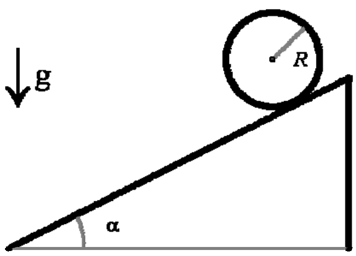
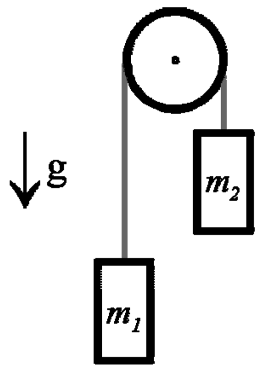
## Zadania na ćwiczenia, Fizyka 1 (Mechanika), Seria 9
## (Dynamika bryły sztywnej)

*Przygotował Lech Krysiński (25.11.2009)*

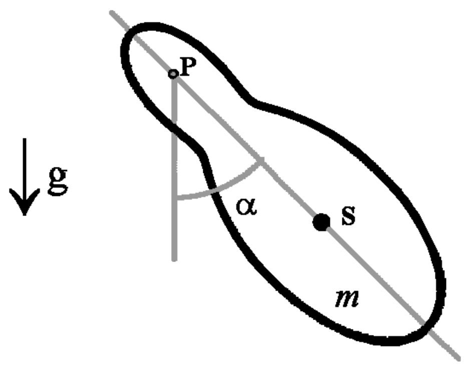
**Zadanie 1**
Jednorodny walec o promieniu $R$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia $\alpha$. Policzyć przyspieszenie z jakim porusza się środek masy walca wzdłuż powierzchni równi zakładając, że toczenie jest bezstratne, a natężenie pola siły ciężkości wynosi $g$. Zadanie rozwiązać dwiema drogami: za pomocą bilansu sił i ich momentów oraz poprzez bilans energii.




**Zadanie 2**
Dwa klocki, pierwszy o masie $m_1$ i drugi o masie $m_2$, powiązane są wiotką, nierozciągliwą i nieważką nicią, którą przewieszono przez krążek bloczka, który ma masę $M$, promień $R$ i jest jednorodnym walcem mogącym się swobodnie obracać wokół swej poziomej osi symetrii. Układ znajduje się w jednorodnym polu siły ciężkości o natężeniu $g$. Policzyć przyspieszenie z jakim poruszają się klocki i określić, w którą stronę (zależnie od proporcji ich mas) następuje ten ruch, jeśli układ początkowo spoczywał.




**Zadanie 3** (*Wahadło fizyczne jednowymiarowe*)
Jednowymiarowe wahadło fizyczne o masie $m$ ma postać bryły sztywnej, która może się obracać jedynie wokół jednej poziomej osi **P**, której pozycja przestrzenna jest niezmienna. Odległość środka masy wahadła **S** od osi **P** wynosi $L$, moment bezwładności bryły względem osi rotacji wynosi $I$, a układ znajduje się w polu siły ciężkości o natężeniu $g$. Wprowadzając zmienną kątową $\alpha$ opisującą odchylenie wahadła od pozycji jego stabilnej równowagi, napisać równanie ruchu wahadła. Znaleźć częstość wahań układu używając przybliżenia zakładającego, że amplituda tych wahań jest mała $\alpha << 1$.



**Zadanie 4**
Policzyć moment bezwładności jednorodnego krążka o masie $m$, promieniu $R$, względem osi przechodzącej przez środek masy

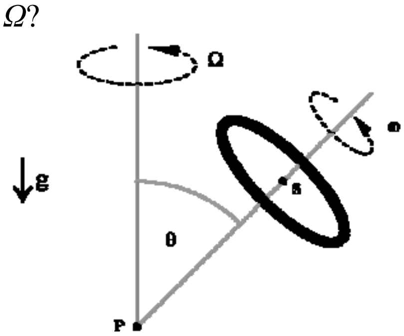
a) wzdłuż osi symetrii obrotowej
b) prostopadle do osi symetrii

**Zadanie 5 (nieobowiązkowe dla kierunków fizyka medyczna i neuroinformatyka)**
Policzyć moment bezwładności jednorodnego walca o masie $m$, promieniu $R$ i wysokości $H$, względem osi przechodzącej przez środek masy

a) wzdłuż osi symetrii obrotowej
b) prostopadle do osi symetrii

**Zadanie 6**
Policzyć moment bezwładności jednorodnej kuli o masie $m$ i promieniu $R$ względem osi przechodzącej przez jej środek masy.

**Zadanie 7** (*Żyroskop*)
Żyroskop ma postać osiowosymetrycznej bryły sztywnej zamocowanej w punkcie **P**, leżącym na osi symetrii w odległości $L$ od środka masy bryły **S** w ten sposób, że bryła może wirować wokół swojej osi, a oś może swobodnie zmieniać kierunek w przestrzeni, przy czym odległość środka masy bryły od punktu zaczepienia nie zmienia się. Moment bezwładności tak zamocowanej bryły względem jej osi symetrii wynosi $I_C$, zaś momenty względem osi prostopadłych do osi symetrii i przechodzących przez punkt zaczepienia wynoszą $I_A$. Szczególne rozwiązanie równań ruchu (*precesja regularna*) ma postać taką, że bryła szybko wiruje wokół osi symetrii, a oś wykonuje relatywnie powolny, jednostajny obrót wokół pionu, zachowując przy tym stały kąt odchylenia od pionu (precesja). Znaleźć częstość $\Omega$ precesyjnego ruchu osi, jeśli częstość wirowania wokół osi ma wartość $\omega$, odchylenie osi od pionu wynosi $\theta$, pole ma natężenie $g$, a masa bryły wynosi $m$. Jaka jest częstość precesji w granicy szybkiego wirowania bryły $\omega >> \Omega$?




**Zadanie 8 (nieobowiązkowe dla kierunków fizyka medyczna i neuroinformatyka)**
(*Najprostsza bryła sztywna, macierz momentów bezwładności*)
Bryła sztywna składa się z jednego punktu o masie $m$, który jest zakotwiczony w punkcie **P**, tzn. jego odległość od punktu **P** nie może się zmieniać i wynosi $R$. Zaczepiając układ współrzędnych w punkcie **P** i kierując oś $z$ w stronę punktu materialnego (układ związany z bryłą), punkt materialny ma w nim pozycję $(0, 0, R)$.

a) Policzyć momenty bezwładności $I_x$, $I_y$, $I_z$ bryły (czyli punktu) względem osi $\boldsymbol{e_x}$, $\boldsymbol{e_y}$, $\boldsymbol{e_z}$ oraz pokazać, że moment pędu $\boldsymbol{J}$ odpowiadający wirowaniu z częstością $\boldsymbol{\omega}=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$ można zapisać jako $(I_x\,\omega_x, I_y\,\omega_y, I_z\,\omega_z) = [\boldsymbol{I}]\,\boldsymbol{\omega}$.
b) Policzyć jak wygląda postać momentu pędu odpowiadającego częstości $\boldsymbol{\omega}$ w sytuacji dowolnie innego skierowania osi układu współrzędnych, czyli gdy położenie punktu materialnego w układzie bryły ma postać $(R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)$. Zapisać tę postać w formie iloczynu macierzy $[\boldsymbol{I}]$ oraz wektora $\boldsymbol{\omega}$.
c) Kiedy postać ta jest diagonalna, czyli analogiczna do przypadku a).