

# Ćwiczenia – seria X

Przygotował: J. Ciborowski

**Treść:** Transformacja Lorentza w zapisie macierzowym, analogia do macierzy obrotów, wykres Minkowskiego, składanie transformacji Lorentza, dodawanie prędkości, interwał czasoprzestrzenny, przyczynowość, względność jednoczesności

## 1. Wykres Minkowskiego w przypadku nierelatywistycznym – transformacja Galileusza

Niech będzie dany układ odniesienia  $U$ . Statek kosmiczny porusza się w tym układzie z prędkością  $V$  wzdłuż osi  $x$ . Niech ze statkiem związany będzie układ odniesienia  $U'$ . Narysuj odpowiedni wykres Minkowskiego w przypadku nierelatywistycznym i na podstawie analizy tego wykresu przedyskutuj transformację Galileusza.

## 2. Wykres Minkowskiego w przypadku relatywistycznym – transformacja Lorentza

Dane są układy odniesienia jak w poprzednim zadaniu a w każdym układzie znajduje się obserwator.

- Narysuj odpowiedni wykres Minkowskiego w przypadku relatywistycznym, który uwzględniałby stałość prędkości światła względem dowolnego inercyjnego układu odniesienia.
- Przedyskutuj transformację Lorentza wychodząc z transformacji Galileusza: zakładając symetrię nowej transformacji względem współrzędnych  $(ct, x)$  oraz  $(ct', x')$  i wprowadzając i wyznaczając czynnik skalujący jednostki na osiach (jest to oczywiście znany czynnik  $\gamma$ ).

## 3. Transformacja Lorentza w zapisie macierzowym i pewne jej własności

- Zapisz transformację Lorentza przy pomocy macierzy. Podaj podstawowe własności tej macierzy.
- Pokaż, że transformację Lorentza można również zapisać w postaci:

$$dt' = -dx \sinh \theta + dt \cosh \theta \quad dx' = dx \cosh \theta - dt \sinh \theta \quad (1)$$

gdzie  $\tanh \theta = V/c$ .

- Porównaj transformację obrotu i transformację Lorentza i przedyskutuj transformacje jednostek na osiach w obu wypadkach.

#### 4. Składanie prędkości – składowe podłużne

Statek kosmiczny wroga porusza się radialnie ku Ziemi z prędkością  $V = 0.4c$ . Wrogowie wystrzelują do przodu (czyli ku Ziemi) rakietę z prędkością  $u = 0.8c$  względem układu odniesienia związanego z tym statkiem. Jaka jest prędkość tej rakiety w układzie odniesienia Ziemi (innymi słowy: z jaką prędkością rakietę ta uderzy w Ziemię)?

#### 5. Składanie prędkości – składowe poprzeczne

Niech dany będzie peron i związany z nim układ odniesienia  $U$  oraz pociąg jadący z prędkością  $V = 100$  m/s i związany z nim układ odniesienia  $U'$ . Na peronie ustawiono pionowo palmę, po której wspina się małpa ze stałą prędkością  $v_y = u = 1$  m/s. Jaką składową pionową prędkości małpy zaobserwuje osoba siedząca w wagonie? Jaka będzie całkowita prędkość małpy, widziana przez tego obserwatora?

#### 6. Jednoczesność, kolejność zdarzeń, interwał czasoprzestrzenny

W układzie odniesienia  $U$  dane są dwa zdarzenia  $P_1$  i  $P_2$  różniące się zarówno współrzędnymi czasowymi jak i przestrzennymi (dla ustalenia uwagi niech  $P_1$  będzie wcześniejsze, a  $P_2$  późniejsze). Zdarzenia te oddzielone są interwałem czasopodobnym. Daj odpowiedź przy pomocy rachunku oraz zilustruj na wykresie Minkowskiego:

- Czy istnieje układ odniesienia  $U'$  w którym te zdarzenia są jednoczesne?
- idem - zachodzą w tym samym miejscu przestrzeni?

#### 7. Obserwator na Ziemi wysłał laserowy impuls w kierunku zwierciadła umieszczonego na powierzchni Księżyca - niech będzie to zdarzenie $P_1$ . Zwierciadło ustawione jest tak, że impuls po odbiciu wraca do detektora, którym dysponuje obserwator.

- Przypadek I. Okazało się, że obserwator zauważył jakiś impuls w detektorze, niech będzie to zdarzenie  $P_2$ , 2 sekundy po wysłaniu tego pierwszego impulsu w kierunku Księżyca. Czy zdarzenia  $P_1$  i  $P_2$  mogą być powiązane przyczynowo?
- Przypadek II. W sekundę po zdarzeniu  $P_1$  na powierzchni Księżyca zaobserwowano błysk światła - niech będzie to zdarzenie  $P_3$ . Czy może istnieć związek przyczynowy między zdarzeniami  $P_1$  i  $P_3$ ? Czy istnieje taki układ inercjalny  $U'$ , w którym zdarzenia  $P_1$  i  $P_3$  są jednoczesne?

Odległość Księżyca od Ziemi wynosi  $D = 384000$  km. Odpowiedzi zilustruj na wykresie Minkowskiego.

#### 8. Jakiś dowcipniś ustawił na poboczu prostego odcinka autostrady ciąg kilkunastu lamp oznaczonych literami A, B, C itd. Odległość między kolejnymi lampami

jest stała i wynosi  $L$ . Każda lampa wyposażona jest w zegar i urządzenie wyzwalające błysk w zadanej chwili czasu. Zegary zostały zsynchronizowane tak, że wskazują ten sam czas. W pewnej chwili wszystkie lampy jednocześnie emitują błysk. Nieodpowiedzialny kierowca porusza się samochodem z nadmierną prędkością  $0 \ll V < c$  wzdłuż wspomnianego ciągu lamp. Opisz to, co widzi. Narysuj odpowiedni wykres Minkowskiego.