Bryła sztywna

Fizyka I (B+C)

Wykład XXII:

- Porównanie ruchu obrotowego z ruchem postępowym

- Bąk
- Precesja
- Żyroskop

- Ogólne wyrażenie na moment pędu
- Tensor momentu bezwładności
- Osie główne

Porównanie

Punkt materialny ruch postępowy		Bryła sztywna ruch obrotowy (względem osi symetrii !)	
• przesunięcie	$\vec{x}$	⇒ kąt obrotu	$\vec{\phi}$
• prędkość	$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$	⇒ prędkość kątowa	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$
• przyspieszenie	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	⇒ przyspieszenie kątowe	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
• masa	m	⇒ moment bezwładności	I
• pęd	$\vec{p} = m\vec{v}$	⇒ moment pędu	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
• układ izolowany	$\vec{p} = const$	⇒ układ izolowany	$\vec{L} = const$

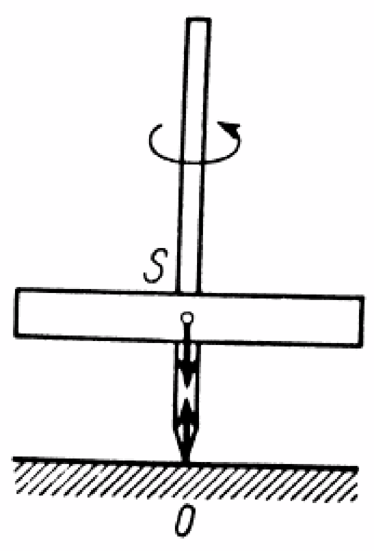
Porównanie

Punkt materialny ruch postępowy			Bryła sztywna ruch obrotowy (względem osi symetrii !)	
• siła	$\vec{F}$	$\Rightarrow$	moment siły	$\vec{M}$
• równania ruchu	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\Rightarrow$	równania ruchu	$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$
	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	$\Rightarrow$		$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$
• praca	$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$	$\Rightarrow$	praca	$W = \int \vec{M} \cdot d\vec{\phi}$
• energia kinetyczna	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$\Rightarrow$	energia kinetyczna	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$

Dla ruchu obrotowego względem ustalonej osi, pokrywającej się z osią symetrii bryły !!!

Bąk

Równowaga



Zasada zachowania mementu pędu

Jeśli zapewnimy znikanie momentów sił to kierunek momentu pędu pozostanie stały niezależnie od działających sił i ruchu postępowego

$\Rightarrow$ efekt żyroskopowy

Bąk wirujący wokół pionowej osi jest w równowadze.
Momenty działających sił są równe zero (względem S i O)

$\Rightarrow$ moment pędu jest stały

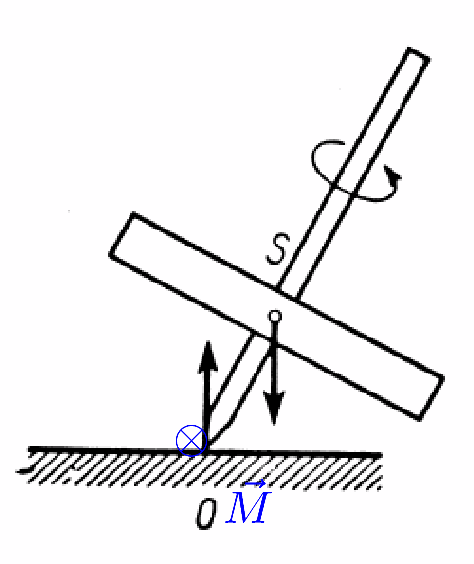
$\Rightarrow$ orientacja osi obrotu jest stała (bąk symetryczny)

$$\vec{L} = \vec{\omega}\, I = \text{const}$$

Czy jest to równowaga trwała?

Bąk

Moment sił



Gdyby bąk nie wirował ($L = 0$) to ustawienie pionowe byłoby stanem równowagi nietrwałej.

Wychylenie z tego położenia powodowałoby powstanie wypadkowego momentu sił oraz niezerowej siły wypadkowej, które powodowałyby wywrócenie bąka.

Moment siły ciężkości względem punktu podparcia O:

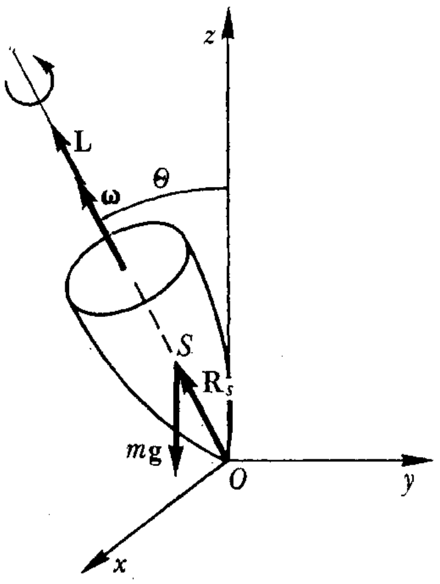
$$\vec{M} = \vec{R} \times m\vec{g}$$
$$M = mgR \sin\theta$$

R - odległość środka ciężkości od punktu podparcia
θ - kąt odchylenia osi od pionu

Moment siły $\vec{M}$ skierowany jest prostopadle do osi bąka...

Bąk

Precesja



W przypadku gdy bąk wiruje, przyłożony moment siły powoduje zmianę całkowitego momentu pędu:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Wektor momentu pędu pokrywa się z osią obrotu

$$\vec{L} \parallel \vec{\omega} \parallel \vec{r}$$

natomiast wektor momentu siły jest do niej prostopadły

$$\vec{M} = m\vec{R} \times \vec{g} \perp \vec{R}$$

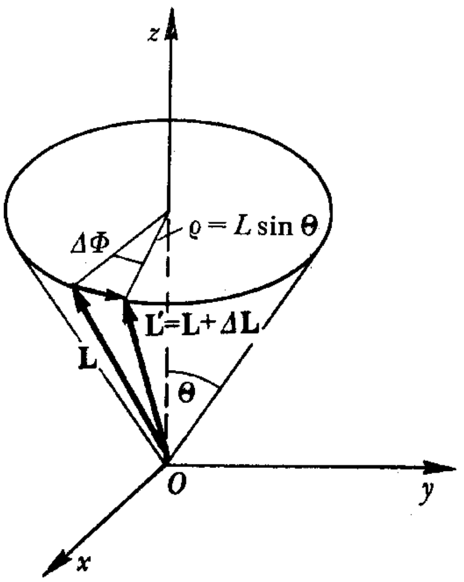
$\Rightarrow$ wartość momentu pędu nie ulega zmianie

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

$\Rightarrow$ kierunek momentu pędu zmienia się $\Rightarrow$ **precesja**

Precesja

Częstość



W przedziale czasu Δt moment pędu zmieni się o:

$$\Delta L \;=\; M\,\Delta t \;=\; mRg\,\sin\theta\,\Delta t$$

Spowoduje to obrót poziomej składowej $\vec{L}$ o kąt

$$\Delta\phi \;=\; \frac{\Delta L}{L\,\sin\theta} \;=\; \frac{mRg\,\sin\theta}{L\,\sin\theta}\,\Delta t$$

⇒ częstość z jaką wektor $\vec{L}$ będzie zakreślał stożek:

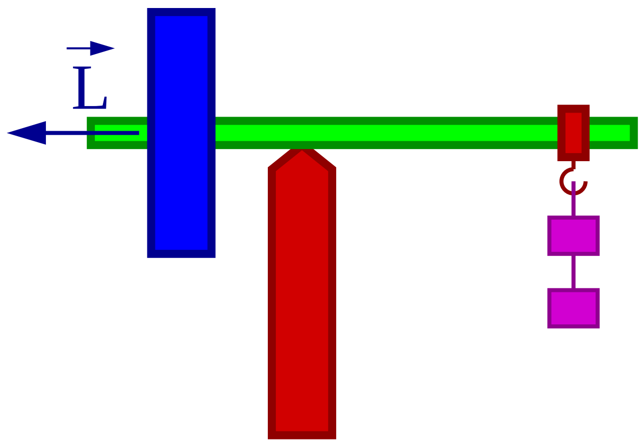
$$\omega_p \;=\; \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \;=\; \frac{mRg}{L}$$

⇒ **częstość precesji**

Częstość precesji maleje ze wzrostem momentu pędu (częstości ruchu wirowego bąka)

Żyroskop

Równowaga



“Waga”: ciężar żyroskopu jest zrównoważona przez odpowiednio dobrane ciężarki.

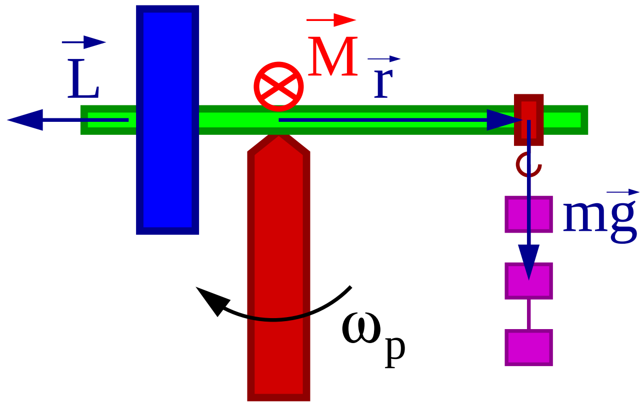
Jeśli żyroskop jest w równowadze przy $\vec{L} = 0$ to będzie także w równowadze dla $\vec{L} \neq 0$

Jak zachowa się żyroskop gdy zwiększymy lub zmniejszymy “przeciwwagę” ?

Żyroskop

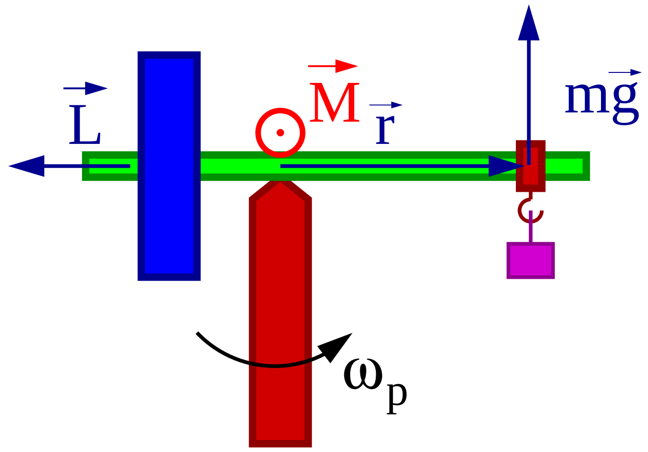
Precesja

zwiększone obciążenie



zgodnie z ruchem wskazówek zegara
(patrząc os góry)

zmniejszone obciążenie
(przypadek bąka)



przeciwnie do ruchu wskazówek zegara

Częstość precesji $\omega_p = \frac{mrg}{L}$ $\Rightarrow$ proporcjonalna do dodanej/brakującej masy

Żyroskop

Paradoks ?

Nie wirujący bąk wychylony z położenia równowagi $\vec{L} = 0$
lub nie zrównoważony żyroskop $\vec{L} = 0 \Rightarrow$ wywracają się

Natomiast jeśli $\vec{L} \neq 0$ to bąk i żyroskop podlegają precesji
$\Rightarrow$ nigdy się nie wywrócą (zaniedbując siły tacia).

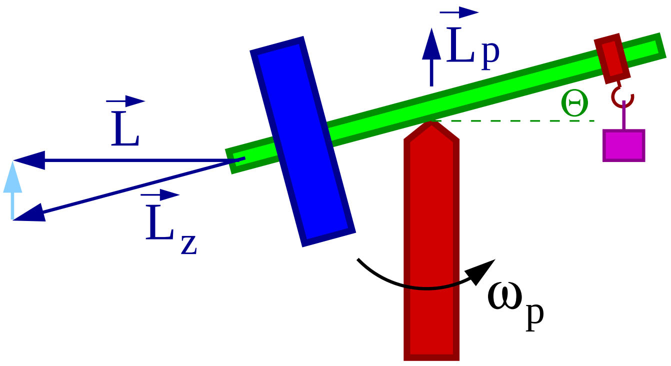
Czy jest to słuszne dla dowolnie małych wartości $\vec{L}$?

Z doświadczenia wiemy, że nie !
Wirujący bąk wywraca się zanim prędkość kątowa jego ruchu wirowego spadnie do zera.

Nasze rozważania precesji nie były ściśłe
$\Rightarrow$ dla małych momentów pędu musimy uwzględnić dodatkowe efekty...

Żyroskop

Precesja



Niech moment pędu zrównoważonego żyroskopu wynosi $\vec{L}$.

Co się dzieje gdy zdejmiemy jeden ciężarek ?

Wartość całkowitego moment pędu nie ulega zmianie, gdyż moment siły ciężkości jest prostopadły do $\vec{L}$.

Obrót żyroskopu z częstością ω_p względem pionowej osi $\Rightarrow$ moment pędu $\vec{L}_p = \omega_p I_p$.

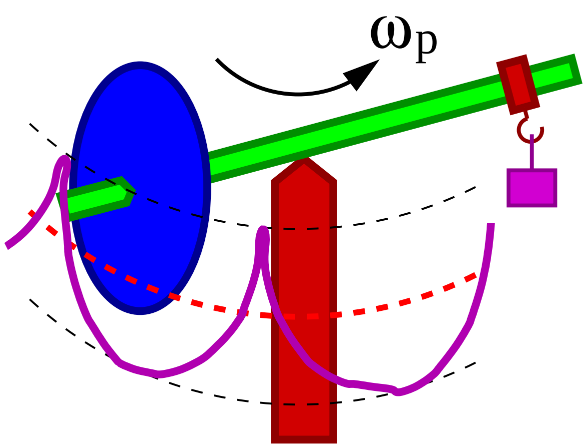
Aby całkowity moment pędu nie uległ zmianie, oś żyroskopu musi się nachylić o kąt:

$$\theta \sim \frac{L_p}{L} = \frac{mrgI_p}{L^2}$$

Duże $L \Rightarrow \theta \to 0$ (L_p można pominąć)   Małe $L \Rightarrow$ żyroskop/bąk wywracają się...

Żyroskop

Nutacja



Idealna precesja, gdy koniec ramienia żyroskopu porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, zachodzi tylko przy szczególnym wyborze warunków początkowych.

W ogólnym przypadku na precesję nakładają się oscylacje ramienia żyroskopu wokół położenia "stacjonarnej precesji" $\Rightarrow$ **nutacje.**

Charakter tych dodatkowych oscylacji zależy od warunków początkowch.

Zazwyczaj są mało widoczne i zanikają w czasie (tłumienie).

Ich amplituda rośnie dla małych wartości L

Moment pędu

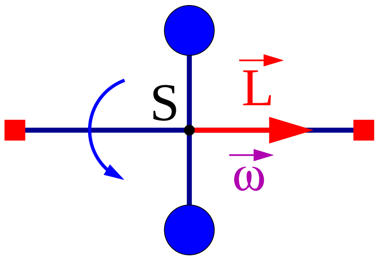
Do tej pory rozpatrywaliśmy wyłącznie ruch obrotowy względem ustalonej osi.

Naogół była to oś symetrii bryły, lub oś do niej równoległa.

W ogólnym przypadku problem jest bardziej skomplikowany

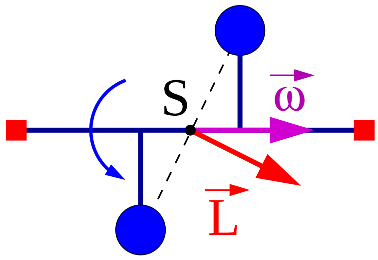
Przykład - dwa wirujące ciężarki

Ciężarki w jednej płaszczyźnie $\perp$ osi



Oś obrotu jest osią symetrii $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

Ciężarki rozsunięte wzdłuż osi obrotu



Oś obrotu nie jest osią symetrii $\Rightarrow \vec{L} \nparallel \vec{\omega}$

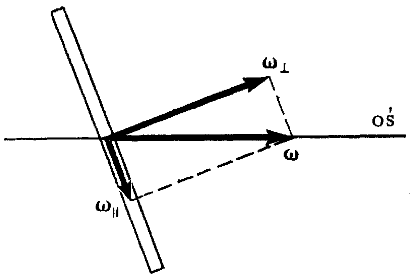
$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \perp \vec{r}_i$

Moment pędu

Przykład II

Dysk wirujący wokół osi nachylonej do osi symetrii

Prędkość kątową możemy rozłożyć na składową równoległą i prostopadła do osi symetrii



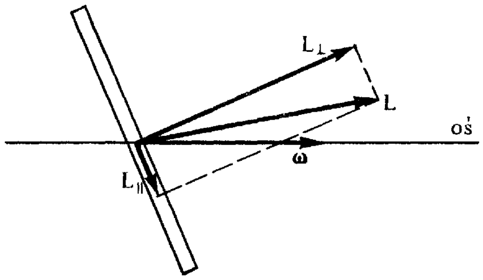
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\perp + \vec{\omega}_\parallel$$

Moment bezwładności dysku: (wykład 19)

$$I_\perp = \frac{1}{2} m r^2 \qquad I_\parallel = \frac{1}{4} m r^2 = \frac{1}{2} I_\perp$$

Moment pędu dysku

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{L}_\perp + \vec{L}_\parallel \\ &= I_\perp \vec{\omega}_\perp + I_\parallel \vec{\omega}_\parallel \\ &= I_\perp \left(\vec{\omega}_\perp + \frac{1}{2} \vec{\omega}_\parallel \right) \end{aligned}$$



$$\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$$

Moment pędu

W ogólnym przypadku bryła sztywna może nie mieć żadnej osi symetrii.

Jak wtedy wyznaczyć moment pędu, znając prędkość kątową $\vec{\omega}$?

Zdefinicji momentu pędu:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Z definicji bryły sztywnej:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

Otrzymujemy:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \left[\vec{\omega}\, r_i^2 - \vec{r}_i\, (\vec{r}_i\, \vec{\omega}) \right]$$

korzystamy z tożsamości wektorowej: $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$

Kierunek $\vec{L}$ zależy od kierunku $\vec{\omega}$ jak i położeń poszczególnych elementów bryły $\vec{r}_i$.

Moment pędu

Rozpisując na składowe:

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \qquad \vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}_i\, \vec{\omega} = x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z$$

Otrzymujemy (na przykładzie L_x):

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_i m_i \left[\omega_x\, r_i^2 - x_i\, (x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z) \right] \\ &= \omega_x \cdot \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) \;-\; \omega_y \cdot \sum_i m_i\, x_i y_i \;-\; \omega_z \cdot \sum_i m_i\, x_i z_i \end{aligned}$$

L_x zależy w ogólności od waszystkich skladowych prędkości kątowej !

Podobnie:

$$\begin{aligned} L_y &= -\,\omega_x \cdot \sum_i m_i\, x_i y_i \;+\; \omega_y \cdot \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) \;-\; \omega_z \cdot \sum_i m_i\, y_i z_i \\ L_z &= -\,\omega_x \cdot \sum_i m_i\, x_i z_i \;-\; \omega_y \cdot \sum_i m_i\, y_i z_i \;+\; \omega_z \cdot \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{aligned}$$

Tensor momentu bezwładności

Wyrażenie na składowe $\vec{L}$ możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum m_i(r_i^2 - x_i^2) & -\sum m_i\, x_i y_i & -\sum m_i\, x_i z_i \\ -\sum m_i\, x_i y_i & \sum m_i(r_i^2 - y_i^2) & -\sum m_i\, y_i z_i \\ -\sum m_i\, x_i z_i & -\sum m_i\, y_i z_i & \sum m_i(r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} \quad = \quad \hat{I} \quad \cdot \quad \vec{\omega}$$

tensor momentu bezwładności

Składowe tensora - współczynniki bezwładności

ogólna postać $(u, v = x, y, z)$

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yz} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zz} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{uv} = \sum m_i(\delta_{uv}\, r_i^2 - u_i v_i)$$

lub

$$I_{uv} = \int dV \rho(\vec{r})(\delta_{uv}\, r^2 - u\, v)$$

delta Kroneckera: $\delta_{uv} = 1$ dla $u = v$ i 0 dla $u \neq v$

Tensor momentu bezwładności

Energia kinetyczna

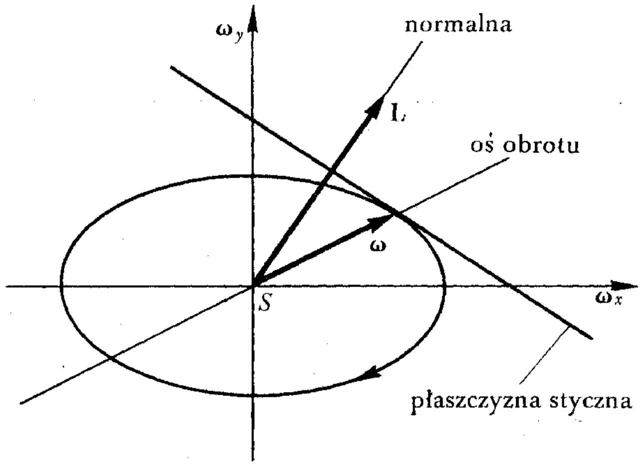
$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i\, v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i\, (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2$$

Korzystamy z tożsamości wektorowej:

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$$

$$\Rightarrow \quad E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i\, \vec{\omega} \cdot [\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)]$$

$$E_k = \frac{1}{2} \vec{\omega}\, \vec{L} = \frac{1}{2} \vec{\omega}\, \hat{I}\, \vec{\omega}$$



Kierunek $\vec{L}$ jest prostopadły (normalny) do powierzchni $E_k = const$ w punkcie $\vec{\omega}$

$E_k = const$ - elipsoida w przestrzeni $\vec{\omega}$

$$E_k = \frac{1}{2}\left(\omega_x^2 I_{xx} + \omega_y^2 I_{yy} + \omega_z^2 I_{zz} + 2\omega_x\omega_y I_{xy} + 2\omega_x\omega_z I_{xz} + 2\omega_y\omega_z I_{yz}\right)$$

Osie główne

W ogólnym przypadku wszystkie współczynniki bezwładności mogą być różne od zera (tensor symetryczny $\Rightarrow$ 6 niezależnych wielkości)

Okazuje się jednak, że w każdym przypadku można tak obrócić osie układu odniesienia, żeby elementy pozadiagonalne znikały: (diagonalizacja tensora)

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = I_{yx} = I_{zx} = I_{zy} = 0$$

układ taki definiuje nam **osie główne** bryły (kierunki własne tensora)

Jeśli bryła ma oś symetrii to będzie ona jedną z osi głównych !

$\Rightarrow$ pozostają tylko 3 współczynniki diagonalne I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} (wartości własne)

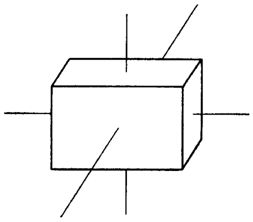
$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) \;=\; (I_{xx}\,\omega_x,\; I_{yy}\,\omega_y,\; I_{zz}\,\omega_z)$$

Dla obrotu wokół osi głównej $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

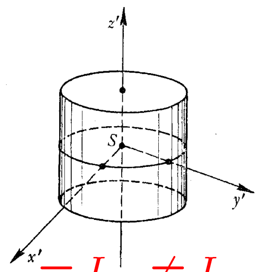
np. $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0) \Rightarrow \vec{L} = (I_{xx}\omega, 0, 0) = I_{xx}\vec{\omega}$

Osie główne

Prostopadłościan

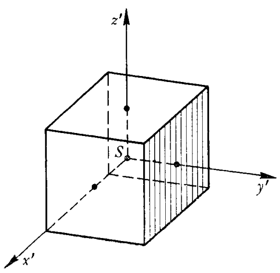


Walec



$I_{xx} = I_{yy} \neq I_{zz}$

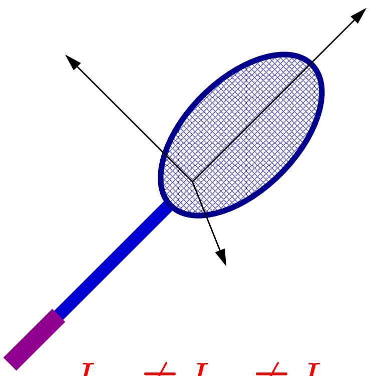
Sześcian



$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$

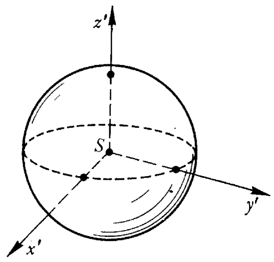
Tak jak dla kuli !

Rakieta tenisowa



$I_{xx} \neq I_{yy} \neq I_{zz}$

Kula



$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$

Osie główne

Energia kinetyczna w układzie osi głównych

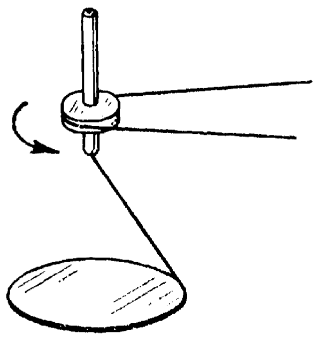
$$E_k = \frac{1}{2}\vec{\omega}\,\vec{L} = \frac{1}{2}(I_{xx}\,\omega_x^2 + I_{yy}\,\omega_y^2 + I_{zz}\,\omega_z^2)$$

Jeśli nałożymy więzy narzucające obrót ciała ze stała prędkością kątową $\vec{\omega}$ to przyjmie ono ułożenie odpowiadające maksymalnej energii kinetycznej

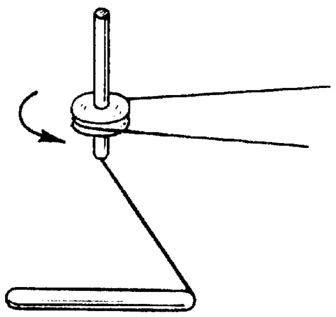
$\Rightarrow$ obrót wokół osi o największym momencie bezwładności

$\Rightarrow$ maksymalna wartość momentu pędu

Wirujący dysk

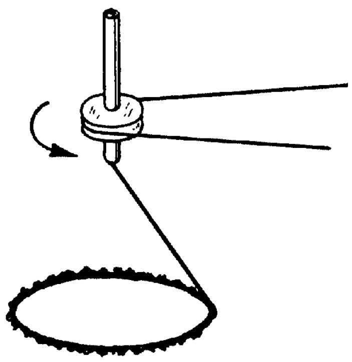


Wirujący pręt



Osie główne

Wirujący łańcuszek



Przybiera kształt obręczy odpowiadający maksymalnemu momentowi bezwładności

$\Rightarrow$ maksymalnej wartości momentu pędu

$\Rightarrow$ maksymalnej energii kinetycznej

W układzie obracającym się

Siła odśrodkowa dąży do rozmieszczenia masy jak najdalej od osi obrotu.

Stabilny jest stan odpowiadający minimum energii potencjalnej (siły odśrodkowej)

$$\vec{F}_i = m_i\,\omega^2\vec{r}_{i\perp} \;\Rightarrow\; E_{p,i} = -\frac{1}{2}m_i\,\omega^2\,r_\perp^2$$

$$E_p = \sum_i E_{p,i} = -\frac{1}{2}\omega^2\sum_i m_i\,r_\perp^2 = -\frac{1}{2}\omega^2\,I = -E_k$$

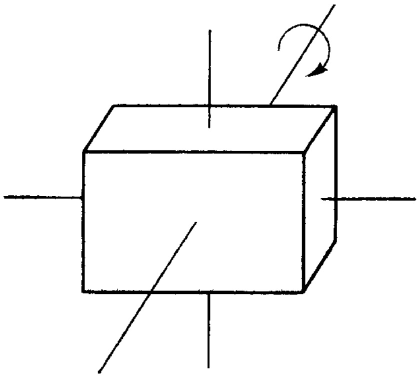
Minimum energii potencjalnej odpowiada maksimu energii kinetycznej.

W układzie laboratoryjnym $\Rightarrow$ masa “oddala się” od osi zgodnie z zasadą bezwładności

Osie główne

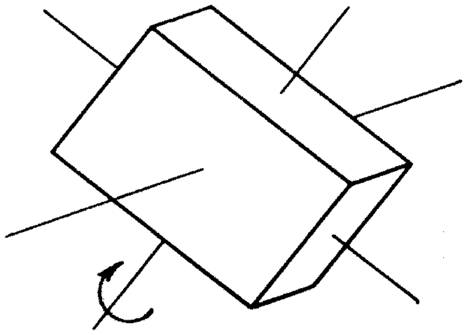
W przypadku bryły wirującej swobodnie (stała wartość $\vec{L}$)
stabilny ruch obrotowy (stały kierunek wektora $\vec{\omega}$) możliwy jest
tylko wokół osi głównych o największym i najmniejszym momencie bezwładności

Oś o największym I



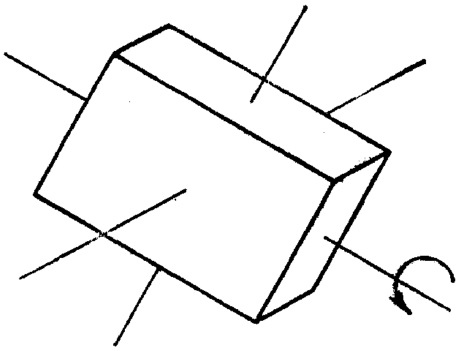
obrót stabilny

Oś o pośrednim I



obrót niestabilny

Oś o najmniejszym I



obrót stabilny