

1. Przesunięcie dopplerowskie w badaniu echokardiografem

Wersja A

Głowica echokardiografu emituje sinusoidalną falę ultradźwiękową o częstotliwości $f=2,900$ MHz). Fala ultradźwiękowa, przechodzi przez tkankę miękką prędkością $v=1450$ m/s i odbija od przepływającej w aorcie krwi. Krew w aorcie płynie ku głowicy. Głowica echokardiografu zarejestrowała falę odbitą o częstotliwości $f_g=2,902$ MHz. Jaka jest prędkość przepływu krwi w aorcie? Jaka jest długość fali ultradźwiękowej w tkance?

Rozwiązanie:

Długość fali w tkance. $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1450 \text{ m/s}}{2,9 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}} = 0,5 \text{ mm}$

Częstotliwość „widziana” przez czoło strumienia krwi $f_k = \frac{v+v_s}{\lambda} = \frac{v+v_s}{v} f$

Częstotliwość odbierana przez nieruchomą głowicę, gdy źródło o prędkości v_s emituje falę o częstotliwości f_k :

$$\lambda_g = \frac{v-v_s}{f_k} \Rightarrow \frac{v}{f_g} = \frac{v-v_s}{f_k} \Rightarrow f_g = \frac{v}{v-v_s} f_k$$

W rezultacie dostajemy: $f_g = \frac{v}{v-v_s} f_k = \frac{v}{v-v_s} \frac{v+v_s}{v} f \Rightarrow f_g = \frac{v+v_s}{v-v_s} f$

Poszukiwanie v_s gdy dana jest odbierana częstotliwość $f_g=2,902$ MHz wymaga przekształcenia:

$$f_g = \frac{v+v_s}{v-v_s} f \Rightarrow f_g(v-v_s) = f(v+v_s) \Rightarrow v(f_g-f) = v_s(f_g+f) \Rightarrow v_s = v \frac{(f_g-f)}{(f_g+f)}$$

Rezultat liczbowy w przybliżeniu można uzyskać bardzo łatwo (bez kalkulatora)

$$v_s = v \frac{(f_g-f)}{(f_g+f)} \Rightarrow v_s \approx 1450 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{2 \text{ kHz}}{5,8 \text{ MHz}} = 0,5 \text{ m/s}$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Wersja B

Głowica echokardiografu emituje sinusoidalną falę ultradźwiękową o częstotliwości $f=4,350$ MHz). Fala ultradźwiękowa, przechodzi przez tkankę miękką z prędkością $v=1450\text{m/s}$ i odbija od przepływającej w aorcie krwi. Krew w aorcie płynie w kierunku od głowicy.

Głowica echokardiografu zarejestrowała falę odbitą o częstotliwości $f_g=2,347$ MHz. Jaka jest prędkość przepływu krwi w aorcie? Jaka jest długość fali ultradźwiękowej w tkance?

Rozwiązanie:

$$\text{Długość fali w tkance. } \lambda = \frac{v}{f} = \frac{1450\text{ m/s}}{4,35 \cdot 10^6\text{ s}^{-1}} = 0,33\text{ mm}$$

$$\text{Częstotliwość „widziana” przez czoło strumienia krwi } f_k = \frac{v-v_s}{\lambda} = \frac{v-v_s}{v} f$$

Częstotliwość odbierana przez nieruchomą głowicę, gdy oddalające się źródło o prędkości v_s emituje falę o częstotliwości f_k :

$$\lambda_g = \frac{v+v_s}{f_k} \Rightarrow \frac{v}{f_g} = \frac{v+v_s}{f_k} \Rightarrow f_g = \frac{v}{v+v_s} f_k$$

$$\text{W rezultacie dostajemy: } f_g = \frac{v}{v+v_s} f_k = \frac{v}{v+v_s} \frac{v-v_s}{v} f \Rightarrow f_g = \frac{v-v_s}{v+v_s} f$$

Poszukiwanie v_s gdy dana jest odbierana częstotliwość $f_g=2,902\text{MHz}$ wymaga przekształcenia:

$$f_g = \frac{v-v_s}{v+v_s} f \Rightarrow f_g(v+v_s) = f(v-v_s) \Rightarrow v(f-f_g) = v_s(f_g+f) \Rightarrow v_s = v \frac{(f-f_g)}{(f_g+f)}$$

Rezultat liczbowy w przybliżeniu można uzyskać bardzo łatwo (bez kalkulatora)

$$v_s = v \frac{(f-f_g)}{(f_g+f)} \Rightarrow v_s \approx 1450 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{3\text{kHz}}{8,7\text{MHz}} = 0,5\text{ m/s}$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Obydwa zadania można było rozwiązać różnymi metodami. Wszystkie metody prowadzące do prawidłowego wyniku były oceniane w ten sam sposób.

Rozwiązanie, wersji A.

Zadanie to rozwiążemy metodą standardową – znajdując najpierw równanie ruchu, a potem tor. Układ współrzędnych wiążemy z armatą (choć można i z powierzchnią Ziemi, nie zmienia to rozwiązania).

W przyjętym układzie współrzędnych prędkość V ma dwie składowe

$$\begin{cases} v_x = V \cos(\alpha) \\ v_y = V \sin(\alpha) \end{cases}$$

Równania ruchu opisujące ruch pocisku wzdłuż osi x i y są następujące:

$$\begin{cases} x = V \cos(\alpha) t \\ y = V \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Aby znaleźć tor ruchu pocisku, z drugiego równania wyznaczamy czas ruchu i wstawiamy do pierwszego równania:

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v \cos(\alpha)} \\ y = v \sin(\alpha) \frac{x}{v \cos(\alpha)} - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v^2 \cos^2(\alpha)} \end{cases}$$

Poszukujemy teraz takiej współrzędnej x (zasięgu strzału), którą dalej oznaczamy jako l , dla której $y = -h$:

$$\begin{aligned} -h &= v \sin(\alpha) \frac{l}{v \cos(\alpha)} - \frac{1}{2} \frac{g l^2}{v^2 \cos^2(\alpha)} \rightarrow \\ \frac{g l^2}{2 v^2 \cos^2(\alpha)} - t g(\alpha) l - h &= 0 \end{aligned}$$

Znalezienie zasięgu odpowiada zatem znalezieniu pierwiastków powyższego równania kwadratowego.

Obliczamy:

$$\begin{aligned} \Delta &= t g^2(\alpha) + \frac{2 h g}{v^2 \cos^2(\alpha)} \\ l_{1,2} &= \frac{t g(\alpha) \pm \sqrt{t g^2(\alpha) + \frac{2 h g}{v^2 \cos^2(\alpha)}}}{\frac{g l^2}{v^2 \cos^2(\alpha)}} = \frac{v^2 \cos^2(\alpha)}{g} \left(t g(\alpha) \pm \sqrt{t g^2(\alpha) + \frac{2 h g}{v^2 \cos^2(\alpha)}} \right) \end{aligned}$$

W rozważanym przypadku interesuje rozwiązanie ze znakiem „+”:

$$l = \frac{v^2 \cos^2(\alpha)}{g} \left(tg(\alpha) \pm \sqrt{tg^2(\alpha) + \frac{2hg}{v^2 \cos^2(\alpha)}} \right) = \frac{v^2 \sin(2\alpha)}{2g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v^2 \sin^2(\alpha)}} \right)$$

Czas lotu pocisku wyznaczmy korzystając z pierwszego równania:

$$t = \frac{x}{v \cos(\alpha)}$$

Czas lotu na odległość $x = l$ jest równy:

$$t = \frac{\frac{v^2 \sin(2\alpha)}{2g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v^2 \sin^2(\alpha)}} \right)}{v \cos(\alpha)} = \frac{v \sin(\alpha)}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v^2 \sin^2(\alpha)}} \right)$$

Podstawmy dane liczbowe, obliczmy najpierw wyrażenie pod pierwiastkiem:

$$\frac{2hg}{v^2 \sin^2(\alpha)} = \frac{2 \cdot 210m \cdot \frac{10m}{s^2}}{\left(200 \frac{m}{s}\right)^2 \cdot \sin^2(45^\circ)} = \frac{4200}{40000 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{21}{100}$$

$$\sqrt{1 + \frac{21}{100}} = \sqrt{\frac{121}{100}} = \frac{11}{10} = 1,1$$

Reasumując:

$$\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v^2 \cos^2(\alpha)}} \right) = 2,1$$

$$l = \frac{\left(\frac{200m}{s}\right)^2 \sin(2 \cdot 45^\circ)}{2 \cdot 10m/s^2} \cdot 2,1 = \frac{40000 \frac{m^2}{s^2}}{20m/s^2} \cdot 2,1 = 4200m$$

$$t = \frac{200 \frac{m}{s} \sqrt{2}}{10m/s^2} \cdot 2,1 = 21\sqrt{2}s$$

Wersja B.

Zadanie to rozwiążemy metodą standardową – znajdując najpierw równanie ruchu, a potem tor. Układ współrzędnych wiążemy z moździerzem.

W przyjętym układzie współrzędnych prędkość V ma dwie składowe:

$$\begin{cases} v_x = V \cos(\alpha) \\ v_y = V \sin(\alpha) \end{cases}$$

Równania ruchu opisujące ruch pocisku wzdłuż osi x i y są następujące:

$$\begin{cases} x = V \cos(\alpha) t \\ y = V \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Aby znaleźć tor ruchu pocisku, z drugiego równania wyznaczamy czas ruchu i wstawiamy do pierwszego równania:

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v \cos(\alpha)} \\ y = v \sin(\alpha) \frac{x}{v \cos(\alpha)} - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v^2 \cos^2(\alpha)} \end{cases}$$

Poszukujemy teraz takiej współrzędnej x (zasięgu strzału), którą dalej oznaczamy jako l , dla której $y = d$:

$$d = v \sin(\alpha) \frac{l}{v \cos(\alpha)} - \frac{1}{2} \frac{g l^2}{v^2 \cos^2(\alpha)} \rightarrow$$
$$\frac{g l^2}{2 v^2 \cos^2(\alpha)} - t g(\alpha) l + d = 0$$

Znalezienie zasięgu odpowiada zatem znalezieniu pierwiastków powyższego równania kwadratowego.

Obliczamy:

$$\Delta = t g^2(\alpha) - \frac{2 d g}{v^2 \cos^2(\alpha)}$$
$$l_{1,2} = \frac{t g(\alpha) \pm \sqrt{t g^2(\alpha) - \frac{2 d g}{v^2 \cos^2(\alpha)}}}{\frac{g l^2}{v^2 \cos^2(\alpha)}} = \frac{v^2 \cos^2(\alpha)}{g} \left(t g(\alpha) \pm \sqrt{t g^2(\alpha) - \frac{2 d g}{v^2 \cos^2(\alpha)}} \right)$$

W rozważanym przypadku interesuje rozwiązanie ze znakiem „+”:

$$l = \frac{v^2 \cos^2(\alpha)}{g} \left(tg(\alpha) \pm \sqrt{tg^2(\alpha) - \frac{2dg}{v^2 \cos^2(\alpha)}} \right) = \frac{v^2 \sin(2\alpha)}{2g} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2dg}{v^2 \sin^2(\alpha)}} \right)$$

Czas lotu pocisku wyznaczymy korzystając z pierwszego równania:

$$t = \frac{x}{v \cos(\alpha)}$$

Czas lotu na odległość $x = l$ jest równy:

$$t = \frac{\frac{v^2 \sin(2\alpha)}{2g} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2dg}{v^2 \sin^2(\alpha)}} \right)}{v \cos(\alpha)} = \frac{v \sin(\alpha)}{g} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2dg}{v^2 \sin^2(\alpha)}} \right)$$

Podstawmy dane liczbowe, obliczmy najpierw wyrażenie pod pierwiastkiem:

$$\frac{2dg}{v^2 \sin^2(\alpha)} = \frac{2 \cdot 9,9m \cdot 10m/s^2}{\left(\frac{100m}{s}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{198}{5000} = \frac{99}{2500}$$

$$\sqrt{1 - \frac{99}{2500}} = \sqrt{\frac{2401}{2500}} = \frac{49}{50}$$

Reasumując:

$$\left(1 + \frac{49}{50} \right) = \frac{99}{50}$$

$$l = \frac{\left(\frac{100m}{s}\right)^2}{2 \cdot 10m/s^2} \cdot \frac{99}{50} = \frac{10000}{20} \cdot \frac{99}{50} m = 990m$$

$$t = \frac{100 \frac{m}{s} \frac{\sqrt{2}}{2}}{10m/s^2} \cdot \frac{99}{50} = 9,9\sqrt{2} \sim 10\sqrt{2} \sim 14s$$

Uwagi do rozwiązań i punktacji.

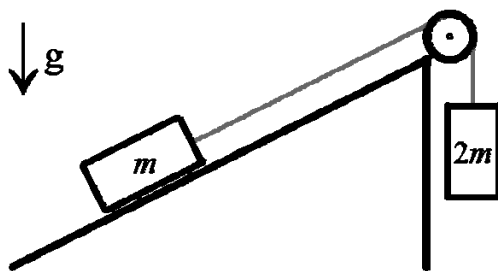
1. Powyżej przedstawiono przykładowe rozwiązania. Przy ocenie rozwiązań były uwzględniane także inne metody, o ile były rozsądne, uzasadnione i prowadziły do poprawnego rozwiązania.
2. Głównym popełnianym błędem było zbyt wczesne podstawienie danych liczbowych, do równań, w szczególności do równania toru:

$$d = v \sin(\alpha) \frac{l}{v \cos(\alpha)} - \frac{1}{2} \frac{g l^2}{v^2 \cos^2(\alpha)}$$

co przy obliczaniu pierwiastków równania kwadratowego prowadziło do „astronomicznych” i zazwyczaj błędnych wyników.

Zadanie 3A

Na równi o kącie nachylenia α , znajduje się klocek o masie m , którego współczynnik tarcia poślizgowego o równię wynosi μ . Do klocka jest przymocowana linka, którą przewieszono przez nieważki i mogący się obracać bez tarcia bęben u szczytu równi, zaś na drugim końcu linki zawieszono drugi klocek o masie $2m$. Początkowo nieruchome klocki spontanicznie zaczęły się poruszać tak, że klocek na równi jest podciągany do góry. Określ z jakim przyspieszeniem porusza się każdy z klocków oraz policz wartość liczbową przyspieszenia, jeśli $\alpha = 45^\circ$, $\mu = 0.1$, zaś $g = 10 \text{ m/s}^2$.

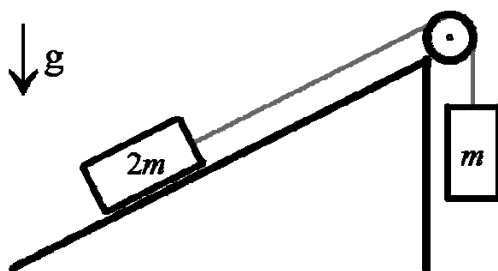


Rozwiązanie

Przyjmujemy, że oś służąca do opisu ruchu klocka leżącego jest skierowana wzdłuż równi i zwrócona pod górę, zaś oś opisująca ruch klocka wiszącego jest skierowana pionowo w dół. Naciąg nitki oznaczamy przez T . Wtedy, w sytuacji statycznej siła naciągu $T = 2 \cdot m \cdot g$ przeważa nad siłą zsuwającą $m \cdot g \cdot \sin \alpha \approx 0.71 \cdot m \cdot g$ i klocek leżący zacznie być podciągany do góry, a równocześnie klocek wiszący zacznie się opuszczać z przyspieszeniem o tej samej wartości, co przyspieszenie klocka leżącego, ale ruch ten zostanie wszczęty, o ile tarcie statyczne μ_s jest wystarczająco małe ($\mu_s < (2 - \sin \alpha) / \cos \alpha \approx 1.83$). Jeśli ruch ten się rozpocznie, bilans składowej siły skierowanej wzdłuż równi, działającej na klocek leżący ma postać: $m \cdot a = T - m \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$, zaś bilans pionowej składowej siły działającej na klocek wiszący ma formę następującą: $2m \cdot a = 2m \cdot g - T$. Rozwiązując tę parę równań względem a dostajemy $a = g \cdot (2 - \sin \alpha - \mu \cos \alpha) / 3 \approx 4.07 \text{ m/s}^2$.

Zadanie 3B

Na równi o kącie nachylenia α , znajduje się klocek o masie $2m$, którego współczynnik tarcia poślizgowego o równię wynosi μ . Do klocka jest przymocowana linka, którą przewieszono przez nieważki i mogący się obracać bez tarcia bęben u szczytu równi, zaś na drugim końcu linki zawieszono drugi klocek o masie m . Początkowo nieruchome klocki spontanicznie zaczęły się poruszać tak, że klocek na równi się zsuwa. Określ z jakim przyspieszeniem porusza się każdy z klocków oraz policz wartość liczbową przyspieszenia, jeśli $\alpha = 45^\circ$, $\mu = 0.1$, zaś $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Rozwiązanie

Przyjmujemy, że oś służąca do opisu ruchu kloka leżącego jest skierowana wzdłuż równi i zwrócona pod górę, zaś oś opisująca ruch kloka wiszącego jest skierowana pionowo w dół. Naciąg nitki oznaczamy przez T . Wtedy, w sytuacji statycznej siła zsuwająca $2m \cdot g \cdot \sin \alpha \approx 1.41 \cdot m \cdot g$ przeważa nad siłą naciągu $T = m \cdot g$ i klocek leżący zacznie się zsuwać, a równocześnie klocek wiszący zacznie być podciągany do góry z przyspieszeniem o tej samej wartości, co przyspieszenie kloka leżącego, ale ruch ten zostanie wszczęty, o ile tarcie statyczne μ_s jest wystarczająco małe ($\mu_s < (2 \sin \alpha - 1) / (2 \cos \alpha) \approx 0.29$). Jeśli ruch ten się rozpocznie, bilans składowej siły skierowanej wzdłuż równi, działającej na klocek leżący ma postać: $2m \cdot a = T - 2m \cdot g \cdot \sin \alpha + \mu \cdot 2m \cdot g \cdot \cos \alpha$, zaś bilans pionowej składowej siły działającej na klocek wiszący ma formę następującą: $m \cdot a = m \cdot g - T$. Rozwiązując tę parę równań względem a dostajemy $a = g \cdot (1 - 2 \sin \alpha + 2 \mu \cos \alpha) / 3 \approx -0.91 \text{ m/s}^2$.