Bryła sztywna

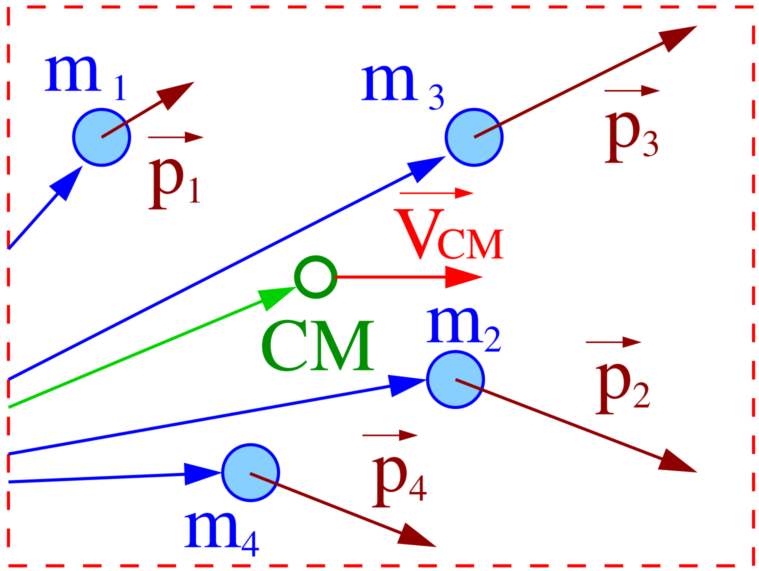
Fizyka I (B+C)

Wykład XXI:

- Bryła sztywna
- Opis ruchu
- Statyka
- Prawa ruchu

Bryła sztywna

Układ wielu ciał



układ inercjalny

Masa układu

$$M = \sum_i m_i$$

Położenie środka masy:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \, \vec{r}_i$$

Ruch układu jako całości

Pęd:

$$\vec{P} = M \, \vec{V}_{CM}$$

Energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{M \, V_{CM}^2}{2} + E_k^\star$$

Moment pędu:

$$\vec{L} = M \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{L}_{CM}^\star$$

$E_k^\star$ - energia “wewnętrzna”

$\vec{L}_{CM}^\star$ - “wewnętrzny” moment pędu

Bryła sztywna

Układ wielu ciał

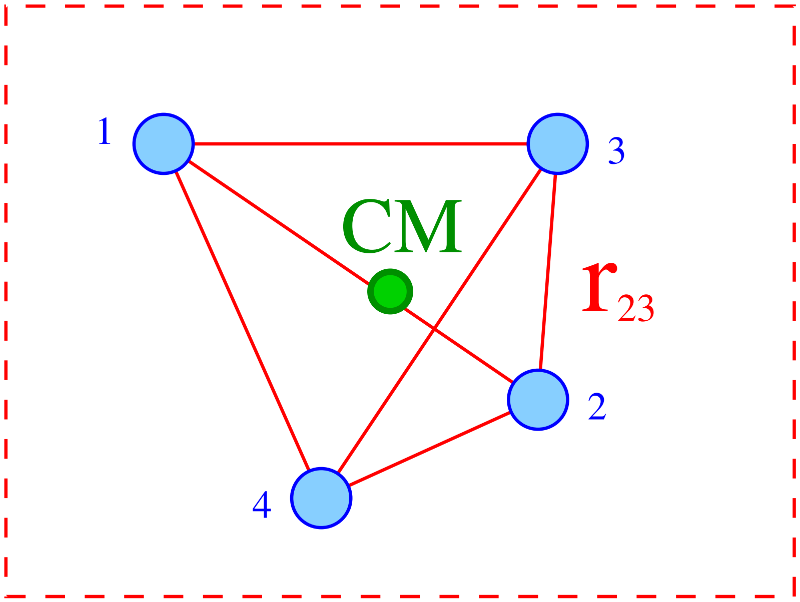
W oparciu o pojęcie środka masy możemy opisać ruch układu jako całości stosując równania ruchu punktu materialnego.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{zw}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{zw}$$

Natomiast ruch względny ciał układu może być (w ogólnym przypadku) bardzo skomplikowany...

Przypadek szczególny



$$r_{ij} = \left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right| = \text{const}$$

Układ ciał w którym względne odległości są stałe $\Rightarrow$ **bryła sztywna** (uogólniona)

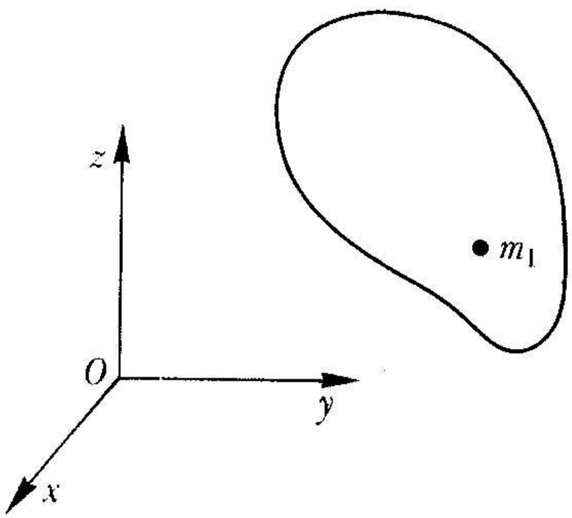
Bryła sztywna

Naogół ciałem sztywnym nazywamy ciało makroskopowe,
które nie podlega deformacjom - wszystkie punkty mają względem siebie stałe odległości.

Położenie

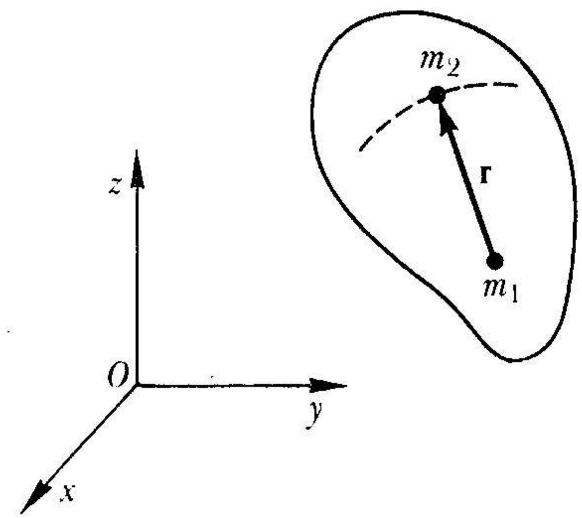
Aby jednoznacznie określić położenie bryły sztywnej w przestrzeni, trzeba określić:

położenie wybranego punktu
np. środka masy



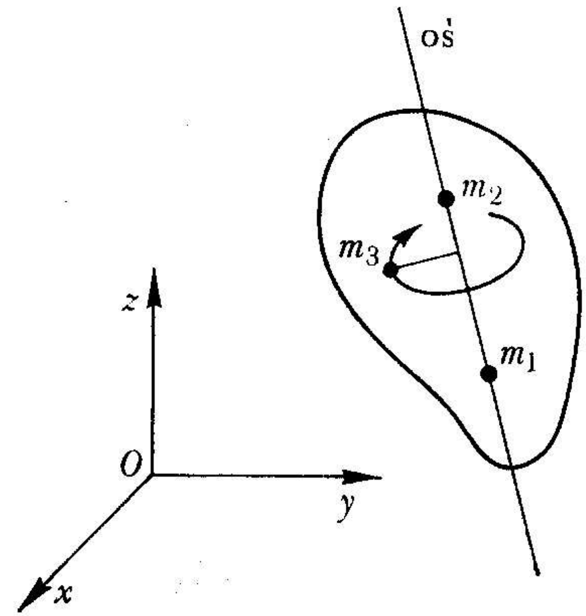
3 parametry
(stopnie swobody)

położenie drugiego punktu



2 parametry
(położenie na sferze)

położenie trzeciego punktu



1 parametr (położenie na okręgu)

$\Rightarrow$ łącznie mamy 6 stopni swobody

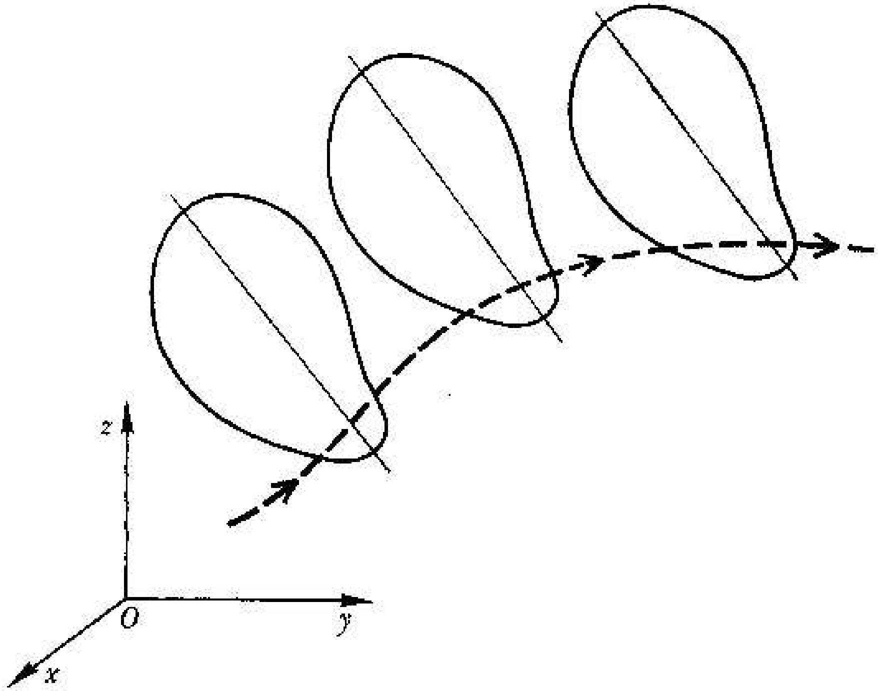
Opis ruchu

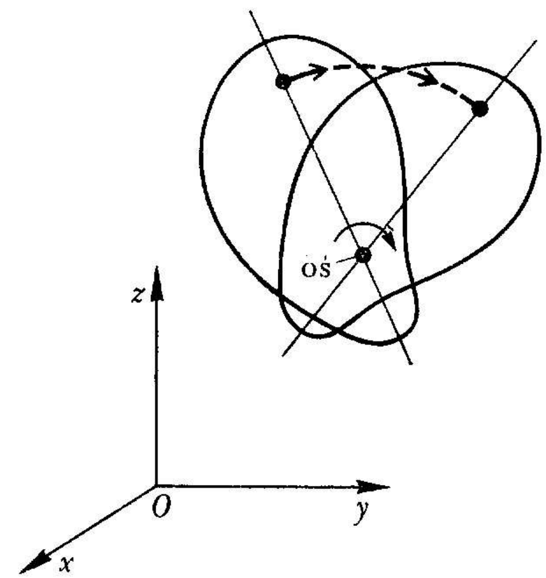
Położenie bryły sztywnej opisują 3 współrzędne i 3 kąty

Złożenie ruchów

Ogólny ruch (zmianę położenia) można przedstawić jako złożenie

ruchu postępowego oraz ruchu obrotowego





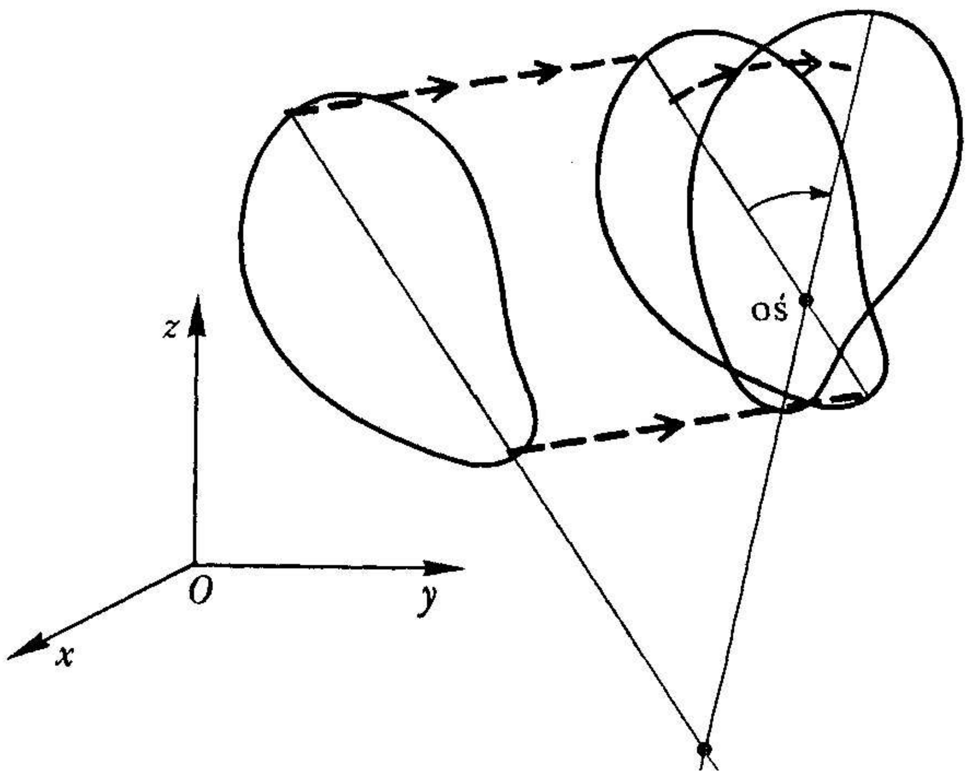
wszystkie punkty poruszają się po okręgach

wektory prędkości są takie same dla wszystkich punktów

Opis ruchu

Chwilowa oś obrotu

Czasami złożenie ruchu postepowego i obrotowego (wzgledem np. środka masy) można przedstawić jako ruch obrotowy względem chwilowej osi obrotu



chwilowa oś obrotu ↑

$$\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \left(\vec{r}_i - \vec{R}\right)$$

Jeśli $\vec{V}_{CM} \perp \vec{\omega}$ wtedy:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \left(\vec{r}_i - \vec{R}'\right)$$

$\vec{R}'$ - położenie chwilowej osi obrotu (zmienne w czasie)

Opis ruchu

Więzy

Ruch bryły sztywnej w ogólnym przypadku opisuje kolejnych 6 parametrów (np. prędkość środka masy i prędkość kątowa w układzie środka masy)

W wielu zagadnieniach ruch bryły sztywnej jest jednak ogranicznony przez więzy:

- koło obracające się na nieruchomej osi $\Rightarrow$ jeden stopień swobody (kąt obrotu)
- walec toczący się bez poślizgu $\Rightarrow$ jeden st. swobody (kąt obrotu **lub** przesunięcie)
- walec toczący się z poślizgiem $\Rightarrow$ dwa stopnie swobody (kąt obrotu **i** przesunięcie)
- kulka toczące się bez poślizgu $\Rightarrow$ trzy stopnie swobody (trzy składowe $\vec{\omega}$)

W rozwiązywaniu zagadnień kluczowe jest zrozumienie jakie są stopnie swobody

Obecność więzów oznacza też obecność sił reakcji więzów...

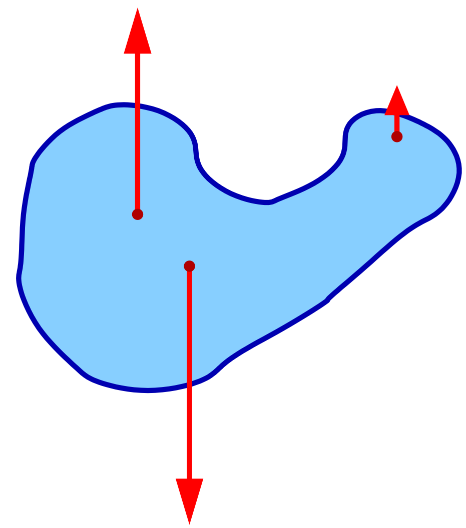
Statyka

Warunek równowagi

Bryła sztywna pozostaje nieruchoma, wtedy i tylko wtedy, gdy działające na nią siły i momenty sił równoważą się:

$$\vec{F}^{zw} = \sum_i \vec{F}_i^{zw} = 0 \iff \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

$$\vec{M}^{zw} = \sum_i \vec{M}_i^{zw} = 0 \iff \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$



Jeśli $\vec{F}^{zw} = 0$ to wypadkowy moment sił względem każdej osi jest taki sam ! (wystarczy sprawdzić raz)

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{R}$$

$$\vec{M}' = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{M}$$

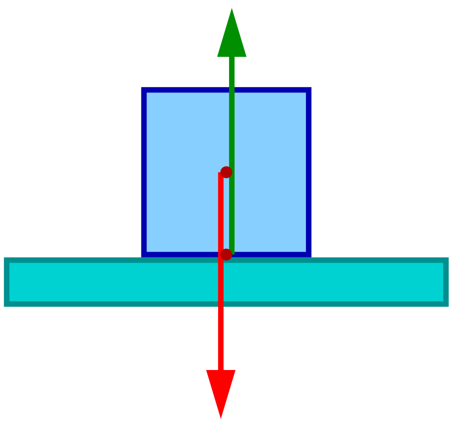
Siłami z którymi naogół bedziemy mieli do czynienia są siła ciężkości i siły reakcji więzów

Statyka

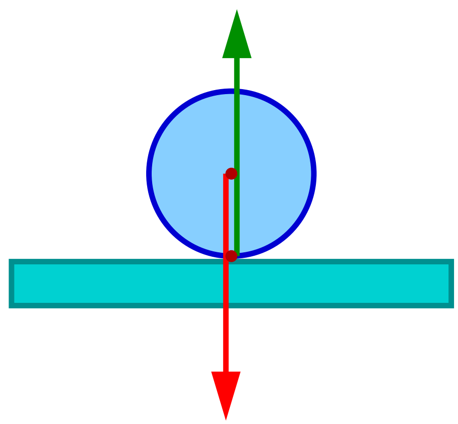
Równowaga

Nawet jeśli warunek $\vec{F}^{zw} = \vec{M}^{zw} = 0$ jest spełniony, równowaga może być:

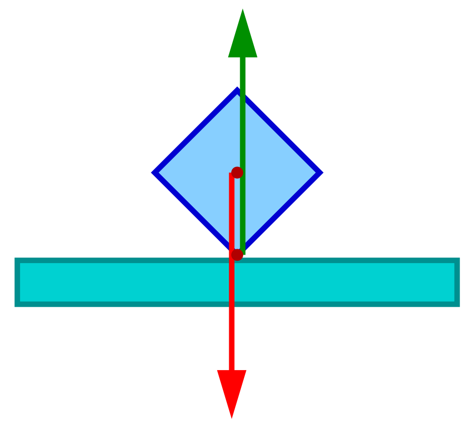
trwała



obojętna



chwiejna



Nieznaczne (infintezymalne) wychylenie bryły z położenia równowagi powoduje:

pojawienie się siły wypadkowej (momentu siły) przywracającej równowagę

zmianę położenia równowagi

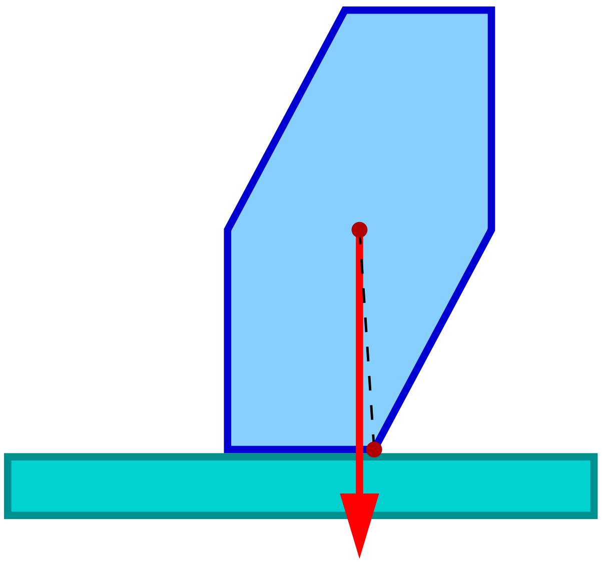
pojawienie się siły wypadkowej zwiększającej wychylenie

Statyka

Przykład I

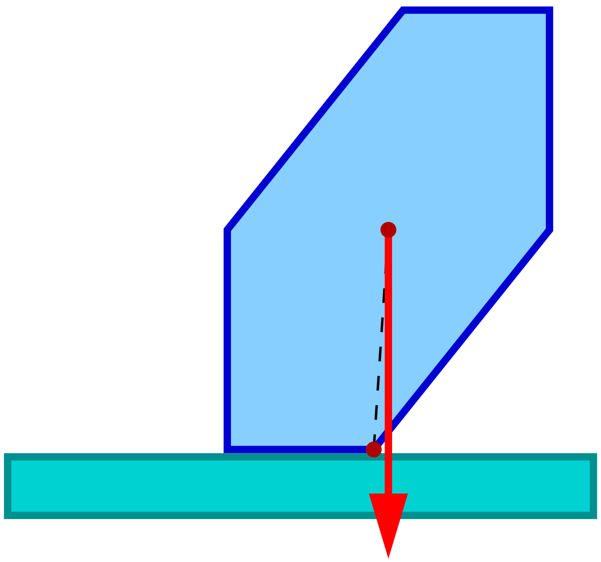
Warunkiem równowagi trwałej dla wielościanu (ustawionego na poziomej powierzchni, pod działaniem siły ciężkości) jest aby pion wypuszczony ze środka ciężkości przechodził przez podstawę.

Równowaga trwała



Moment siły ciężkości "dociska" bryłę do powierzchni

Brak równowagi

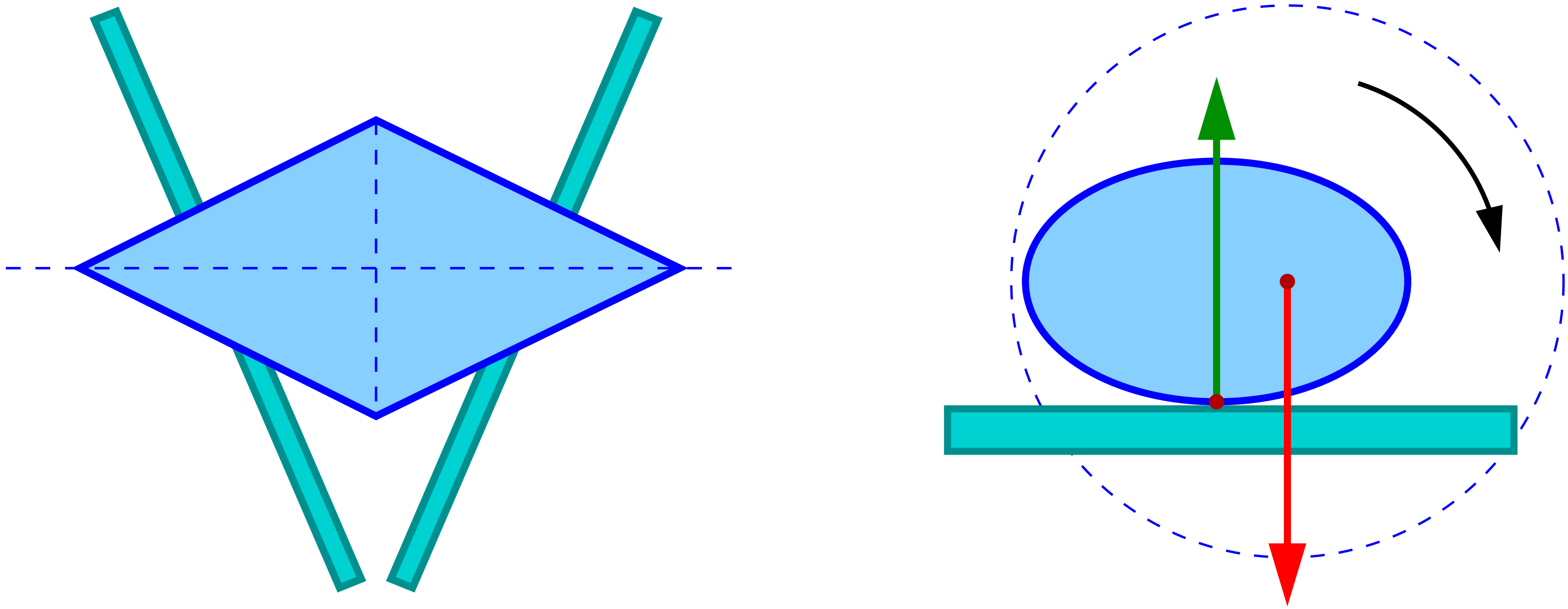


Moment siły ciężkości wywraca bryłę

Statyka

Przykład II

Dwu-stożek położony na nierównoległych szynach:



Gdy szyny są poziome, stożek będzie się poruszał w kierunku szerszego końca.

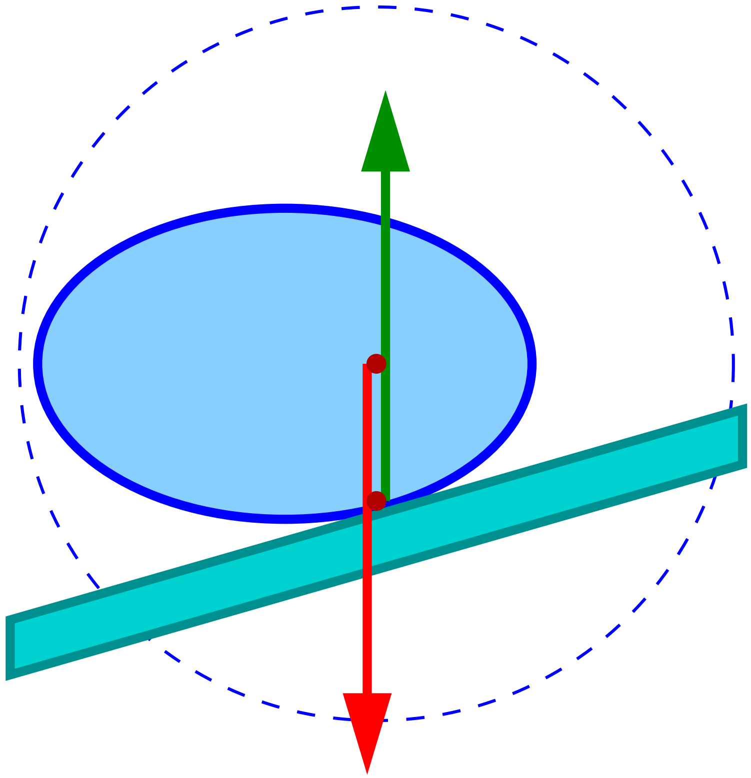
Siła ciężkości i reakcji szyn się równoważą, ale wypadkowy moment sił nie będzie zerowy.

Szyny stykają się ze stożkiem wzdłuż łuku elipsy z osią stożka (środkiem masy) w jednym z ognisk...

Statyka

Przykład II

Równowagę osiągniemy gdy szyny będą pochylone pod odpowiednim kątem
(szerszy koniec wyżej)



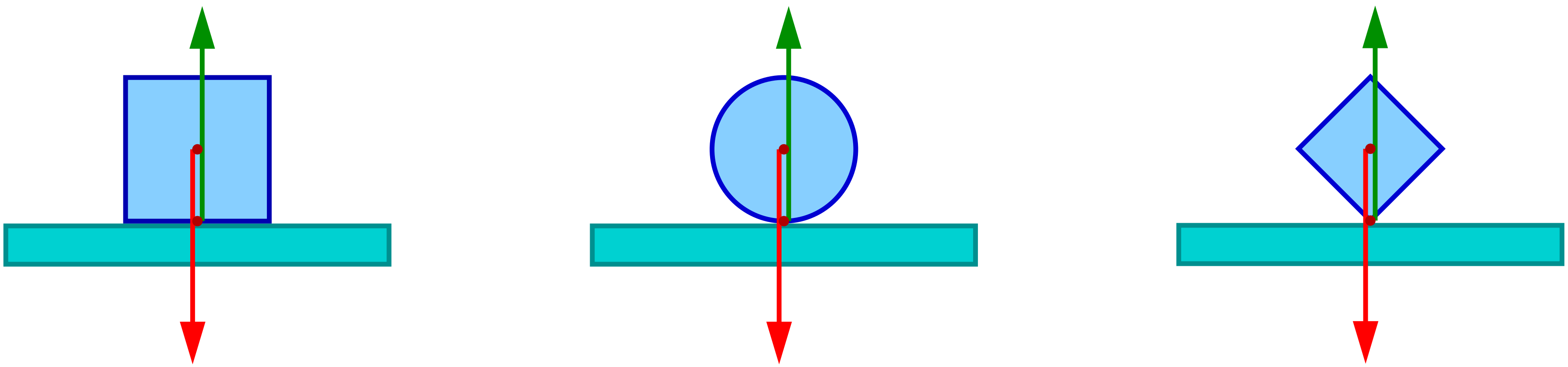
Oś stożka pozostaje cały czas na tej samej wysokości ($E_p = const$)

Statyka

Równowaga

Równowaga bryły na którą działa siła ciężkości i siły reakcji można sklasyfikować patrząc na położenie środka masy (energię potencjalną): $(\vec{F} = -\mathrm{grad} E_p)$

równowaga trwała | obojętna | chwiejna



Nieznaczne (infintezymalne) wychylenie bryły z położenia równowagi powoduje:

podniesienie środka masy wzrost energii potencjalnej	brak zmian położenia środka masy	obniżenie środka masy zmniejszenie energii potencjalnej

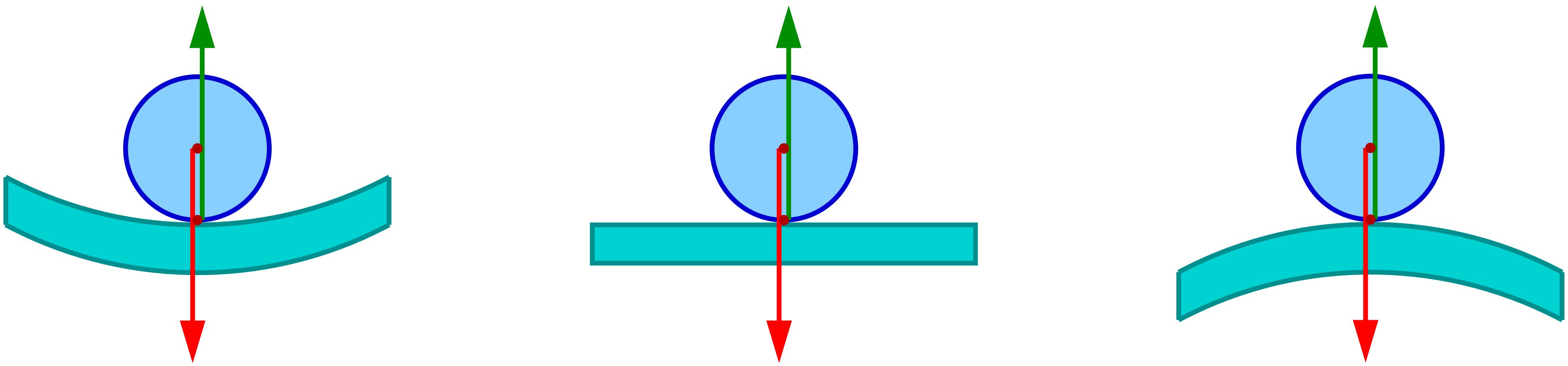
Statyka

Równowaga

Zmiana położenia środka masy, przy wychyleniu z położenia równowagi, zależy od kształtu bryły, ale także od charakteru więzów.

Np: równowaga kuli zależy od kształtu powierzchni na której leży

równowaga trwała   obojętna   chwiejna



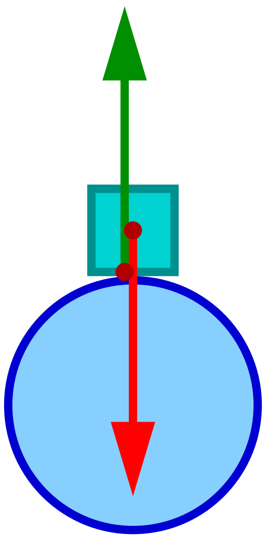
Typ równowagi zależy od zmiany położenia środka masy $(\vec{F} = -\mathrm{grad} E_p)$

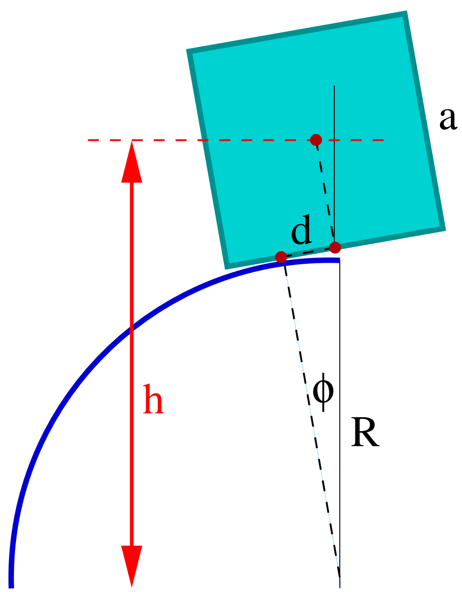
Statyka

Równowaga

Kryterium zmiany położenia środka masy $\Rightarrow$ energii potencjalnej
ma zastosowanie także w bardziej ogólnych przypadkach

Np: sześcian ustawiony na kuli





Położenie środka masy sześcianu
(nad środkiem kuli):

$$h = R\cos\phi + d\sin\phi + \frac{1}{2}a\cos\phi$$

$$d = R\,\phi$$

$$h = \left(R + \frac{a}{2}\right)\cos\phi + R\,\phi\,\sin\phi$$

w przybliżeniu małych kątów:

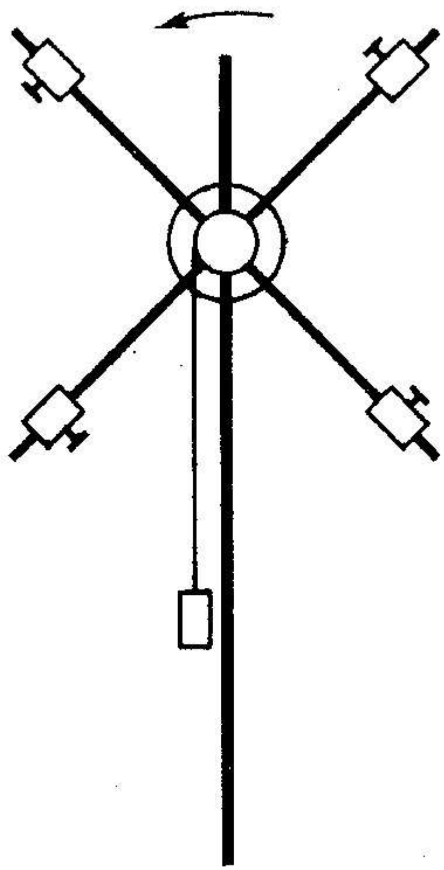
$\sin\phi \approx \phi$, $\cos\phi \approx 1 - \frac{1}{2}\phi^2$

$$h = \left(R + \frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(R - \frac{a}{2}\right)\cdot\phi^2$$

Równowaga trwała jeśli $R > \frac{a}{2}$

Prawa ruchu

Obrót wokół ustalonej osi



Dla bryły sztywnej obracającej się wokół ostalonej osi mement pędu (skalarnie):

$$L \;=\; \omega \sum_i m_i \, r_{\perp\, i}^2 \;=\; \omega \; I \qquad\qquad \omega = \frac{d\phi}{dt}$$

$r_{\perp\, i}$ - odległość masy i od osi obrotu,
I - moment bezwładności **względem wybranej osi**.

Pod wpływem stałego momentu siły M:

$$M \;=\; \frac{dL}{dt} \;=\; \frac{d\omega}{dt} \sum_i m_i \, r_{\perp\, i}^2 = \varepsilon \; I$$

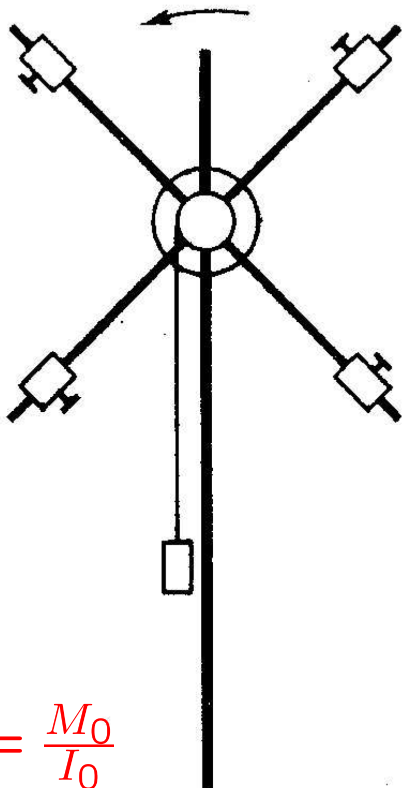
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad - \quad \text{przyspieszenie kątowe}$$

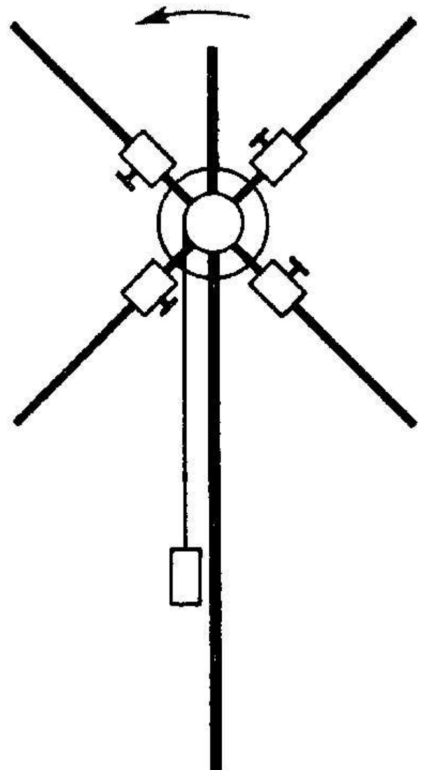
$$\Rightarrow \quad \varepsilon \;=\; \frac{M}{I} = \text{const}$$

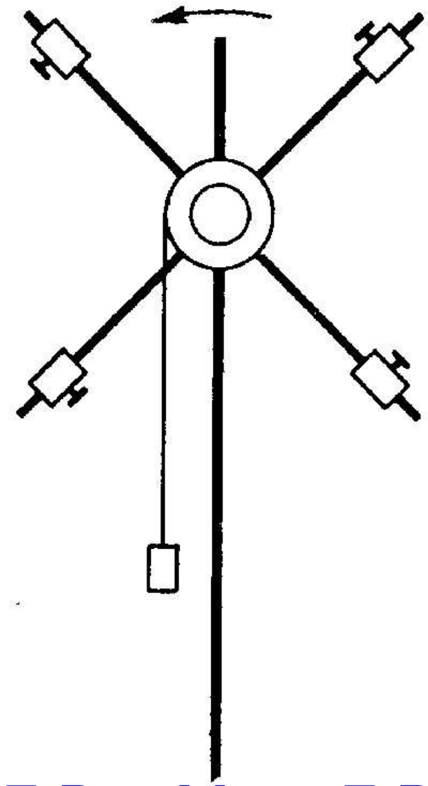
ruch jednostajnie przyspieszony (dla I=const)

Prawa ruchu

Ruch jednostajnie przyspieszony







$\varepsilon_0 = \frac{M_0}{I_0}$

$I_0 \approx 4mr_0^2$

$I \approx 4mr^2 < 4mr_0^2$

$\Rightarrow \varepsilon = \frac{M_0}{I} > \varepsilon_0$

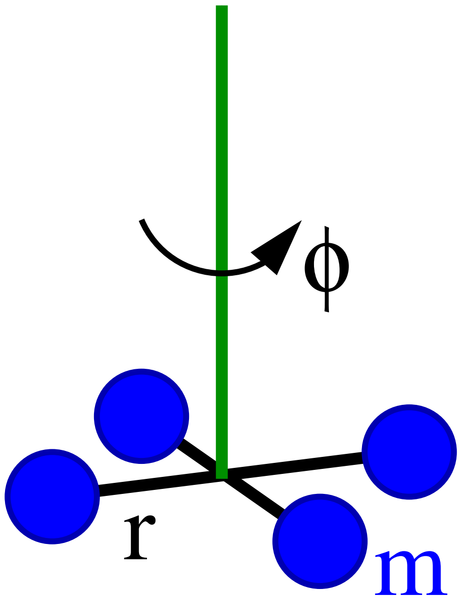
$M = F\,R > M_0 = F\,R_0$

$\Rightarrow \varepsilon = \frac{M}{I_0} > \varepsilon_0$

położenie ciężarka: $h = \phi \cdot R$

Prawa ruchu

Ruch harmoniczny



Moment siły zależy od kąta skręcenia pręta ϕ:

$$M = -\xi\,\phi$$

ξ - współczynnik “sprężystości”
moment siły ma znak przeciwny do skręcenia

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\,I = \frac{d^2\phi}{dt^2}\,I$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{\xi}{I}\,\phi$$

równanie oscylatora harmonicznego.
Częstość drgań:

$$\nu = \sqrt{\frac{\xi}{I}} = \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sum_i m_i\, r_{\perp\, i}^2}} \approx \frac{\sqrt{\xi}}{2r\sqrt{m}}$$