Bryła sztywna

Fizyka I (B+C)

Wykład XXIII:

- Tensor momentu bezwładności i osie główne
- Równania Eulera
- Bąk swobodny

- Podsumowanie wykładu
- Egzamin

Tensor momentu bezwładności

Tensor momentu bezwładności pozwala powiązać moment pędu bryły $\vec{L}$ z prędkością kątową $\vec{\omega}$, w przypadku dowolnej bryły:

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}$$

Energia kinetyczna ruchu obrotowego:

$$E_k = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\,\hat{I}\,\vec{\omega}$$

W ogólnym przypadku symetryczny tensor bezwładności ma 6 niezależnych składowych (wszystkie mogą być różne od zera)

Składowe tensora - współczynniki bezwładności

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yz} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zz} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

ogólna postać $(u, v = x, y, z)$

$$I_{uv} = \sum m_i (\delta_{uv}\, r_i^2 - u_i v_i)$$

lub

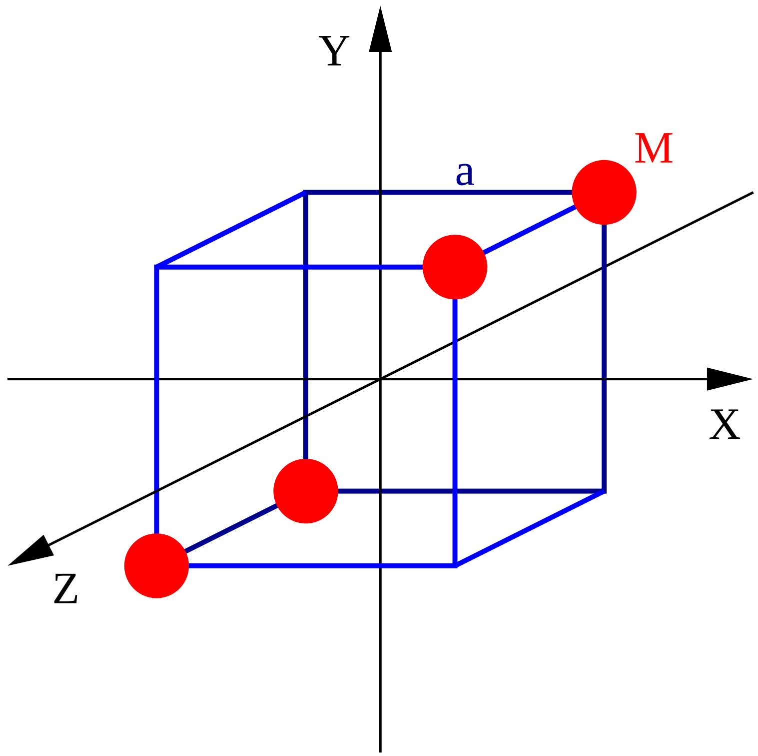
$$I_{uv} = \int dV \rho(\vec{r})(\delta_{uv}\, r^2 - u\, v)$$

delta Kroneckera: $\delta_{uv} = 1$ dla $u = v$ i 0 dla $u \neq v$

Tensor momentu bezwładności

Przykład

Cztery masy rozmieszczone w rogach sześcianu:



Tensor bezwładności

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot M\, a^2$$

Osie główne

W ogólnym przypadku wszystkie współczynniki bezwładności mogą być różne od zera (tensor symetryczny $\Rightarrow$ 6 niezależnych wielkości)

Okazuje się jednak, że w każdym przypadku można tak obrócić osie układu odniesienia, żeby elementy pozadiagonalne znikały: (diagonalizacja tensora)

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = I_{yx} = I_{zx} = I_{zy} = 0$$

układ taki definiuje nam **osie główne** bryły (kierunki własne tensora)

Jeśli bryła ma oś symetrii to będzie ona jedną z osi głównych !

$\Rightarrow$ pozostają tylko 3 współczynniki diagonalne I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} (wartości własne)

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) \;=\; (I_{xx}\,\omega_x,\; I_{yy}\,\omega_y,\; I_{zz}\,\omega_z)$$

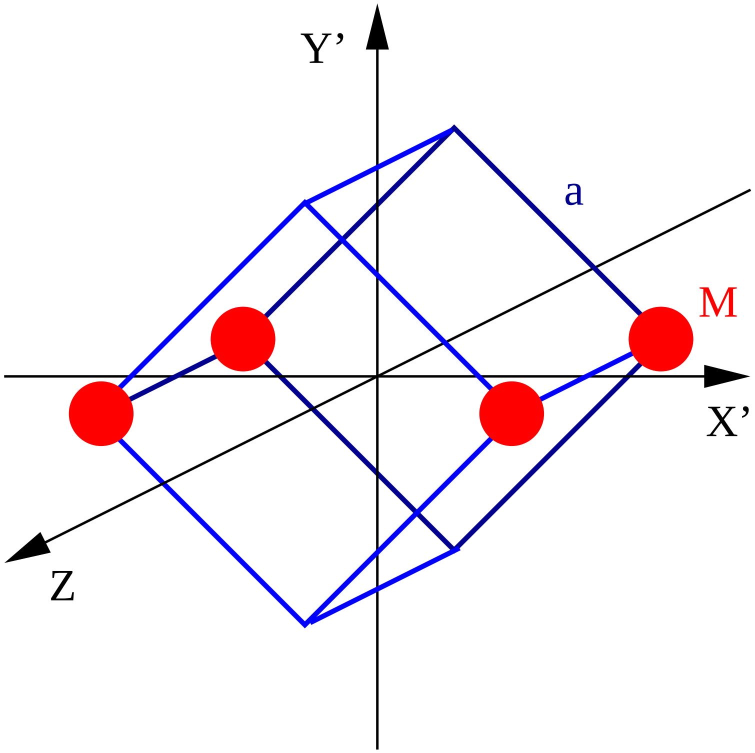
Dla obrotu wokół osi głównej $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

np. $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0) \Rightarrow \vec{L} = (I_{xx}\omega, 0, 0) = I_{xx}\vec{\omega}$

Osie główne

Przykład

Cztery masy rozmieszczone w rogach sześcianu:



Tensor bezwładności

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot M\,a^2$$

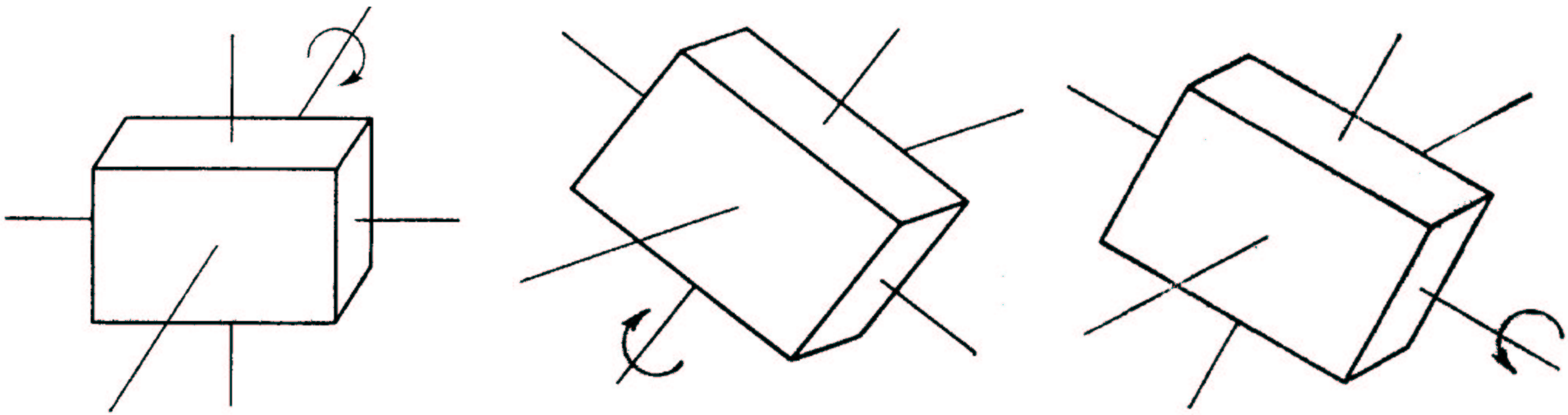
Osie X', Y' i Z są osiami głównymi $\hat{I}$:

- oś X' - najmniejszy moment bezwładności
- oś Y' - największy moment bezwładności
- oś Z - pośredni moment bezwładności

Osie główne

W przypadku bryły wirującej swobodnie (stała wartość $\vec{L}$)
stabilny ruch obrotowy (stały kierunek wektora $\vec{\omega}$) możliwy jest
tylko wokół osi głównych o największym i najmniejszym momencie bezwładności

Oś o największym I | Oś o pośrednim I | Oś o najmniejszym I



obrót stabilny | **obrót niestabilny** | obrót stabilny

Równania Eulera

Dotychczas rozpatrywaliśmy ruch obrotowy bryły sztywnej w układzie inercjalnym (LAB).

Wiemy, że składowe tensora bezwładności $\hat{I}$ zależą od wyboru układu odniesienia.

Najwygodniejszą postać (diagonalną) tensor przyjmuje w układzie osi głównych.

Układ odniesienia związany z osiami głównymi jest układem nieinercjalnym - wiruje razem z obracającym się ciałem !

Przejście do tego układu jest jednak bardzo pomocne, jeśli chcemy rozpatrzeć ogólny przypadek ruch obrotowego (tj. $\vec{\omega}$ nie pokrywająca się z osią główną).

Wektor momentu pędu w obracającym się układzie osi głównych (x', y', z'):

$$\vec{L}' = (L_{x'}, L_{y'}, L_{z'})$$

Związek z wektorem momentu pędu w układzie laboratoryjnym (x, y, z):

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = L_{x'}\,\vec{i}_{x'} + L_{y'}\,\vec{i}_{y'} + L_{z'}\,\vec{i}_{z'}$$

$\vec{i}_{x'}, \vec{i}_{y'}, \vec{i}_{z'}$ - wersory związane z osiami głównymi, obracające się razem z bryłą

Równania Eulera

Równanie ruchu obrotowego w układzie inercjalnym

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Wyrażając $\vec{L}$ przez współrzędne w układzie obracającym się:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(L_{x'}\,\vec{i}_{x'} + L_{y'}\,\vec{i}_{y'} + L_{z'}\,\vec{i}_{z'})}{dt}$$

$$= \frac{dL_{x'}}{dt}\,\vec{i}_{x'} + \frac{dL_{y'}}{dt}\,\vec{i}_{y'} + \frac{dL_{z'}}{dt}\,\vec{i}_{z'} + \frac{d\vec{i}_{x'}}{dt}\,L_{x'} + \frac{d\vec{i}_{y'}}{dt}\,L_{y'} + \frac{d\vec{i}_{z'}}{dt}\,L_{z'}$$

Pochodne wersorów po czasie: $\frac{d\vec{i}_{x'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}_{x'}$, $\frac{d\vec{i}_{y'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}_{y'}$, $\frac{d\vec{i}_{z'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}_{z'}$

Otrzymujemy:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}'$$

Równania Eulera

W układzie osi głównych:

$$\vec{L}' = I_{x'}\,\omega_{x'}\,\vec{i}_{x'} + I_{y'}\,\omega_{y'}\,\vec{i}_{y'} + I_{z'}\,\omega_{z'}\,\vec{i}_{z'}$$

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = I_{x'}\,\frac{d\omega_{x'}}{dt}\,\vec{i}_{x'} + I_{y'}\,\frac{d\omega_{y'}}{dt}\,\vec{i}_{y'} + I_{z'}\,\frac{d\omega_{z'}}{dt}\,\vec{i}_{z'}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{L}' = \begin{pmatrix} \vec{i}_{x'} & \vec{i}_{y'} & \vec{i}_{z'} \\ \omega_{x'} & \omega_{y'} & \omega_{z'} \\ I_{x'}\,\omega_{x'} & I_{y'}\,\omega_{y'} & I_{z'}\,\omega_{z'} \end{pmatrix} =$$

$$= (I_{z'} - I_{y'})\,\omega_{y'}\omega_{z'}\,\vec{i}_{x'} + (I_{x'} - I_{z'})\,\omega_{x'}\omega_{z'}\,\vec{i}_{y'} + (I_{y'} - I_{x'})\,\omega_{x'}\omega_{y'}\,\vec{i}_{z'}$$

$$\vec{M} = M_{x'}\,\vec{i}_{x'} + M_{y'}\,\vec{i}_{y'} + M_{z'}\,\vec{i}_{z'}$$

Równania Eulera

Rozpisując równanie ruchu na składowe $$\frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}' = \vec{M}$$

Równania Eulera
$$\left\{ \begin{array}{lcl} I_{x'} \dfrac{d\omega_{x'}}{dt} + (I_{z'} - I_{y'})\, \omega_{y'}\omega_{z'} & = & M_{x'} \\ I_{y'} \dfrac{d\omega_{y'}}{dt} + (I_{x'} - I_{z'})\, \omega_{x'}\omega_{z'} & = & M_{y'} \\ I_{z'} \dfrac{d\omega_{z'}}{dt} + (I_{y'} - I_{x'})\, \omega_{x'}\omega_{y'} & = & M_{z'} \end{array} \right.$$

Opisują zmiany wektora prędkości kątowej w układzie bryły
(w szczególności położenia osi obrotu względem osigłównych)

$I_{x'}, I_{y'}, I_{z'}$ - stałe współczynniki, $M_{x'}, M_{y'}, M_{z'}$ - funkcje

Bąk swobodny

Bryła na którą nie działają zewnętrzne momenty sił: bąk swobodny.

Dla uproszczenia rozpatrzmy bąk symetryczny: $I_{x'} = I_{y'} \neq I_{z'}$

Wtedy równania Eulera redukują się do:

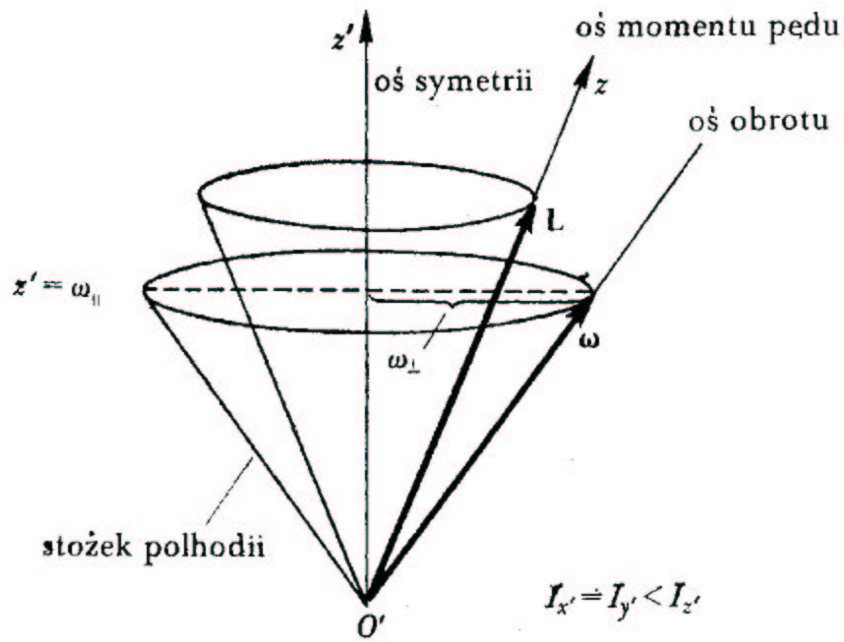
$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_{x'}}{dt} + \left(\frac{I_{z'} - I_{x'}}{I_{x'}} \, \omega_{z'} \right) \omega_{y'} &= 0 \\
\frac{d\omega_{y'}}{dt} - \left(\frac{I_{z'} - I_{x'}}{I_{x'}} \, \omega_{z'} \right) \omega_{x'} &= 0 \\
\frac{d\omega_{z'}}{dt} &= 0
\end{aligned}$$

Pierwsze dwa równania sprowadzają się do równania oscylatora charmonicznego:

$$\frac{d^2\omega_{x'}}{dt^2} = -\Omega^2 \, \omega_{x'} \qquad \text{gdzie:} \quad \Omega = \left(\frac{I_{z'} - I_{x'}}{I_{x'}} \, \omega_{z'} \right)$$

Bąk swobodny

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie w postaci:



$$
\begin{aligned}
\omega_{x'} &= \omega_{\perp} \cos(\Omega t + \phi) \\
\omega_{y'} &= \omega_{\perp} \sin(\Omega t + \phi) \\
\omega_{z'} &= \omega_{\parallel} = \text{const}
\end{aligned}
$$

W układzie bryły, wektor $\vec{\omega}$ zatacza stożek wokół osi głównej

$\Rightarrow$ zmianom kierunku z częstością Ω podlega także wektor momentu pędu $\vec{L}$

Okres "precesji"

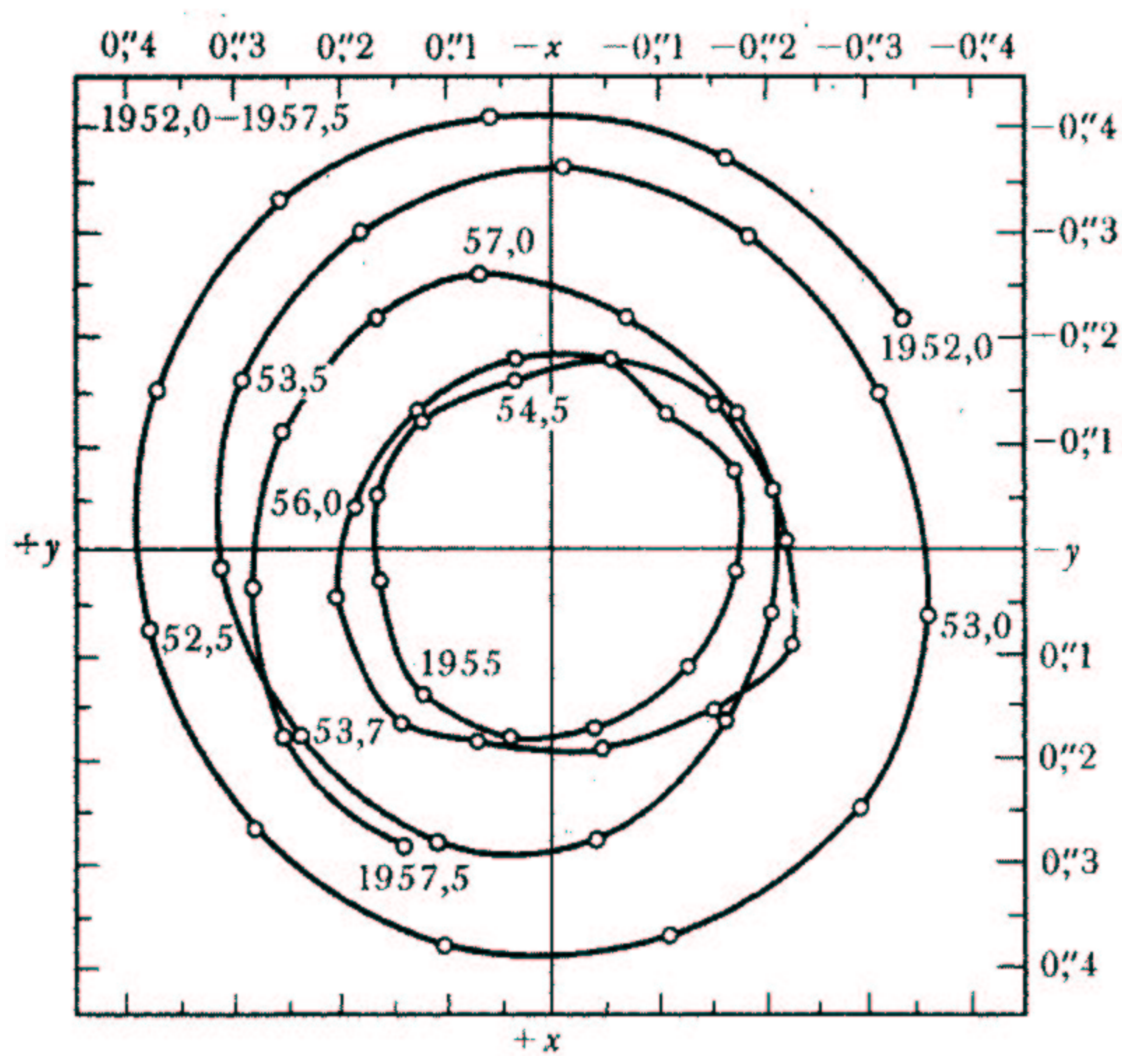
$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{I_{x'}}{I_{z'} - I_{x'}} \frac{2\pi}{\omega_{\parallel}}$$

Bąk swobodny

Ponieważ Ziemia nie jest idealną kulą oś obrotu Ziemi podlega precesji.

Zmiany położenia osi obrotu, “bieguna kinematycznego” Ziemi są bardzo niewielkie (∼15 m), ale mierzalne.

Wyniki pomiarów 1952-57 ⇒



Okres obiegu średnio ok. 427 dni.

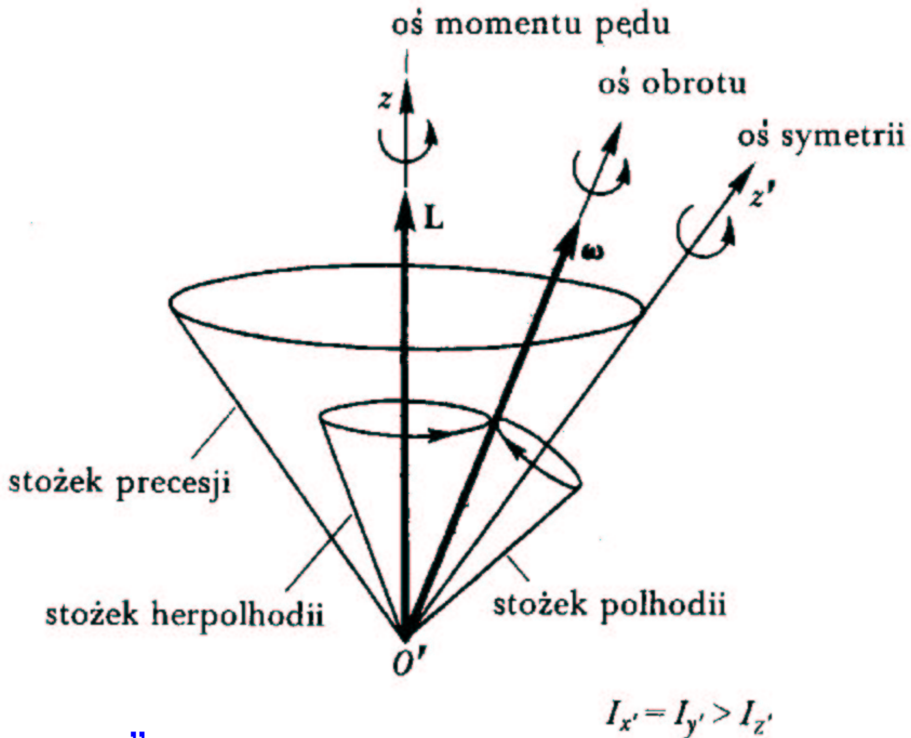
Bąk swobodny

W układzie laboratoryjnym $\vec{L}$=const (bąk swobodny)

Precesji podlega oś symetrii bryły.

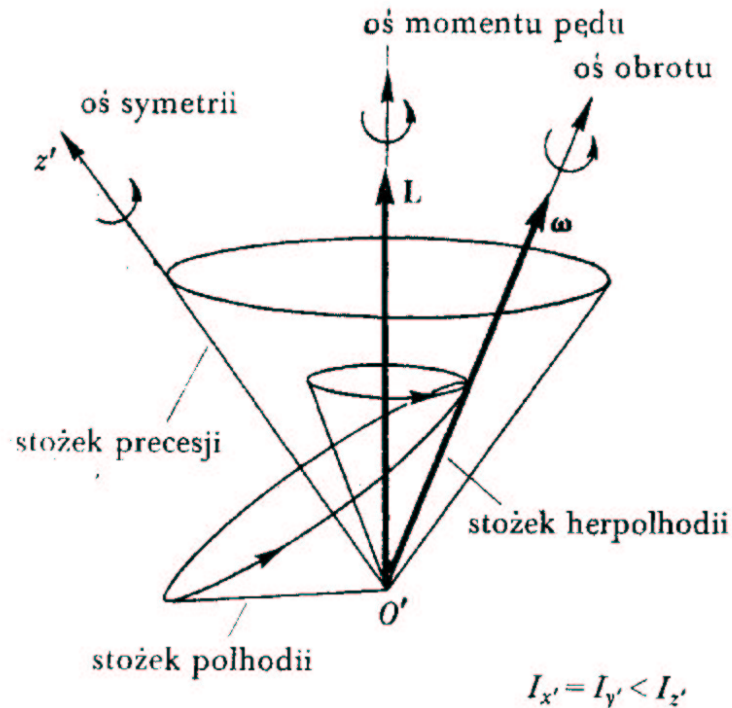
Dwa przypadki:

$I_{x'} = I_{y'} > I_{z'}$



"cygaro"

$I_{x'} = I_{y'} < I_{z'}$



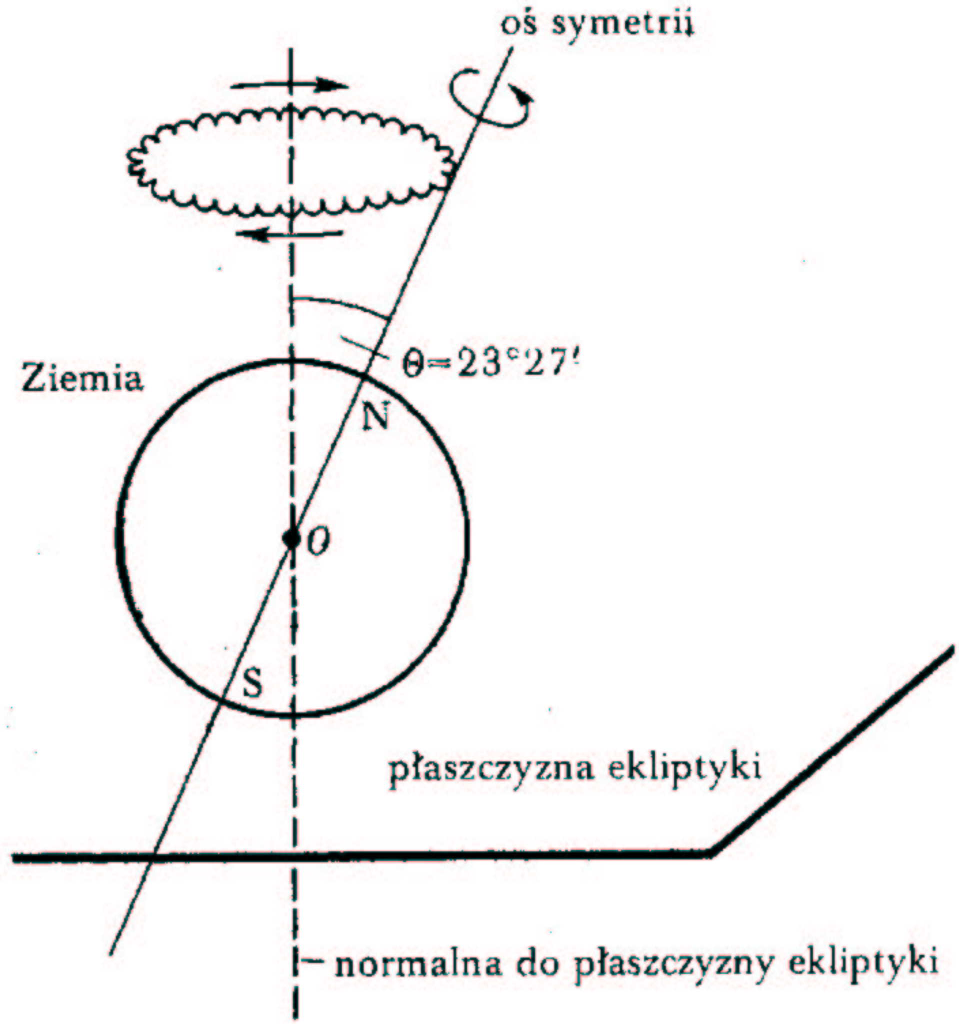
"dysk"

Bąk swobodny

Ziemia nie jest “bąkiem swobodnym”.

Niejednorodności pola grawitacyjnego w którym się porusza (niezerowy moment sił grawitacji) powodują “precesję astronomiczną” osi obrotu Ziemi (precesję wektora momentu pędu)

schemat ⇒

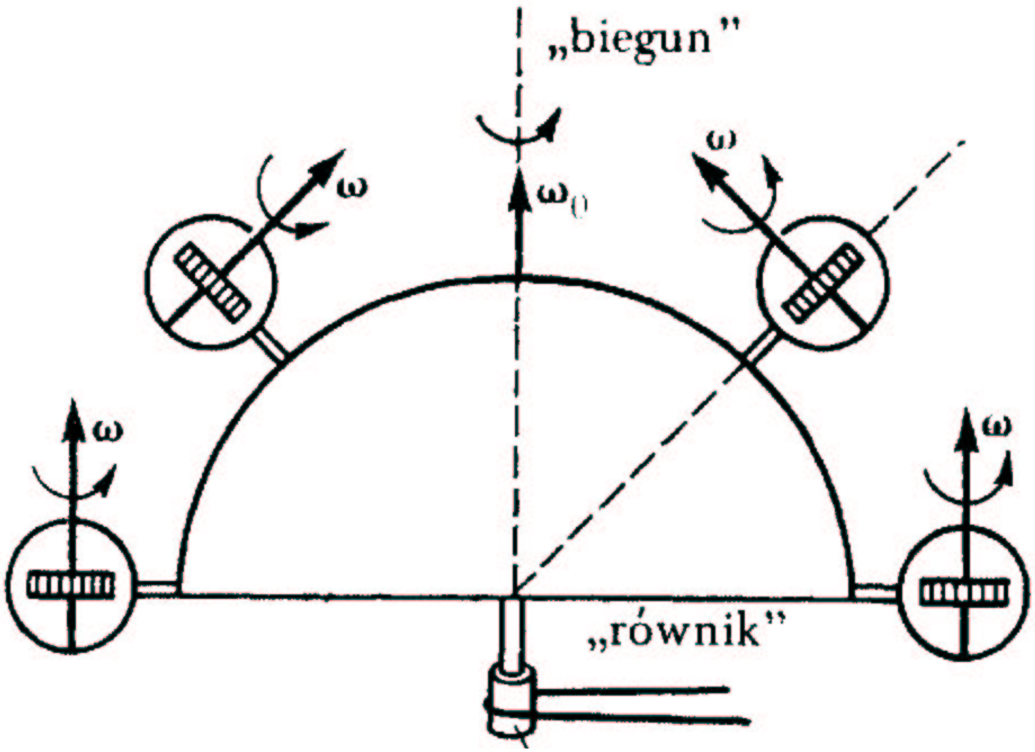


Okres precesji wynosi ok. 26 000 lat

Kompas żyroskopowy

Rozważmy żyroskop w układzie obracającej się Ziemi.

Jeśli na żyroskop nie działają zewnętrzne momenty sił, będzie on zachowywał orientację w przestrzeni (względem zewnętrznego układu inercjalnego!)



Jeśli jednak nałożymy więzy wymuszające poziome położenie osi obrotu żyroskopu (równolegle do powierzchni Ziemi) to po pewnym czasie oś żyroskopu ustawi się wzdłuż południka.

Będzie to efekt działania momentów sił więzów.

Podsumowanie wykładu

Najważniejsze elementy wykładu.

Co starałem się Państwu pokazać/przekazać:

- uniwersalność praw fizyki $\Leftrightarrow$ względność opisu

  musimy zawsze sprawdzić warunki stosowalności przyjętego modelu

- piękno transformacji Lorenza

  spójność opisu mimo wielu pozornych paradoksów

  nie można być fizykiem nie rozumiejąc szczególnej teorii względności !

- prostotę równań ruchu

  Dla fizyka są najważniejsze. Rozwiązywanie ich to już matematyka...

- potęgę praw zachowania

  Dzieki nim możemy znacznie uprościć rozważane zagadnienia...

- związek z fizyką współczesną

  Mechanika jest “fundamentem” całej fizyki...

Egzamin

Egzamin pisemny

W dniu 19 stycznia 2003, godz. 14^{00} – 18^{00},
Sala Duża Doświadczalna + Aula

Miejsca na salach będą numerowane i przydzielane wg. imiennej listy.

Bardzo prosimy o punktualne przybycie i sprawdzanie przydzielonej sali!

Egzamin będzie się składał z dwóch części:

- test "teoretyczny" $\Rightarrow$ 30 minut

  krótka przerwa

- 4 zadania rachunkowe $\Rightarrow$ 3 godziny 30 minut

Egzamin

Test “teoretyczny”

30 pytań z materiału przedstawionego na wykładach (bez ostatniego o neutrinach !)

W miarę możliwości równomiernie rozłożonych tematycznie (1-2 pytania na wykład)

Do każdego pytania 4 odpowiedzi, z czego dokladnie jedna prawidłowa.

Punktacja:

- dobra odpowiedź $\Rightarrow +1$
- zła odpowiedź $\Rightarrow -0.5$ (losowe skreślanie nie opłaca się)

Zadania rachunkowe

4 zadania z całego materiału przerabianego na ćwiczeniach

Materiał obowiązujący do obu kolokwiów

$+$ bryła sztywna

Egzamin

Zaliczenie części rachunkowej

Do egzaminu pisemnego dopuszczone będą tylko te osoby,
które z kolokwiów i ćwiczeń uzyskały przynajmniej 10 punktów.

W przeciwnym wypadku, część rachunkowa egzaminu pisemnego
będzie traktowana jako kolokwium poprawkowe.

Do zaliczenia części rachunkowej konieczne jest uzyskanie łącznie (kolokwia + ocena asystenta + część rachunkowa egzaminu) przynajmniej 30 punktów.

Dobry wynik z egzaminu pisemnego może zaliczyć część rachunkową,
także w przypadku kiepskich wyników obu kolokwiów.

Zaliczenie części rachunkowej jest niezbędne do zdania egzaminu!

Na podstawie wyników części rachunkowej (+kolokwia) oraz wyniku testu proponowana jest ocena końcowa

Egzamin

Egzamin ustny

Tylko dla osób, które zaliczyły część rachunkową,

w przypadku gdy:

- wyniki nie pozwalają na jednoznaczną ocenę

  lub

- chcą poprawić zaproponowaną ocenę

  poprawiając wyniki testu teoretycznego

- nie ma możliwości poprawienia oceny w przypadku złych wyników obu części (rachunkowej i teoretycznej)

Egzamin

Przykładowe pytania testu teoretycznego:

1. Jednostką układu SI nie jest:
   $\boxed{\text{A}}$ A $\boxed{\text{B}}$ mol $\boxed{\text{C}}$ $^\circ$C $\boxed{\text{D}}$ m

2. Jaką część metra stanowi 1 nm:
   $\boxed{\text{A}}$ 10^{-6} $\boxed{\text{B}}$ 10^{-9} $\boxed{\text{C}}$ 10^{-12} $\boxed{\text{D}}$ 10^{-15}

3. Jak skierowane jest przypieszenie w ruchu prostoliniowym:
   $\boxed{\text{A}}$ prostopadle do prędkości $\boxed{\text{B}}$ równolegle do prędkości $\boxed{\text{C}}$ dowolnie
   $\boxed{\text{D}}$ nie ma przyspieszenia

4. Układ B porusza sie z przyspieszeniem względem układu A. Wynika z tego, że:
   $\boxed{\text{A}}$ Oba układy są inercjalne $\boxed{\text{B}}$ Oba układy są nieinercjalne
   $\boxed{\text{C}}$ Jeden z układów jest inercjalny $\boxed{\text{D}}$ Jeden z układów jest nieinercjalny

Egzamin poprawkowy

Egzamin pisemny

W dniu 12 lutego 2004 (czwartek), godz. $14^{00} - 18^{00}$

Organizacja jak w pierwszym terminie...

Egzamin ustny

Termin zostanie wybrany w zależności od liczby osób...