Kinematyka relatywistyczna

Fizyka I (B+C)

Wykład VIII:

- Paradoks bliźniąt
- Relatywistyczny efekt Dopplera

Przypomnienie

Transformacja Lorenza

dla różnicy współrzędnych dwóch wybranych zdarzeń A i B: przyjmując $c \equiv 1$

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\, \Delta t' + \gamma\, \beta\, \Delta x' \\ \gamma\, \beta\, \Delta t' + \gamma\, \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\, \beta & 0 & 0 \\ \gamma\, \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix}$$

Transformacja odwrotna: $\beta \Leftrightarrow -\beta$

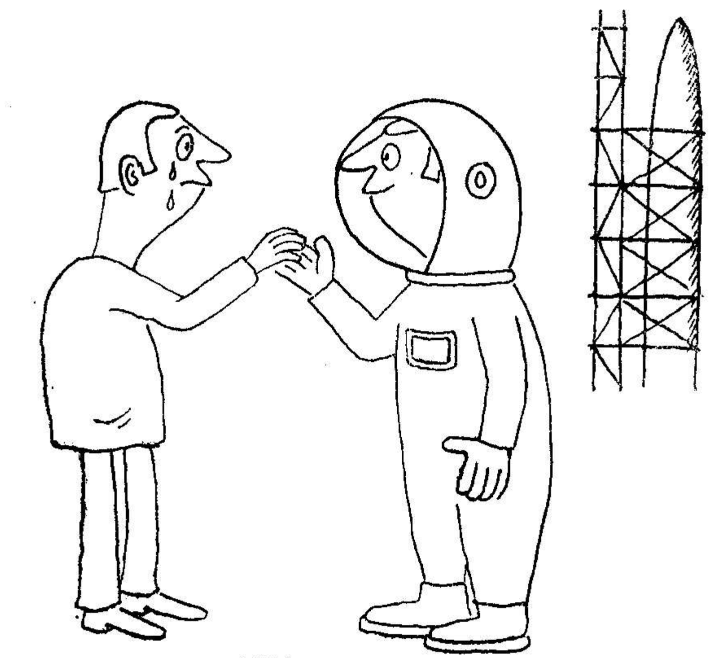
Konsekwencje

- dylatacja czasu $\quad \Delta x' \equiv 0 \;\Rightarrow\; \Delta t = \gamma\, \Delta t'$
- skrócenie Lorenza $\quad \Delta t \equiv 0 \;\Rightarrow\; \Delta x' = \gamma\, \Delta x \;\Rightarrow\; \Delta x = \Delta x'/\gamma$

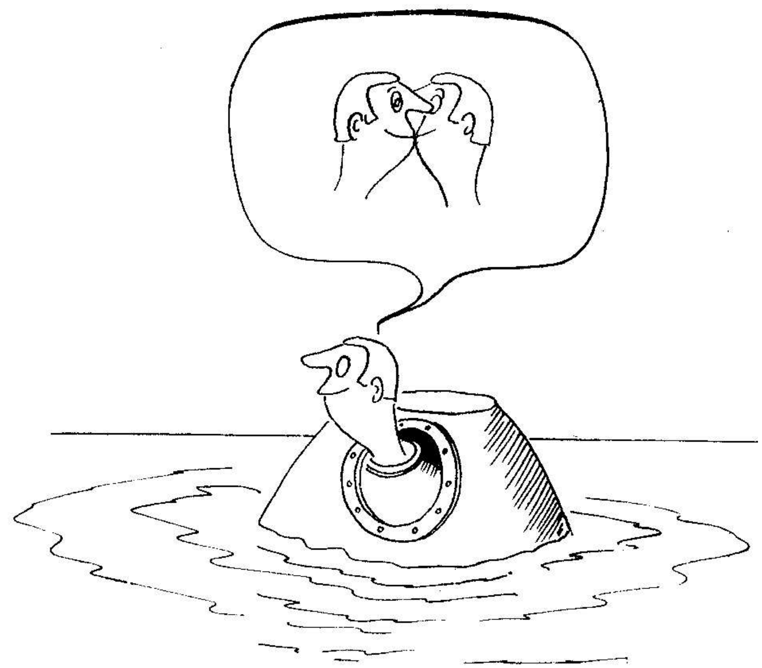
Paradoks bliźniąt

Dwaj bracia - obserwatorzy mierzą czas pomiędzy dwoma zdarzeniami:

wylotem rakiety



powrotem na Ziemię

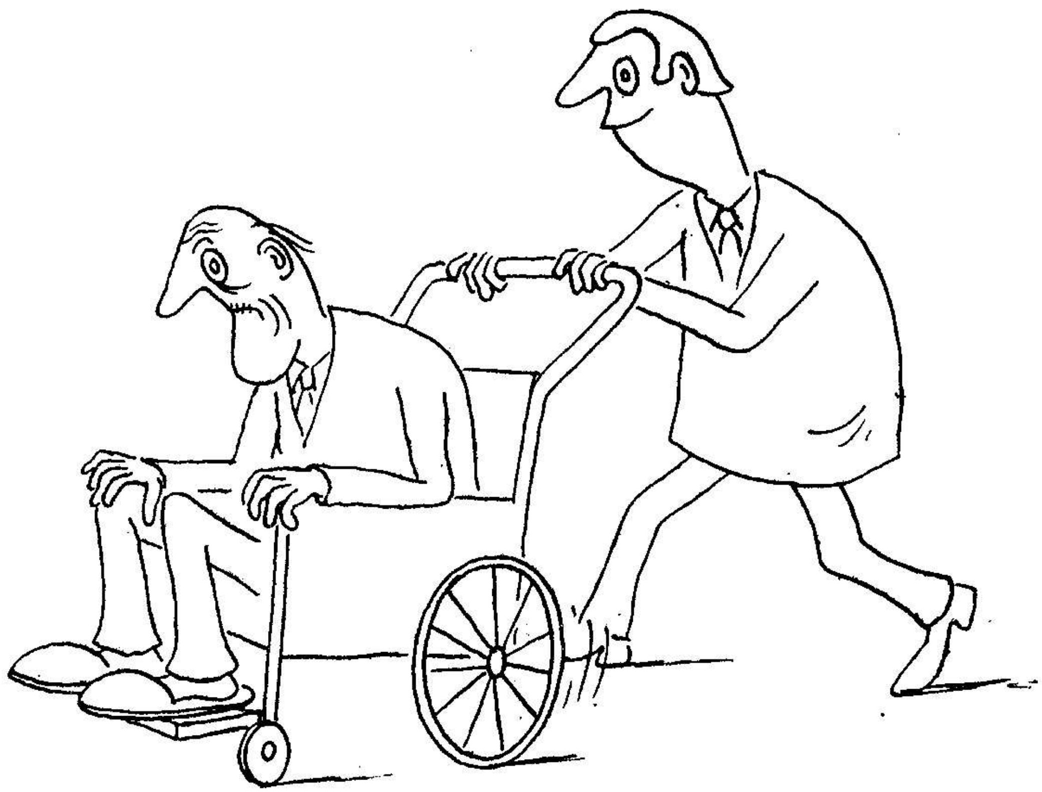


Poruszają się względem siebie z prędkością porównywalną z prędkością światła

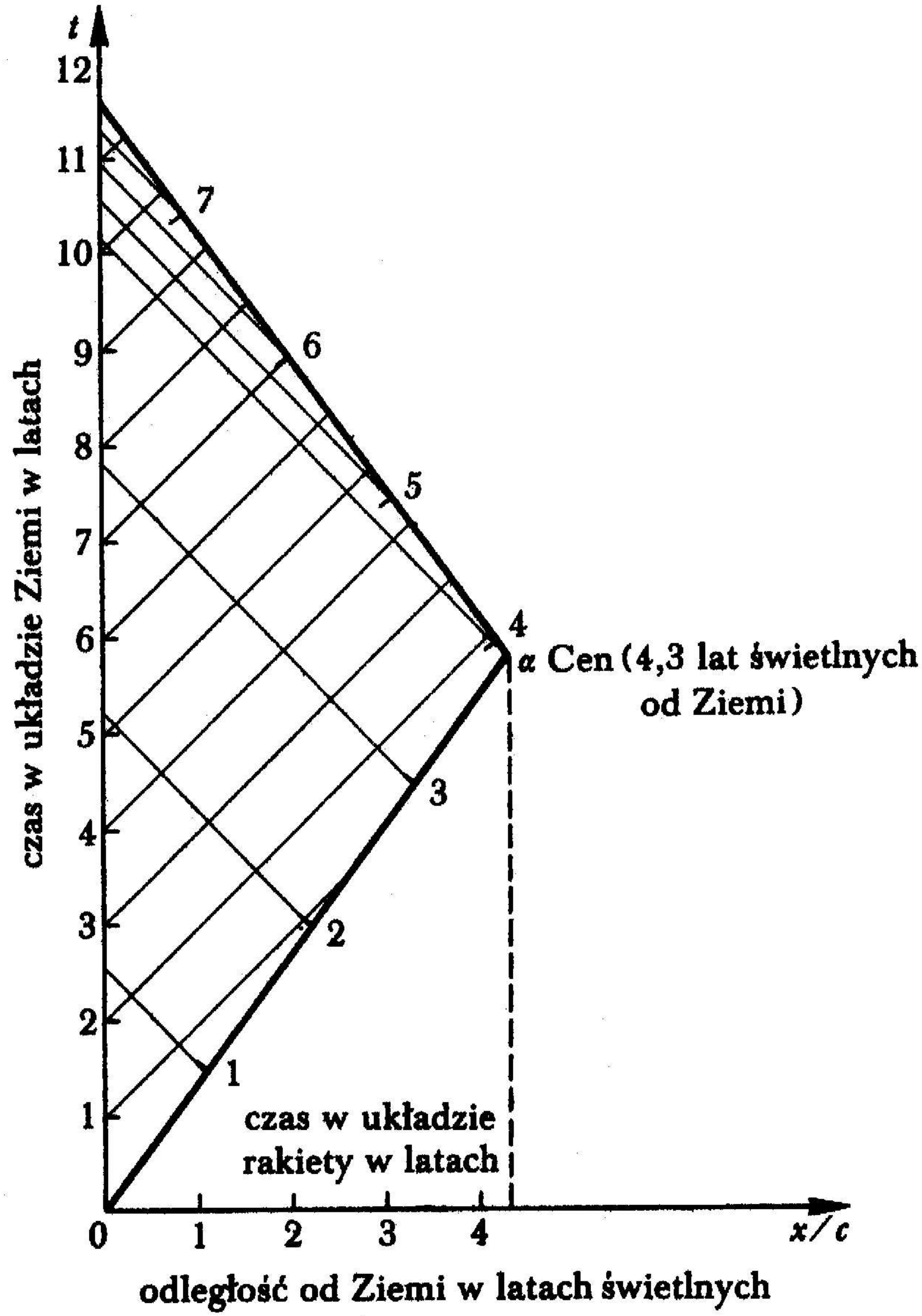
$\Rightarrow$ każdy z nich stwierdzi, że jego brat powinien być młodszy (dylatacja czasu)

Paradoks bliźniąt

Ale dla obu z nich oba zdarzenia zaszły
też w tym samym miejscu
$\Rightarrow$ powinni być w tym samym wieku !
(z niezmienniczości interwału)



Jak rozstrzygnąc czy i który z braci będzie młodszy ?



Paradoks bliźniąt

Przyjmijmy, że podróż odbywa się z prędkością $v = 0.745\ c$ $\qquad (\gamma = 1.5)$

Według obserwatora na Ziemi podróż zajmie

$$\frac{2 \times 4.3}{0.745} \approx 11.5 \text{ lat}$$

Dzięki dylatacji czasu, mierzony przez kosmonautę czas podróży skróci się do:

$$\frac{11.5 \text{ lat}}{1.5} \approx 7.7 \text{ lat}$$

$\Leftarrow$ impulsy świetlne wysyłane przez obu braci co rok

Paradoks bliźniąt

Dla kosmonauty odległość skróci się do $\frac{4.3}{1.5} \approx 2.9$ lat świetlnych (skrócenie Lorenza)

Podróż będzie jego zdaniem trwała $\frac{2 \times 2.9}{0.745} \approx 7.7$ lat (to samo powiedział jego brat)

Ale dla kosmonauty bieg zegarów na Ziemi ulega spowolnieniu (dylatacja czasu)

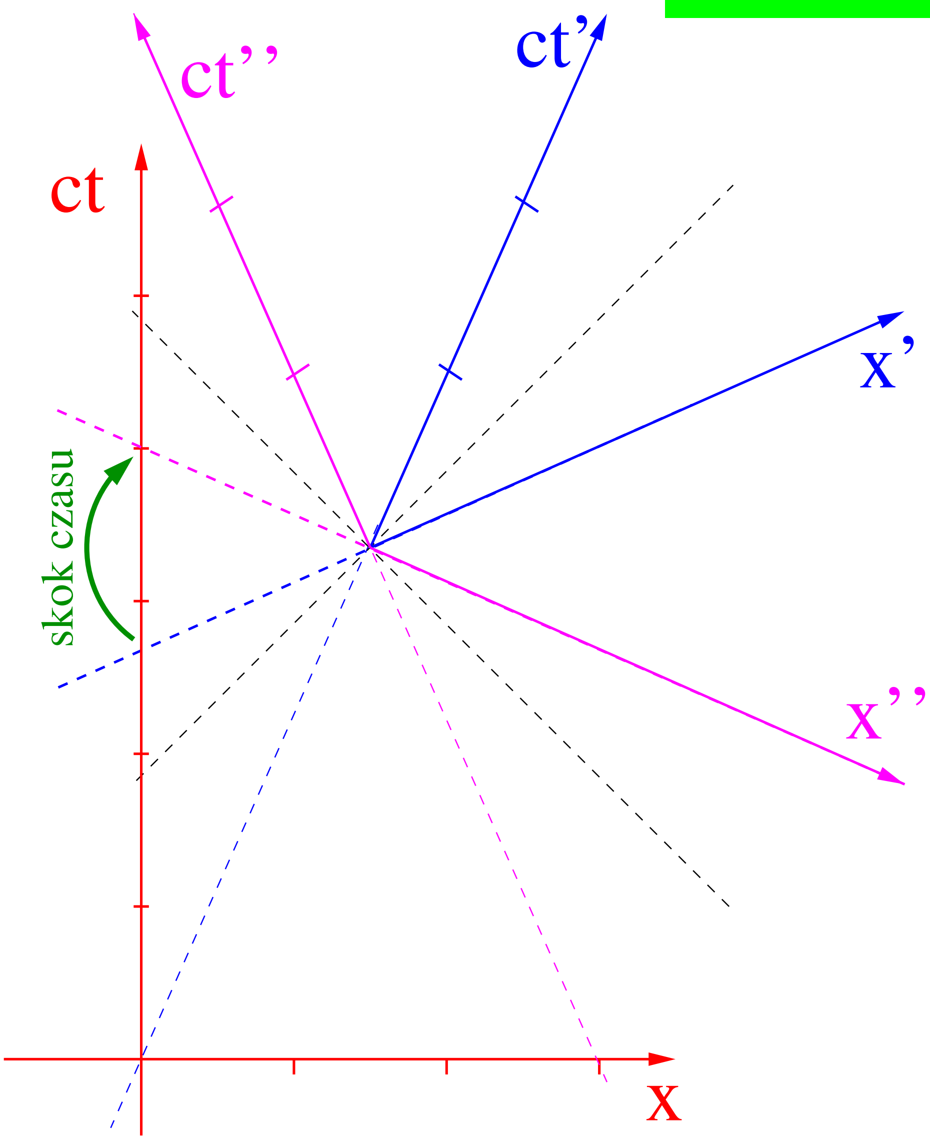
W czasie jego lotu do układu α-Centaura na Ziemi mija tylko $\frac{0.5 \times 7.7 \text{ lat}}{1.5} \approx 2.6$ lat,

tyle samo czasu mija na Ziemi w czasie jego podróży powrotnej.

Łącznie powinno minąć $\frac{7.7 \text{ lat}}{1.5} \approx 5.1$ lat, ale brat na Ziemi stwierdzi, że minęło 11.5 lat

Gdzie znika ponad 6 lat !?

Paradoks bliźniąt



Kosmonauta obserwuje wskazania zegara na Ziemi.

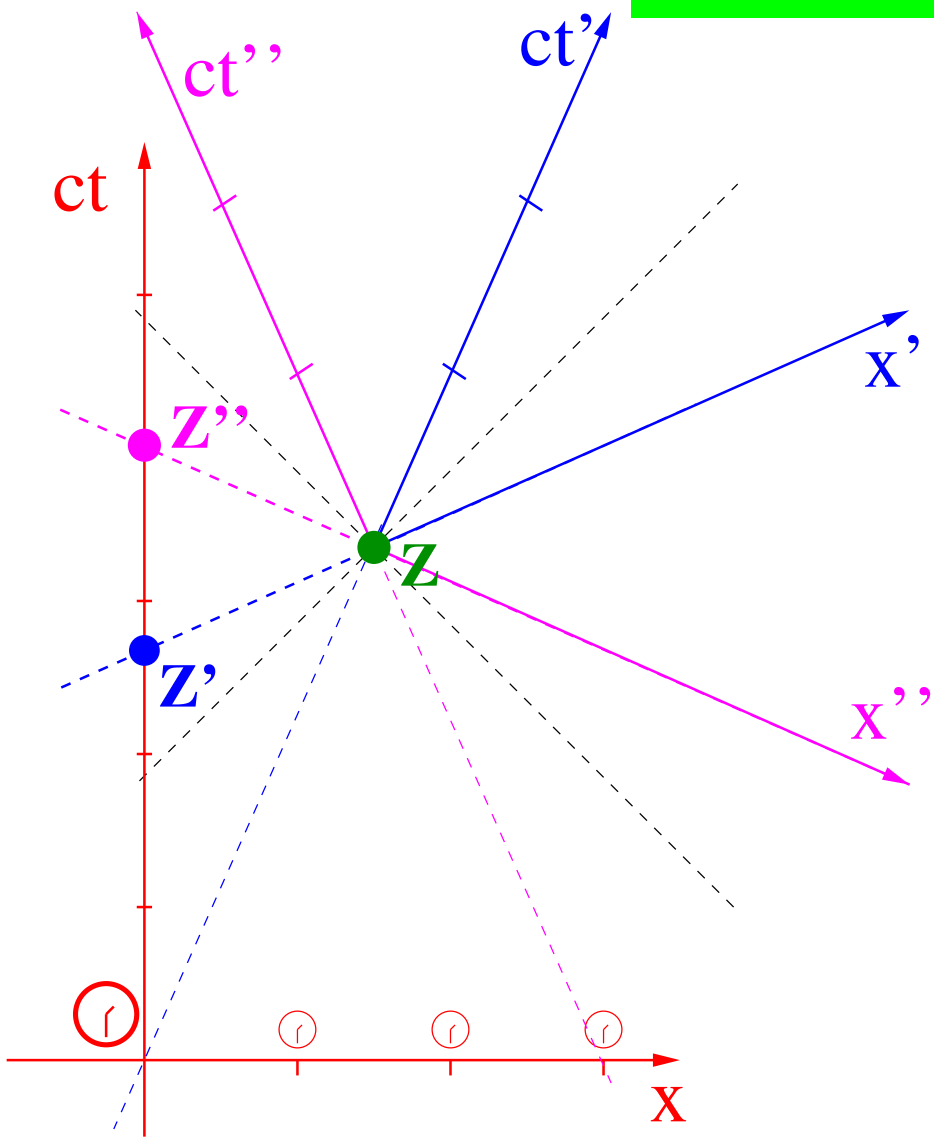
Na zegarze tym przybywa **"skokowo"** ponad 6 lat w momencie zmiany przez kosmonautę układu współrzędnych.

Zegar na Ziemi nie może być wprost porównywany z zegarem kosmonauty
$\Rightarrow$ zawsze porównywany jest z najbliższym zegarem układu współporuszającego się.

$\Rightarrow$ Istotna jest synchronizacja zegarów

Synchronizacja zmienia się przy zmianie układu odniesienia.

Paradoks bliźniąt



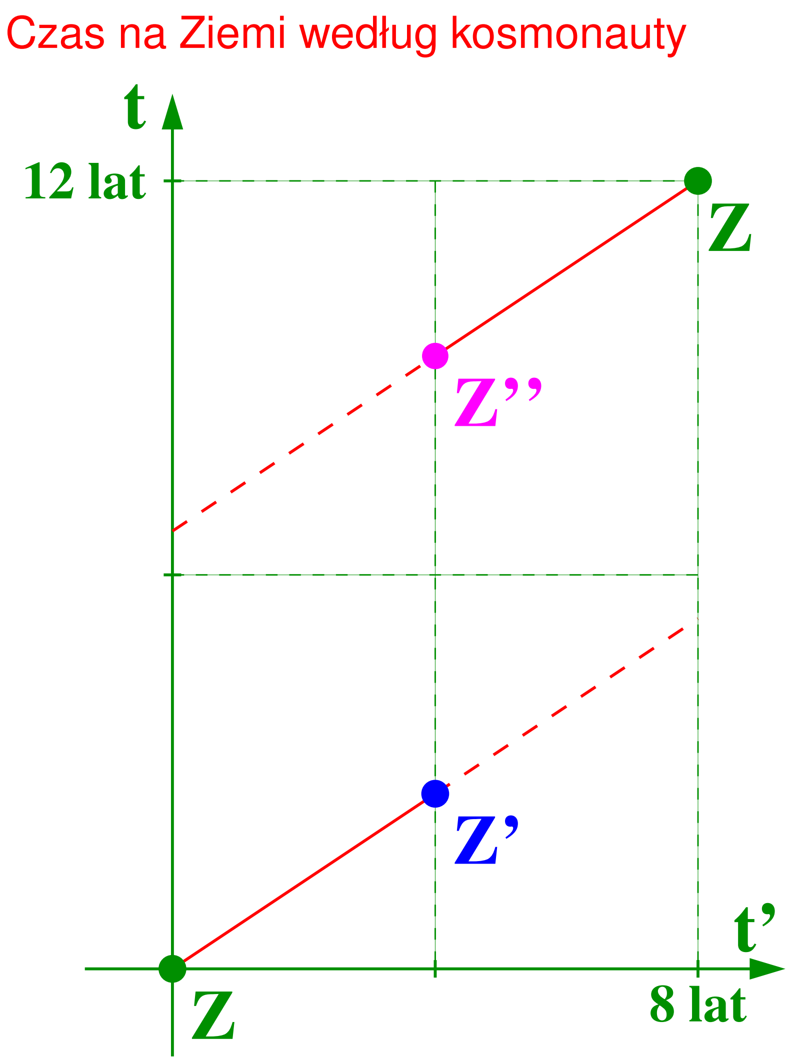
Kosmonauta obserwuje wskazania zegara na Ziemi porównując go zawsze z najbliższym zegarem jego układu.

W chwili startu ($t = t' = 0$) jest to jego własny zegar **Z**.

Gdy dotrze do celu są to zegary **Z'** (przed) i **Z''** (po zawróceniu).

Także obserwator na Ziemi może obserwować wskazania zegarów kosmonauty (**Z**, **Z'** i **Z''**) porównując je ze swoją siatką zegarów.

Paradoks bliźniąt



Rakieta

Dolatując do celu, po $t' \sim 4$ latach (według swojego zegara **Z**), kosmonauta stwierdza, że na Ziemi minęło $t <$3 lata.

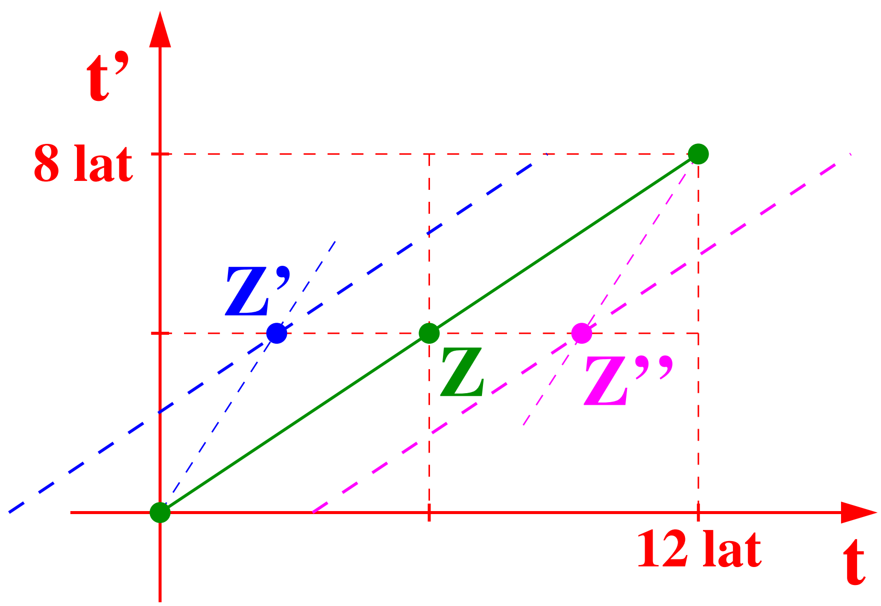
Kosmonauta opiera się na wskazaniach zegara **Z'** zsynchronizowanego z **Z**.

Po zawróceniu informacja o wskazaniach zegara na Ziemi pochodzi od zegara **Z"**, też zsynchronizowanego z **Z** ale w nowym układzie odniesienia.

Według zegara **Z"** w chwili zawracania zegar na Ziemi wskazywał $t >$9 lat.

Paradoks bliźniąt

Wskazania zegarów kosmonauty rejestrowane przez obserwatora na Ziemi



Ziemia

Według obserwatora na Ziemi bieg zegara **Z** kosmonauty jest spowolniony na skutek dylatacji czasu.

Kosmonauta źle ocenił bieg czasu na Ziemi gdyż:

- najpierw użył zegara **Z'** który spieszył się względem **Z**
- potem użył zegara **Z''** który spóźniał się względem **Z**

Według obserwatora nia Ziemi, zawrócenie rakiety **Z**, oraz zdarzenia porównania czasu na Ziemi z przelatującymi zegarami **Z'** i **Z''** nie były równoczesne.

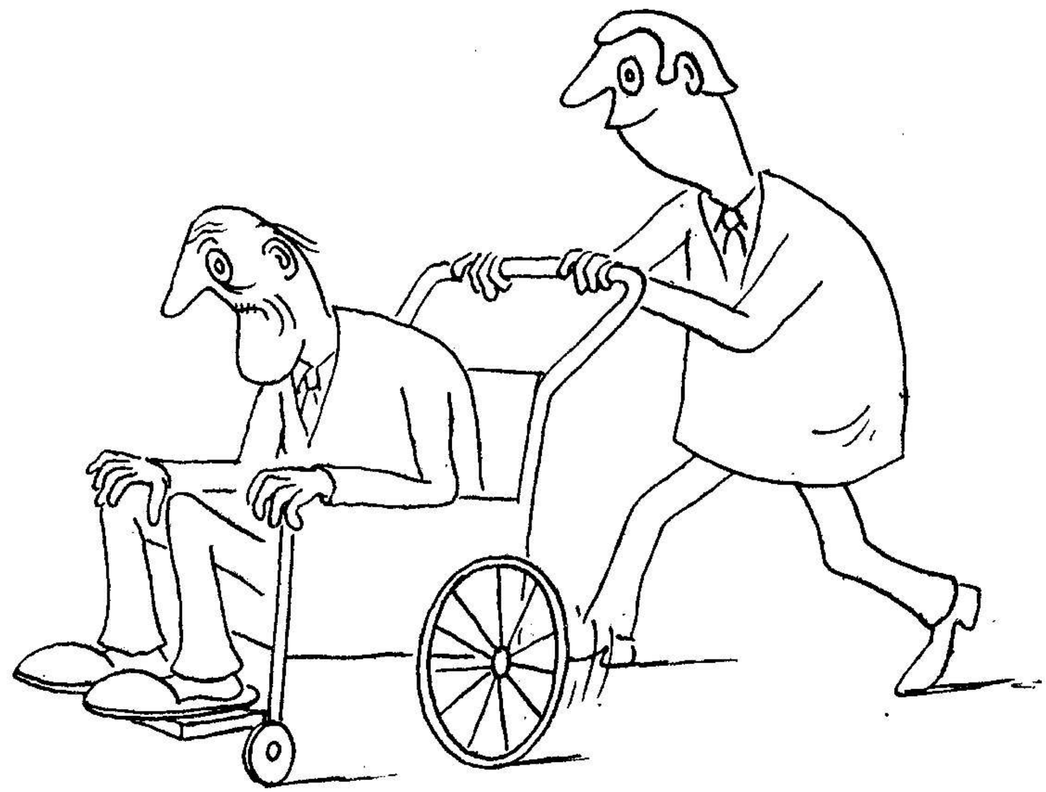
W chwili zawracania zegar **Z'** dawno minął Ziemię, a zegar **Z''** jeszcze do niej nie doleciał.

Paradoks bliźniąt

Dokonany przez kosmonautę pomiar czasu jaki upłynął na Ziemi jest nieprawidłowy, ze względu na zmianę układu odniesienia.

Na ziemi minęło 11.5 lat.

Obaj obserwatorzy zgadzają się, że dla kosmonauty minęło 7.7 lat.

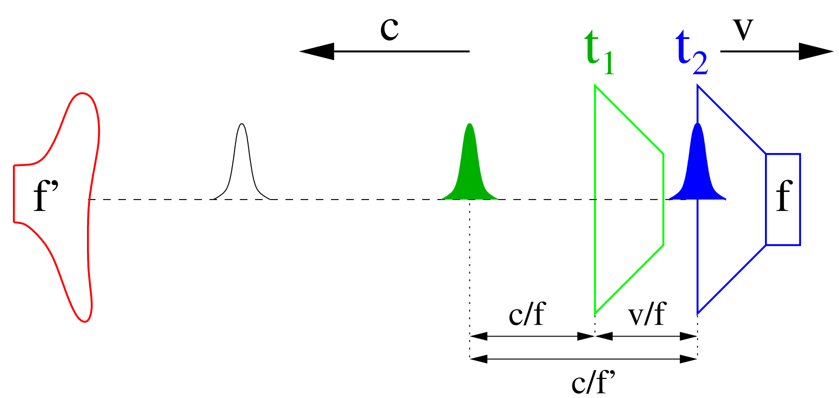


"Ziemianin" kosmonauta

Efekt Dopplera

Dwa przypadki “klasyczne”:

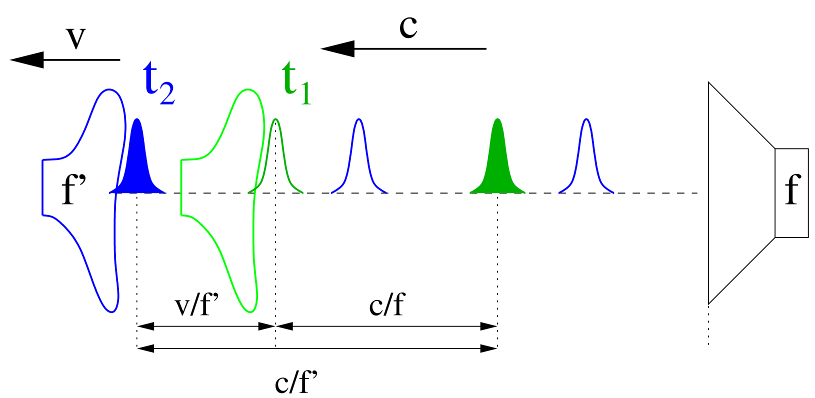
Ruchome źródło



Częstość dźwięku i długość fali mierzona przez obserwatora nieruchomego względem ośrodka:

$$f' = \frac{f}{1+\beta} \qquad \lambda' = \lambda\ (1+\beta)$$

Ruchomy obserwator



Częstość i długość fali mierzona przez ruchomego obserwatora:

$$f' = f\ (1-\beta) \qquad \lambda' = \frac{\lambda}{1-\beta}$$

Ale światło nie potrzebuje “ośrodka”. Powinien się liczyć tylko ruch względny !...

Efekt Dopplera

Jeśli źródło i/lub obserwator poruszają się z dużymi prędkościami

$\Rightarrow$ należy uwzględnić dylatację czasu

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}$$

Ruchome źródło

Poruszające się źródło drga z częstością γ razy mniejszą:

$$f' = \frac{f/\gamma}{1+\beta} = f\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Ruchomy obserwator

Dla poruszającego się obserwatora czas biegnie wolniej, mierzona częstość jest γ razy większa:

$$f' = \gamma\, f\, (1-\beta) = f\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$\Rightarrow$ Pełna symetria !

Efekt Dopplera

Ruch źródła

Wysłanie impulsu w układzie O':

$$A \; : \; (T, 0, 0, 0)$$

W układzie O: $(c = 1)$

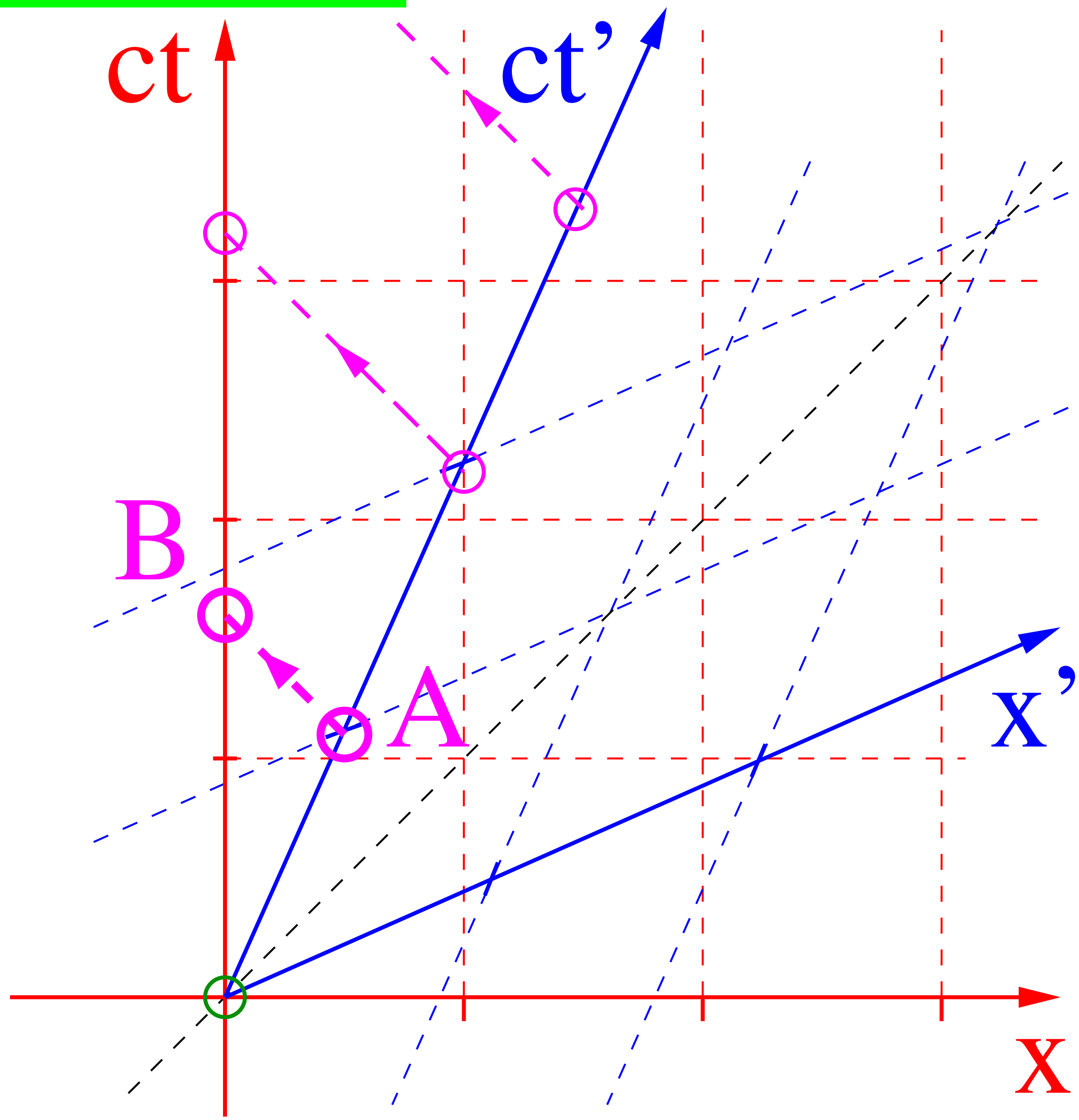
$$A \; : \; (\gamma\, T, \beta\gamma\, T, 0, 0)$$

Na pokonianie odległości $\beta\gamma T$ światło potrzebuje $\beta\gamma\, T$ czasu

$\Rightarrow$ dotarcie impulsu światła do obserwatora O:

$$B \; : \; (\gamma\, T + \beta\gamma\, T, 0, 0, 0)$$

$$T' \;=\; \gamma(1+\beta)\, T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, T$$



Efekt Dopplera

Wysłanie impulsu w układzie O:

$$A \;:\; (T, 0, 0, 0)$$

Dotarcie impulsu do obserwatora O':

$$B \;:\; (T + \Delta T, \Delta T, 0, 0)$$

Prędkość O' względem O:

$$\beta = \frac{\Delta T}{T + \Delta T} \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{\beta}{1 - \beta}\, T$$

Współrzędne dotarcia impulsu w O:

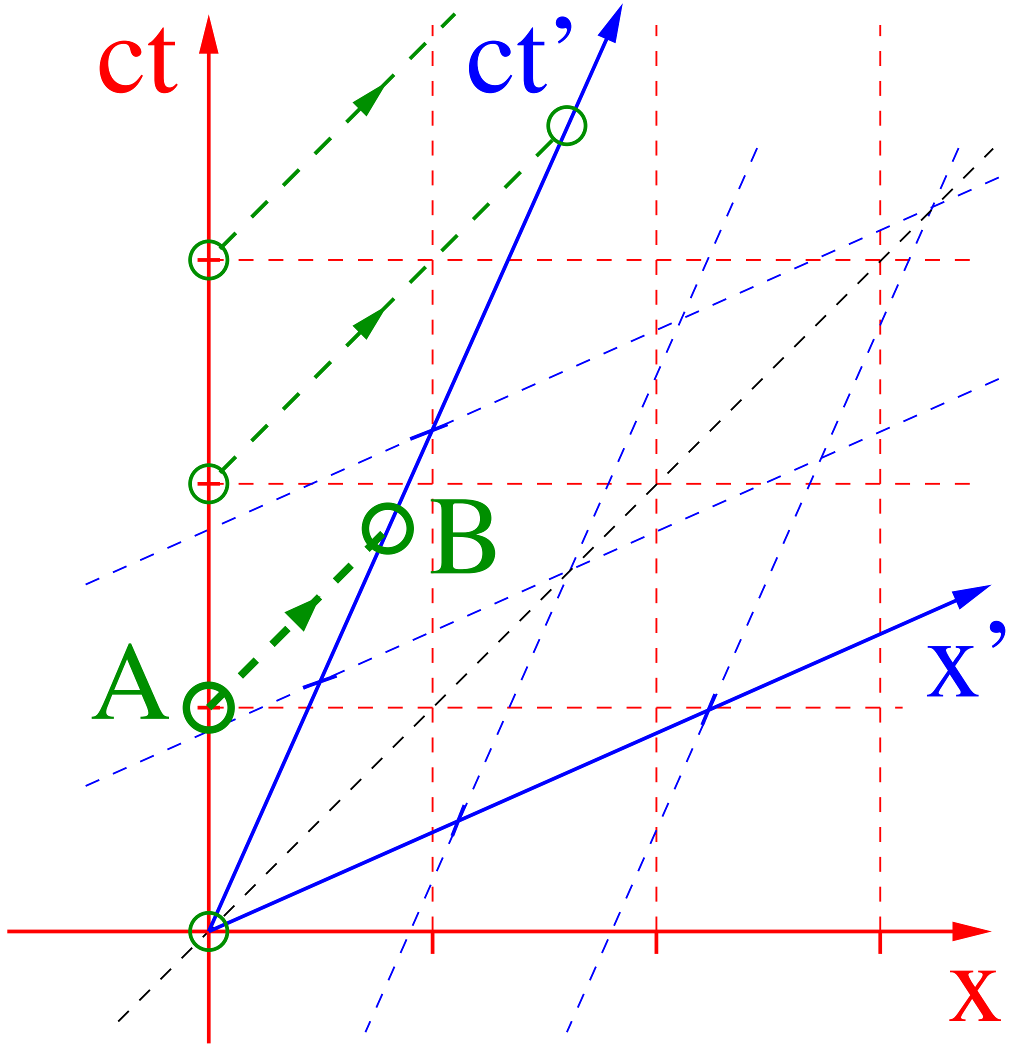
$$B \;:\; \left(\frac{T}{1 - \beta}, \frac{\beta\, T}{1 - \beta}, 0, 0\right)$$

$\Rightarrow$ według O' (dylatacja czasu)

$$B \;:\; \left(\frac{T}{\gamma(1 - \beta)}, 0, 0, 0\right)$$

$$\Rightarrow \; T' \;=\; \frac{T}{\gamma(1 - \beta)} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}\, T$$

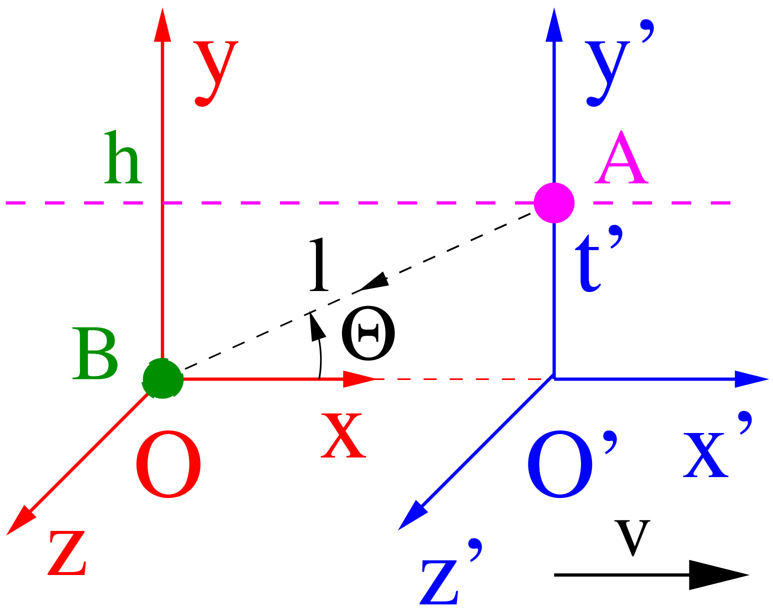
Ruch obserwatora



Efekt Dopplera

Przypadek ogólny

Źródło światła przelatuje w odległości h od obserwatora:



t - czas wysłania impulsu mierzony w układzie O':

$$A \;:\; (t, 0, h, 0)$$

Współrzędne tego zdarzenia w układzie O:

$$A \;:\; (\gamma\, t, \gamma\beta\, t, h, 0)$$

$\Rightarrow$ czas dotarcia impulsu do obserwatora O (B):

$$t' \;=\; \gamma t + l \;=\; \gamma t + \sqrt{(\gamma\beta t)^2 + h^2}$$

Różnica dt' między czasami dotarcia dwóch impulsów wysłanych w odstępie czasu dt

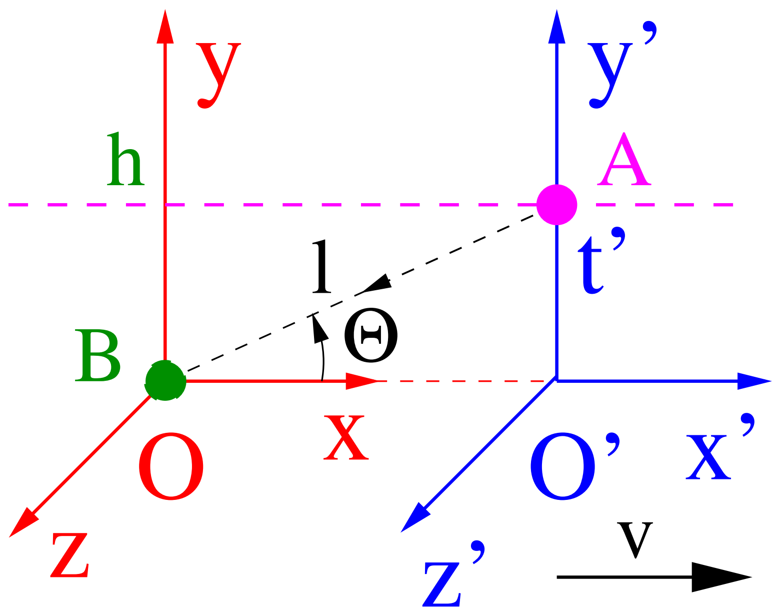
$\Rightarrow$ współczynnik przesunięcia dopplerowskiego:

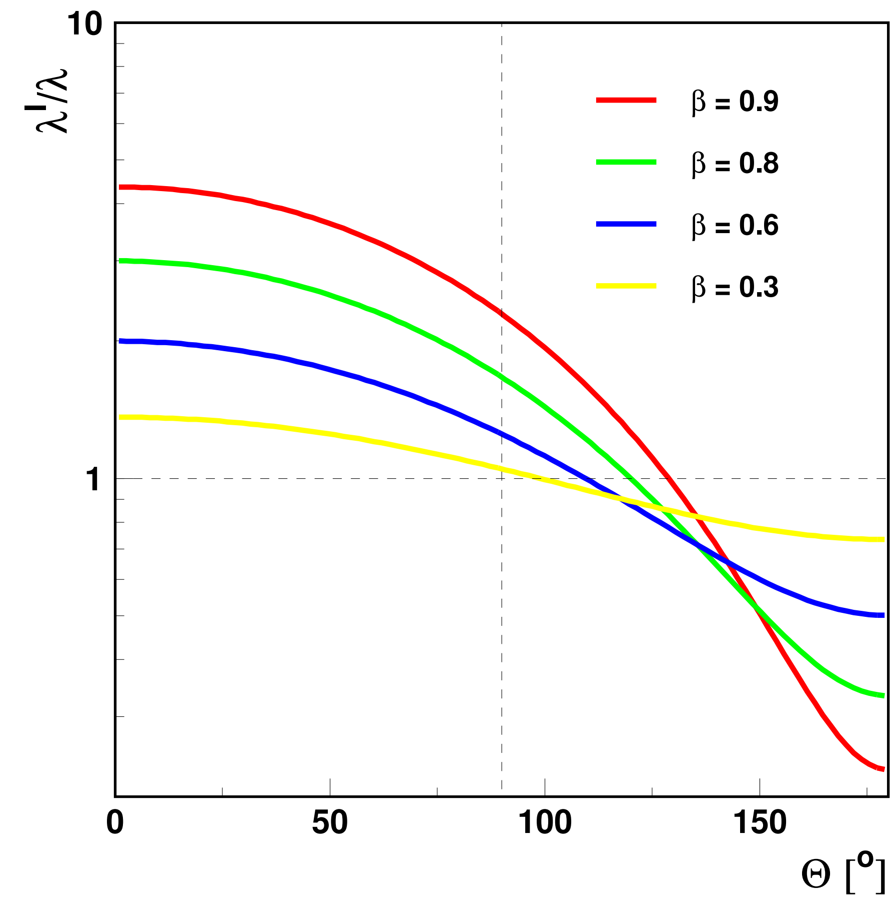
$$\frac{\text{mierzona}}{\text{emitowana}} \; \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{dt'}{dt} \;=\; \gamma + \frac{\gamma^2\beta^2 t}{\sqrt{(\gamma\beta t)^2 + h^2}} \;=\; \gamma\left(1 + \beta\,\frac{x}{l}\right) \;=\; \gamma\,(1 + \beta\,\cos\Theta)$$

Θ - kąt obserwacji (!)

Efekt Dopplera

Przypadek ogólny





Przesunięcie długości fali:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{T'}{T} = \gamma\,(1+\beta\cos\Theta)$$

mierzona / emitowana

Zmiana częstości także dla $\Theta = 90^\circ$!!!

Klasycznie nie ma zmiany częstości...

Efekt Dopplera

W warunkach ziemskich efekt Dopplera dla światła jest istotny tylko w wyjątkowych przypadkach.

Przesunięcie ku czerwieni w widmach odległych galaktyk zaobserwował po raz pierwszy Hubble w 1929 r.

Zauważył on, że prędkość 'ucieczki' rośnie z odległością (prawo Hubbla):

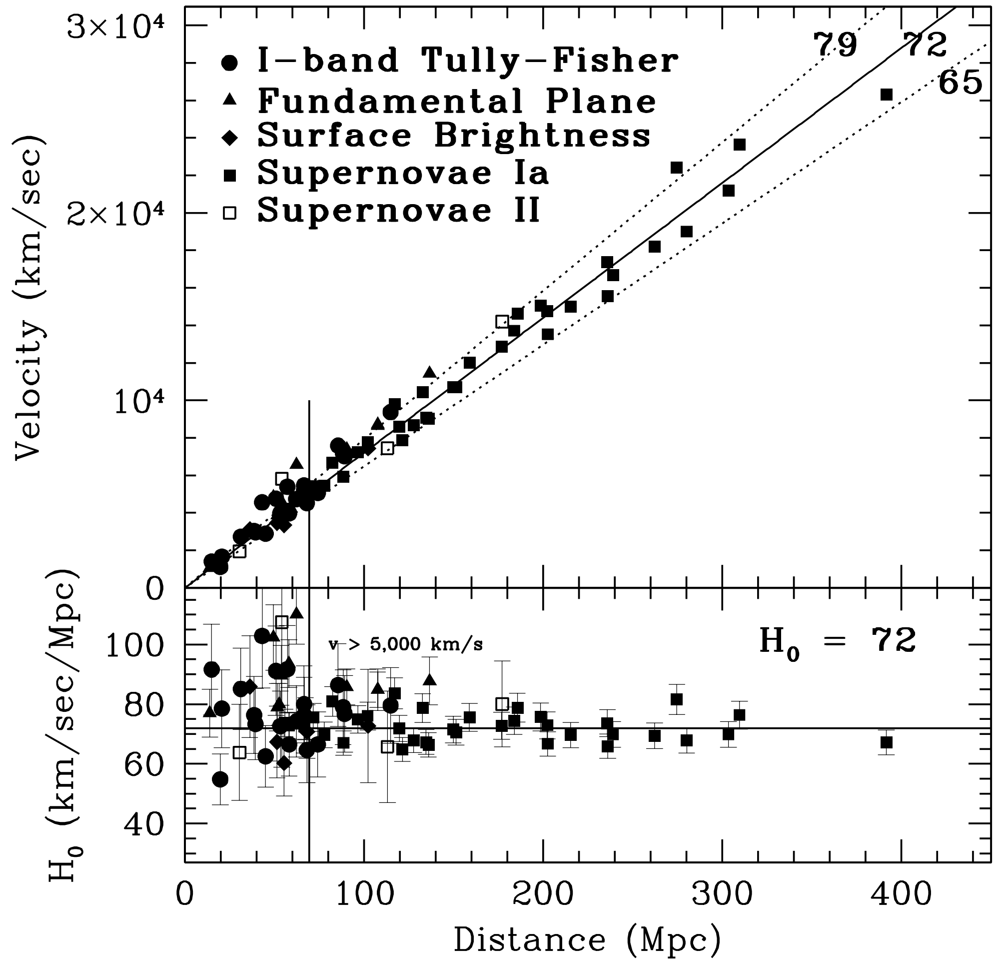
$$v = H\, r$$

r - odległość od Ziemi, H - stała Hubbla

$\Rightarrow$ wiek Wszechświata:

$$T = 13.7 \pm 0.2 \;\; GYr$$

Obecne pomiary



$$H = 71^{+4}_{-3} \;\; km/(s \cdot MPc)$$