Zadanie 1 - (wersja A).

Okręt o masie M = 1200 ton porusza się ruchem jednostajnym, prostoliniowym. W chwili $t_0 = 0$ siłę napędzającą okręt (siłę ciągu) $G = 4\cdot 10^5$ N zredukowano czterokrotnie. Wiedząc, że opór wody T jest proporcjonalny do prędkości okrętu v ($T = -\mu v$,. gdzie $\mu = 8\cdot 10^4 \frac{Ns}{m}$) znajdź:

a) prędkość okrętu v_0 przed redukcją siły ciągu ?
b) zależność prędkości okrętu od czasu od chwili t_0.
c) czas, po którym nastąpi dwukrotne zmniejszenie prędkości okrętu, licząc od chwili t_0 ?

Uwaga: dokonując obliczeń należy liczby niewymierne typu *e*, *π*, *ln(15),* 4/3 itd pozostawić bez podawania ich wartości w postaci liczby dziesiętnej. Pełne rozwiązanie zadania, poza obliczeniami, powinno zawierać także rachunek jednostek.

Rozwiązanie:

a) Przed redukcją mocy silników ruch okrętu odbywał się z prędkością $\boxed{v_0 = \frac{G}{\mu} = \frac{4\cdot 10^5 N}{8\cdot 10^4 \frac{Ns}{m}} = 5\frac{m}{s}}$,

którą można wydedukować z równania ruchu, kładąc $\frac{dv}{dt} = 0$.

b) Oznaczamy F – zredukowana siła ciągu silników (dla t<t$_0$ siła ciągu – $G = 4F$). Równanie ruchu:

$M\frac{dv}{dt} = -T + F = -\mu v + F$, stąd $\frac{dv}{\frac{F}{M} - \frac{\mu}{M}v} = dt$, i dalej $\int \frac{dv}{\frac{F}{M} - \frac{\mu}{M}v} = t + C$.

Podstawienie: $u = \frac{F}{M} - \frac{\mu}{M}v$, skąd $du = -\frac{\mu}{M}dv$, i $dv = -\frac{M}{\mu}du$, więc

$\int \frac{dv}{\frac{F}{M} - \frac{\mu}{M}v} = -\frac{M}{\mu}\int\frac{du}{u} = t + C = -\frac{M}{\mu}\ln\left(\frac{F}{M} - \frac{\mu}{M}v\right)$, i dalej $v = \frac{F}{\mu} - \frac{M}{\mu}\exp\left[-\frac{\mu}{M}(t + C)\right]$, lub

$v = \frac{F}{\mu} - \frac{M}{\mu}A\exp\left[-\frac{\mu}{M}t\right]$, gdzie A – pewna stała. W chwili początkowej, dla $t_0 = 0$, przy pełnej mocy silników ($G = 4F$), prędkość okrętu wynosi $v_0 = \frac{G}{\mu} = \frac{4F}{\mu} = \frac{F}{\mu} - \frac{M}{\mu}A$, więc $A = -\frac{3F}{M}$ i w końcu: $\boxed{v = \frac{F}{\mu}\left(1 + 3\exp\left[-\frac{\mu}{M}t\right]\right) = \frac{G}{4\mu}\left(1 + 3\exp\left[-\frac{\mu}{M}t\right]\right)}$

c) Po jakim czasie nastąpi dwukrotne zmniejszenie prędkości okrętu ?

$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{2} = \frac{\frac{F}{\mu}\left(1 + 3\exp\left[-\frac{\mu}{M}t_{1/2}\right]\right)}{\frac{4F}{\mu}} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\exp\left[-\frac{\mu}{M}t_{1/2}\right]$, więc $\frac{3}{4}\exp\left[-\frac{\mu}{M}t_{1/2}\right] = \frac{1}{4}$ i dalej

$\exp\left[-\frac{\mu}{M}t_{1/2}\right] = \frac{1}{3}$, a w końcu $\boxed{t_{1/2} = \frac{M}{\mu}\ln(3)}$.

Podstawiając dane: $\boxed{t_{1/2} = \frac{1.2\cdot 10^6 kg}{8\cdot 10^4 \frac{Ns}{m}}\ln(3) = 15\ln(3)\frac{kg}{\frac{kgm}{s^2}\cdot\frac{s}{m}} = 15\ln(3)s}$

Zadanie 1 (wersja B).

Okręt o masie M = 1600 ton porusza się ruchem jednostajnym, prostoliniowym. W chwili $t_0 = 0$ siłę napędzającą okręt (siłę ciągu) $G = 2\cdot 10^5$ N zwiększono pięciokrotnie. Wiedząc, że opór wody T jest proporcjonalny do prędkości okrętu v ($T = -\mu v$, *gdzie* $\mu = 8\cdot 10^4 \frac{Ns}{m}$) znajdź:

d) prędkość okrętu v_0 przed zwiększeniem siły ciągu ?
e) zależność prędkości okrętu od czasu od chwili t_0.
f) czas, po którym nastąpi dwukrotne zwiększenie prędkości okrętu, licząc od chwili t_0 ?

Uwaga: dokonując obliczeń należy liczby niewymierne typu e, π, *ln(15),* 4/3 itd pozostawić bez podawania ich wartości w postaci liczby dziesiętnej. Pełne rozwiązanie zadania, poza obliczeniami, powinno zawierać także rachunek jednostek.

Rozwiązanie:

a) Przed zwiększeniem mocy silników ruch okrętu odbywał się z prędkością $\boxed{v_0 = \frac{G}{\mu} = \frac{2\cdot 10^5 N}{8\cdot 10^4 \frac{Ns}{m}} = 2.5\frac{m}{s}}$, którą można wydedukować z równania ruchu, kładąc $\frac{dv}{dt} = 0$.

b) Oznaczamy F – zwiększona siła ciągu silników (dla t<t_0 siła ciągu – $G = F/5$). Równanie ruchu:

$M\frac{dv}{dt} = -T + F = -\mu v + F$, stąd $\frac{dv}{\frac{F}{M} - \frac{\mu}{M}v} = dt$, i dalej $\int \frac{dv}{\frac{F}{M} - \frac{\mu}{M}v} = t + C$.

Podstawienie: $u = \frac{F}{M} - \frac{\mu}{M}v$, skąd $du = -\frac{\mu}{M}dv$, i $dv = -\frac{M}{\mu}du$, więc

$\int \frac{dv}{\frac{F}{M} - \frac{\mu}{M}v} = -\frac{M}{\mu}\int \frac{du}{u} = t + C = -\frac{M}{\mu}\ln\left(\frac{F}{M} - \frac{\mu}{M}v\right)$, i dalej $v = \frac{F}{\mu} - \frac{M}{\mu}\exp\left[-\frac{\mu}{M}(t + C)\right]$, lub

$v = \frac{F}{\mu} - \frac{M}{\mu}A\exp\left[-\frac{\mu}{M}t\right]$, gdzie A – pewna stała. W chwili początkowej, dla $t_0 = 0$, przy małej mocy silników ($G = F/5$), prędkość okrętu wynosi $v_0 = \frac{G}{\mu} = \frac{F}{5\mu} = \frac{F}{\mu} - \frac{M}{\mu}A$, więc $A = \frac{4F}{5M}$ i w końcu: $\boxed{v = \frac{F}{\mu}\left(1 - \frac{4}{5}\exp\left[-\frac{\mu}{M}t\right]\right) = \frac{5G}{\mu}\left(1 - \frac{4}{5}\exp\left[-\frac{\mu}{M}t\right]\right)}$

c) Po jakim czasie nastąpi dwukrotne zwiększenie prędkości okrętu ?

$\frac{v}{v_0} = 2 = \frac{\frac{F}{\mu}\left(1 - \frac{4}{5}\exp\left[-\frac{\mu}{M}t_{1/2}\right]\right)}{\frac{F}{5\mu}} = 5 - 4\exp\left[-\frac{\mu}{M}t_{1/2}\right]$, więc $4\exp\left[-\frac{\mu}{M}t_{1/2}\right] = 3$ i dalej

$\exp\left[-\frac{\mu}{M}t_{1/2}\right] = \frac{3}{4}$, a w końcu $\boxed{t_{1/2} = \frac{M}{\mu}\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$.

Podstawiając dane: $\boxed{t_{1/2} = \frac{1.6\cdot 10^6 kg}{8\cdot 10^4 \frac{Ns}{m}}\ln\left(\frac{4}{3}\right) = 20\ln\left(\frac{4}{3}\right)\frac{kg}{\frac{kgm}{s^2}\cdot\frac{s}{m}} = 20\ln\left(\frac{4}{3}\right)s}$

Zadanie 2 (wersja A)

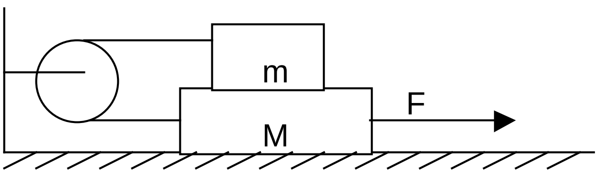
Jaką siłę F należy przyłożyć do masy M = 2000 g w układzie przedstawionym na rysunku, aby poruszała się ona z przyśpieszeniem a = 5 m/s^2, jeżeli:

a) siła tarcia działa tylko między masą m = 3 kg i masą M, a współczynnik tarcia kinetycznego wynosi $\mu_1 = 0.3$;

b) siła tarcia działa między masą m i masą M (współczynnik tarcia kinetycznego wynosi $\mu_1 = 0.3$) oraz między podłożem a masą M (współczynnik tarcia kinetycznego wynosi $\mu_2 = 0.4$).

c) Ile wynosi maksymalna wartość siły F, dla której układ pozostaje w spoczynku jeśli uwzględnimy tarcie pomiędzy masa M i m oraz pomiędzy masą M a podłożem? Współczynniki tarcia statycznego pomiędzy:
   - masą M a m wynosi $f_1 = 0.6$,
   - masą M a podłożem - $f_2 = 0.8$.

Przyjąć wartość przyspieszenia ziemskiego g = 10 m/s^2. Pełne rozwiązanie zadania, poza obliczeniami, powinno zawierać także rachunek jednostek.



Rozwiązanie:

a)

$$+\begin{cases} aM = F - N - T_1 \\ am = N - T_1 \end{cases}$$

$$a(M+m) = F - 2T_1$$

$$F = a(M+m) + 2\mu_1 mg$$

$$F = 5\frac{m}{s^2}(2+3)kg + 2\cdot 0{,}3\cdot 3kg\cdot 10\frac{m}{s^2} = (25+18)\frac{kgm}{s^2} = 43N$$

b)

$$+\begin{cases} aM = F - N - T_2 - T_1 \\ am = N - T_1 \end{cases}$$

$$a(M+m) = F - 2T_1 - T_1$$

$$F = a(M+m) + 2\mu_1 mg + \mu_2(m+M)g$$

$$F = 5\frac{m}{s^2}(2+3)kg + 2\cdot 0{,}3\cdot 3kg\cdot 10\frac{m}{s^2} + 0{,}4\cdot(2+3)kg\cdot 10\frac{m}{s^2} = (25+18+20)\frac{kgm}{s^2} = 63N$$

c) $\boxed{F = 2f_1 mg + f_2(m+M)g}$

$$F = 2\cdot 0{,}6\cdot 3kg\cdot 10\frac{m}{s^2} + 0{,}8\cdot(2+3)kg\cdot 10\frac{m}{s^2} = (36+40)\frac{kgm}{s^2} = 76N$$

Zadanie 2 (wersja B)

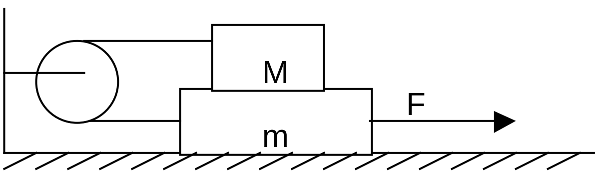
Jaka siłę F należy przyłożyć do masy m = 250 g w układzie przedstawionym na rysunku, aby poruszała się ona z przyśpieszeniem a = 3 m/s^2, jeżeli:

a) siła tarcia działa tylko między masą M = 0.75 kg i masą m, a współczynnik tarcia kinetycznego wynosi $\mu_2 = 0.1$,

b) siła tarcia działa między masą M i masą m (współczynnik tarcia kinetycznego wynosi $\mu_2 = 0.2$) oraz między podłożem a masą m (współczynnik tarcia kinetycznego wynosi $\mu_1 = 0.1$) ?

c) Ile wynosi maksymalna wartość siły F, dla której układ pozostaje w spoczynku jeśli uwzględnimy tarcie pomiędzy masa M i m oraz pomiędzy masą m a podłożem? Współczynniki tarcia statycznego pomiędzy:
   - masą m a M wynosi $f_2 = 0.4$,
   - masą m a podłożem - $f_1 = 0.2$.

Przyjąć wartość przyspieszenia ziemskiego g = 10 m/s^2. Pełne rozwiązanie zadania, poza obliczeniami, powinno zawierać także rachunek jednostek.



Rozwiązanie:

a)

$$\begin{cases} am = F - N - T_2 \\ aM = N - T_2 \end{cases} \; +$$

$$a(M+m) = F - 2T_2$$

$$F = a(M+m) + 2\mu_2 Mg$$

$$F = 3\frac{m}{s^2}(0.75+0.25)kg + 2\cdot 0{,}1\cdot 0.75kg\cdot 10\frac{m}{s^2} = (3+1.5)\frac{kgm}{s^2} = 4.5N$$

b)

$$\begin{cases} am = F - N - T_2 - T_1 \\ aM = N - T_2 \end{cases} \; +$$

$$a(M+m) = F - 2T_2 - T_1$$

$$F = a(M+m) + 2\mu_2 Mg + \mu_1(m+M)g$$

$$F = 3\frac{m}{s^2}(0.75+0.25)kg + 2\cdot 0{,}2\cdot 0.75kg\cdot 10\frac{m}{s^2} + 0{,}1\cdot(0.25+0.75)kg\cdot 10\frac{m}{s^2} = (3+3+1)\frac{kgm}{s^2} = 7N$$

c) $\boxed{F = 2f_2 Mg + f_1(m+M)g}$

$$F = 2\cdot 0{,}4\cdot 0.75kg\cdot 10\frac{m}{s^2} + 0{,}2\cdot(0.75+0.25)kg\cdot 10\frac{m}{s^2} = (6+2)\frac{kgm}{s^2} = 8N$$

Zadanie 3 (wersja A)

W trzech rogach trójkąta równobocznego o boku a = 0.6 m znajdują się 3 pająki. W pewnej chwili zaczynają się one gonić wzajemnie tzn. poruszają się ze stała prędkością v_0 = 5 cm/s skierowaną wzdłuż prostej łączącej danego pająka z poprzedzającym go. Dla dowolnego pająka znaleźć równanie, czas ruchu i równanie toru.

Wskazówka. Początek układu współrzędnych najwygodniej jest umieścić w punkcie przecięcia wysokości trójkąta. Pełne rozwiązanie zadania, poza obliczeniami, powinno zawierać także rachunek jednostek.

Rozwiązanie:

Z symetrii zagadnienia wynika, że kąty między bokami figury, w wierzchołkach której znajdują się pająki są w czasie ruchy zachowane. W związku z tym układ pająków tworzy zmniejszający się i obracający trójkąt równoboczny. Problem rozwiązujemy w układzie biegunowym. Prędkości pająków są zawsze ustawione pod kątem $\alpha = 30^o$ względem promienia wodzącego a ich wartość bezwzględna jest stała.

Składowe prędkości: radialna $\frac{dr}{dt} = v_r = -v_0 \cos\alpha = -v_0 \frac{\sqrt{3}}{2}$,

kątowa $r\frac{d\varphi}{dt} = v_\varphi = v_0 \cos\alpha = \frac{v_0}{2}$.

To są **równania ruchu pająka**.

Tor: $\frac{\frac{dr}{dt}}{r\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{dr}{rd\varphi} = -\sqrt{3}$, więc $\int \frac{dr}{r} = \int -\sqrt{3}d\varphi$, i dalej $\ln(r) = -\sqrt{3}\varphi + C$.

Przekształcając: $r = A\exp\left(-\sqrt{3}\varphi\right)$. Zakładamy, że punkcie startu, pierwszy pająk był umieszczony na osi OX w odległości $r_0 = \frac{a}{\sqrt{3}}$ pod kątem $\varphi_0 = 0$. Czyli $A = \frac{a}{\sqrt{3}}$, i **równanie toru** ma postać:

$\boxed{r = \frac{a}{\sqrt{3}}\exp\left(-\sqrt{3}\varphi\right)}$.

Czas ruchu – to czas przebycia promienia wodzącego. Przy stałej prędkości radialnej:

$\boxed{t = \frac{r_0}{v_r} = 2\frac{a}{v_0} = 2\frac{0.6m}{0.05m/s} = 24s}$.

Zadanie 3 (wersja B)

W sześciu rogach sześciokąta foremnego o boku a = 0.75 m znajduje się 6 pająków. W pewnej chwili zaczynają się one gonić wzajemnie tzn. poruszają się ze stała prędkością v_0 = 2.5 cm/s skierowaną wzdłuż prostej łączącej danego pająka z poprzedzającym go. Dla dowolnego pająka znaleźć równanie ruchu, czas ruchu i równanie toru.

Wskazówka. Początek układu współrzędnych najwygodniej jest umieścić w środku okręgu opisanego na sześciokącie. Pełne rozwiązanie zadania, poza obliczeniami, powinno zawierać także rachunek jednostek.

Rozwiązanie:

Z symetrii zagadnienia wynika, że kąty między bokami figury, w wierzchołkach której znajdują się pająki są w czasie ruchy zachowane. W związku z tym układ pająków tworzy zmniejszający się i obracający sześciokąt foremny. Problem rozwiązujemy w układzie biegunowym. Prędkości pająków są zawsze ustawione pod kątem $\alpha = 60^o$ względem promienia wodzącego a ich wartość bezwzględna jest stała.

Składowe prędkości: radialna $\frac{dr}{dt} = v_r = -v_0 \cos\alpha = -\frac{v_0}{2}$,

kątowa $r\frac{d\varphi}{dt} = v_\varphi = v_0 \sin\alpha = v_0 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

To są **równania ruchu pająka**.

Tor: $\dfrac{\frac{dr}{dt}}{r\frac{d\varphi}{dt}} = \dfrac{dr}{rd\varphi} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, więc $\int \frac{dr}{r} = \int -\frac{1}{\sqrt{3}} d\varphi$, i dalej $\ln(r) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\varphi + C$.

Przekształcając: $r = A\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\varphi\right)$. Zakładamy, że punkcie startu, pierwszy pająk był umieszczony na osi OX w odległości $r_0 = a$ pod kątem $\varphi_0 = 0$. Czyli $A = a$, i **równanie toru** ma postać: $\boxed{r = a\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\varphi\right)}$.

Czas ruchu – to czas przebycia promienia wodzącego. Przy stałej prędkości radialnej: $\boxed{t = \frac{r_0}{v_r} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{a}{v_0} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{0.75m}{0.025m/s} = \frac{36}{\sqrt{3}}s}$.