdot \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{aligned}$$



# Tensor momentu bezwładności

Wyrażenie na składowe  $\vec{L}$  możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum m_i (r_i^2 - x_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i (r_i^2 - y_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}$$

tensor momentu bezwładności

Składowe tensora - współczynniki bezwładności

ogólna postać ( $u, v = x, y, z$ )

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yz} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zz} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{uv} = \sum m_i (\delta_{uv} r_i^2 - u_i v_i)$$

lub

$$I_{uv} = \int dV \rho(\vec{r}) (\delta_{uv} r^2 - u v)$$

delta Kroneckera:  $\delta_{uv} = 1$  dla  $u = v$  i  $0$  dla  $u \neq v$

# Tensor momentu bezwładności

Energia kinetyczna

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2$$

Korzystamy z tożsamości wektorowej:

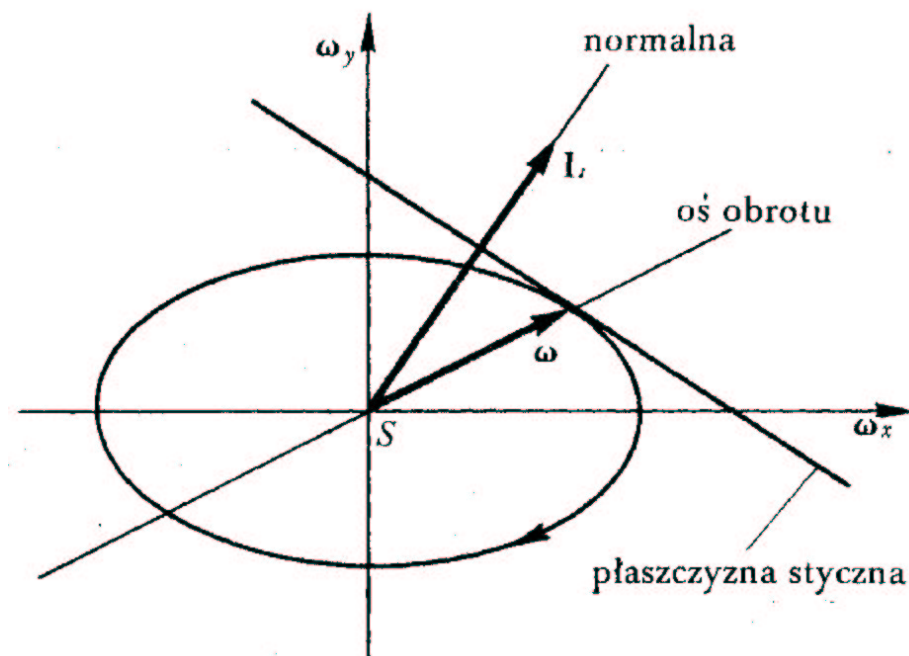
$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

$$\Rightarrow E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{\omega} \cdot [\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)]$$

$$E_k = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \hat{I} \vec{\omega}$$

$E_k = const$  - elipsoida w przestrzeni  $\vec{\omega}$

$$E_k = \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_{xx} + \omega_y^2 I_{yy} + \omega_z^2 I_{zz} + 2\omega_x \omega_y I_{xy} + 2\omega_x \omega_z I_{xz} + 2\omega_y \omega_z I_{yz})$$



Kierunek  $\vec{L}$  jest prostopadły (normalny) do powierzchni  $E_k = const$  w punkcie  $\vec{\omega}$

## Osie główne

W ogólnym przypadku wszystkie współczynniki bezwładności mogą być różne od zera (tensor symetryczny  $\Rightarrow$  6 niezależnych wielkości)

Okazuje się jednak, że w każdym przypadku można tak **obrócić osie układu** odniesienia, żeby elementy pozadiagonalne zniknęły: (diagonalizacja tensora)

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = I_{yx} = I_{zx} = I_{zy} = 0$$

układ taki definiuje nam **osie główne** bryły (kierunki własne tensora)

Jeśli bryła ma oś symetrii to będzie ona jedną z osi głównych !

$\Rightarrow$  pozostają tylko 3 współczynniki diagonalne  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  (wartości własne)

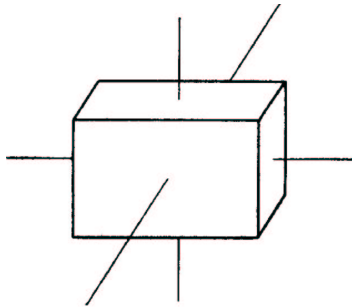
$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = (I_{xx} \omega_x, I_{yy} \omega_y, I_{zz} \omega_z)$$

Dla obrotu wokół osi głównej  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

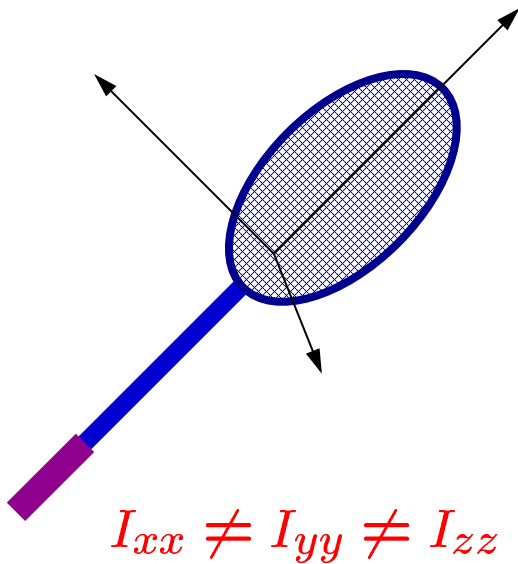
$$\text{np. } \vec{\omega} = (\omega, 0, 0) \Rightarrow \vec{L} = (I_{xx}\omega, 0, 0) = I_{xx}\vec{\omega}$$

# Osie główne

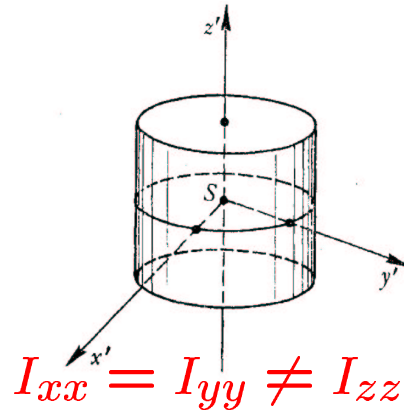
## Prostopadłościan



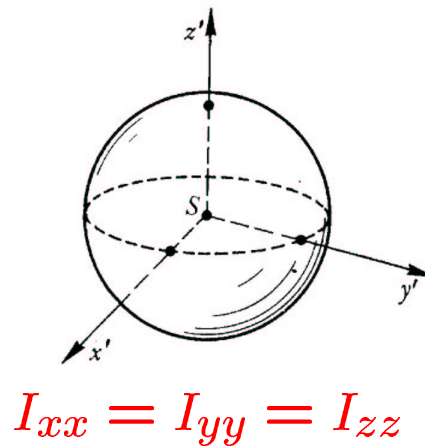
## Rakieta tenisowa



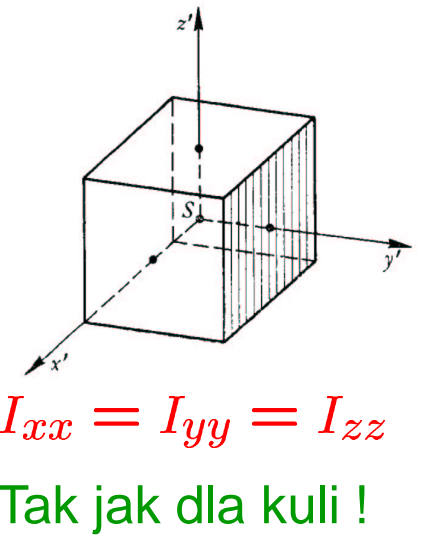
## Walec



## Kula



## Sześcian



# Osie główne

Energia kinetyczna w układzie osi głównych

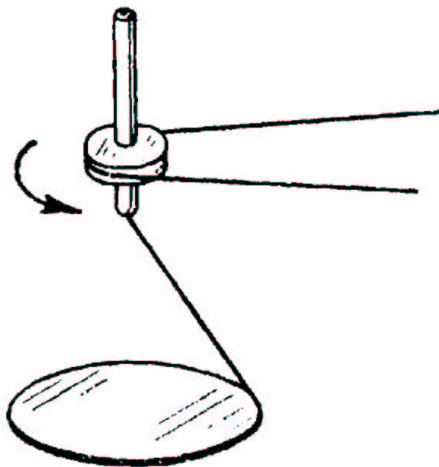
$$E_k = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{L} = \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2)$$

Jeśli nałożymy **więzy** narzucające obrót ciała ze **stałą prędkością kątową**  $\vec{\omega}$  to przyjmie ono ułożenie odpowiadające **maksymalnej energii kinetycznej**

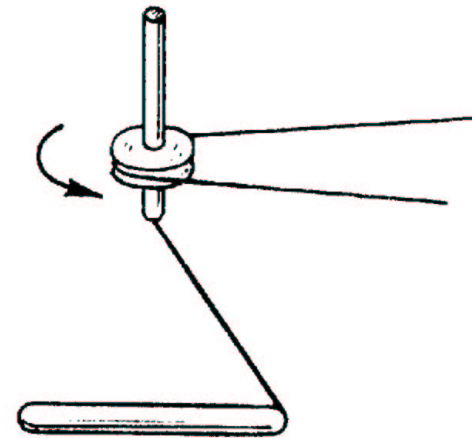
⇒ obrót wokół osi o **największym momencie bezwładności**

⇒ maksymalna wartość **momentu pędu**

Wirujący dysk



Wirujący pręt



## Osie główne

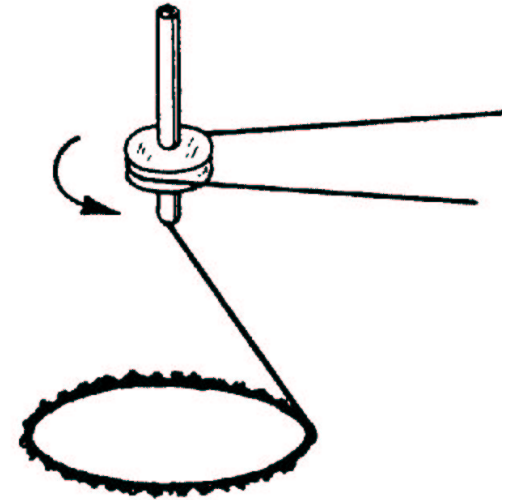
### Wirujący łańcuszek

Przybiera kształt obręczy

odpowiadający **maksymalnemu momentowi bezwładności**

⇒ maksymalnej wartości momentu pędu

⇒ **maksymalnej energii kinetycznej**



### W układzie obracającym się

Siła odśrodkowa dąży do rozmieszczenia masy jak najdalej od osi obrotu.

Stabilny jest stan odpowiadający minimum energii potencjalnej (siły odśrodkowej)

$$\vec{F}_i = m_i \omega^2 \vec{r}_{i\perp} \Rightarrow E_{p,i} = -\frac{1}{2} m_i \omega^2 r_{i\perp}^2$$
$$E_p = \sum_i E_{p,i} = -\frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = -\frac{1}{2} \omega^2 I = -E_k$$

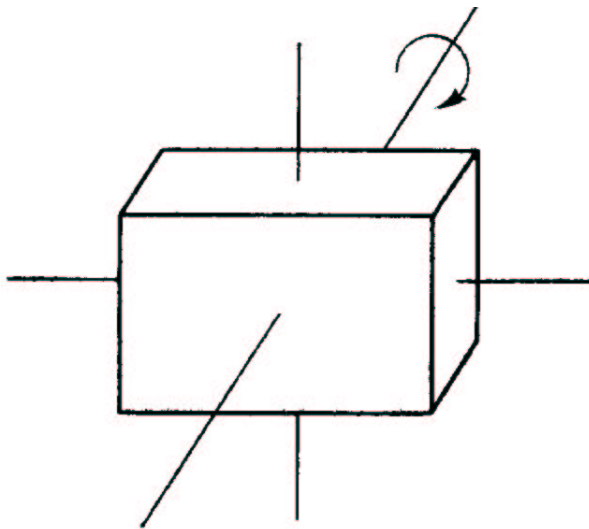
Minimum energii potencjalnej odpowiada maksimu energii kinetycznej.

W układzie laboratoryjnym ⇒ masa “oddala się” od osi zgodnie z zasadą bezwładności

# Osie główne

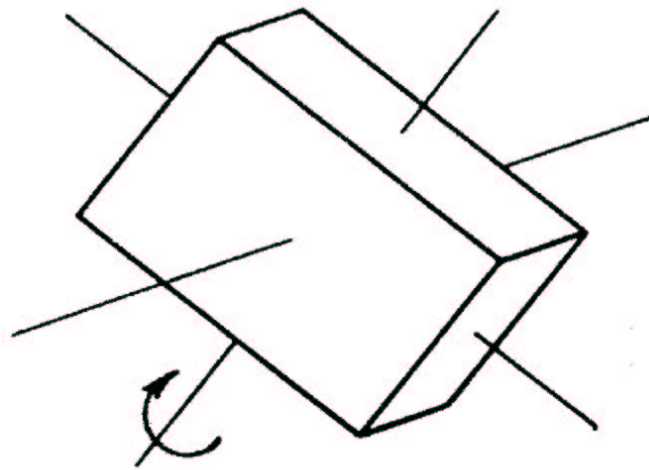
W przypadku bryły wirującej **swobodnie** (stała wartość  $\vec{L}$ ) stabilny ruch obrotowy (stały kierunek wektora  $\vec{\omega}$ ) możliwy jest **tylko** wokół osi głównych o **największym** i **najmniejszym** momencie bezwładności

Oś o największym I



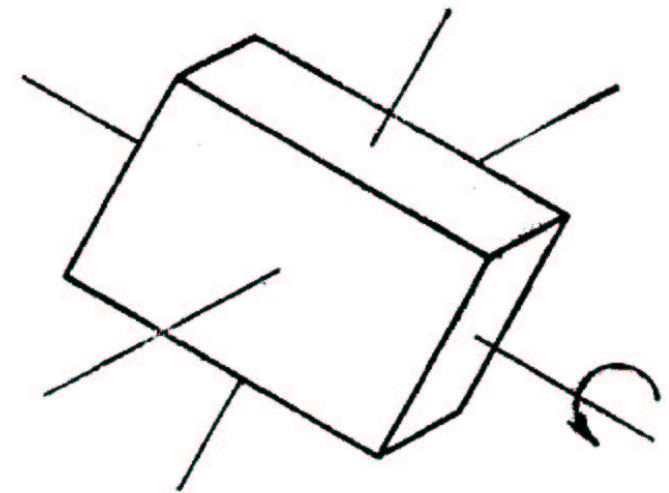
obrót stabilny

Oś o pośrednim I



obrót niestabilny

Oś o najmniejszym I



obrót stabilny