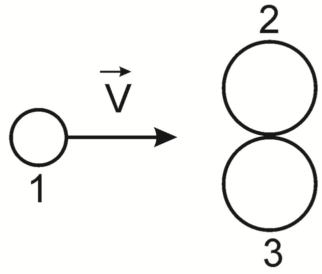
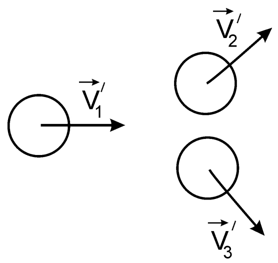
Fizyka I. Kolokwium 11. 01. 2010. Wersja A i B z rozwiązaniami

Zadanie 1. Wersja A

Krążek poruszający się po lodzie z prędkością $V = 4\frac{m}{s}$ uderza jednocześnie w dwa stykające się spoczywające krążki (rysunek). Znaleźć wektory prędkości krążków 1, 2 i 3 po zderzeniu, jeżeli krążki 2 i 3 po zderzeniu poruszają się symetrycznie, pod kątem 45^0 i -45^0, względem kierunku prędkości krążka 1 przed zderzeniem. Wszystkie krążki mają taką samą masę. Zderzenie jest sprężyste, a ruch krążków odbywa się bez wirowania i bez tarcia.



<u>Rozwiązanie wersji A.</u>



Po zderzeniu:

Z symetrii: $V'_{2Y} = -V'_{3Y}$ oraz $V'_{2X} = V'_{3X}$

$$V'_{2X} = \cos(\alpha)\cdot V'_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}V'_2 \qquad V'_{2Y} = \sin(\alpha)\cdot V'_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}V'_2$$

Z zasady zachowania pędu (składowa y): $V'_{1Y} = 0$.

Zasada zachowania pędu (składowa x) i energii:

$$mV = mV_1' + m\frac{\sqrt{2}}{2}V_2'\cdot 2 \qquad (1) \qquad\qquad m\frac{V^2}{2} = m\frac{V_1'^2}{2} + 2m\frac{V_2'^2}{2} \qquad (2)$$

Z (1): $V_1' = V - \sqrt{2}V_2'$ Z (2): $V_1^2 = (V - \sqrt{2}V_2')^2 + 2V_2'^2$

$$V^2 - V^2 + 2\sqrt{2}V V_2' = 4V_2'^2$$

$$0 = V_2'(4V_2' - 2\sqrt{2}V\ )$$

$V_2' = 0$ (brak zderzenia) lub $V_2' = \frac{\sqrt{2}}{2}V$ oraz $V_1' = V - \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}V = 0$.

Stąd:

$$\vec{V}_1' = [0{,}0]\cdot V = 0\frac{m}{s}; \qquad \vec{V}_2' = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cdot V = \left[\frac{1}{2}V,\frac{1}{2}V\right] = \left[2\frac{m}{s},2\frac{m}{s}\right];$$

$$\vec{V}_3' = \left[2\frac{m}{s},-2\frac{m}{s}\right].$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI* w. jest wspierany przez Europejski Fundusz Społeczny w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

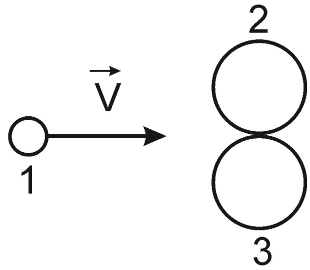
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

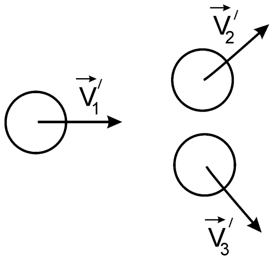
Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI* w. jest wspierany przez Europejski Fundusz Społeczny w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Zadanie 1. Wersja B

Krążek poruszający się po lodzie z prędkością $V = 3\frac{m}{s}$ uderza jednocześnie w dwa stykające się spoczywające krążki (rysunek). Znaleźć wektory prędkości krążków 1, 2 i 3 po zderzeniu, jeżeli krążki 2 i 3 po zderzeniu poruszają się symetrycznie, pod kątem 60^0 i -60^0, względem kierunku prędkości krążka 1 przed zderzeniem. Wszystkie krążki mają taką samą masę. Zderzenie jest sprężyste, a ruch krążków odbywa się bez wirowania i bez tarcia.



<u>Rozwiązanie wersji B.</u>



Po zderzeniu:

Z symetrii: $V'_{2Y} = -V'_{3Y}$ oraz $V'_{2X} = V'_{3X}$

$V'_{2X} = \cos(\alpha)\cdot V'_2 = \frac{1}{2}V'_2$ $\qquad$ $V'_{2Y} = \sin(\alpha)\cdot V'_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}V'_2$

Z zasady zachowania pędu (składowa y): $V'_{1Y} = 0$.

Zasada zachowania pędu (składowa x) i energii:

$$mV = mV'_1 + m\frac{1}{2}V'_2\cdot 2 \qquad (1)$$

$$m\frac{V^2}{2} = m\frac{V_1'^2}{2} + 2m\frac{V_2'^2}{2} \qquad (2)$$

Z (1): $V'_1 = V - V'_2$ $\qquad$ Z (2): $V^2 = (V - V'_2)^2 + 2V_2'^2$

$$V^2 - V^2 + 2V\,V'_2 = 3V_2'^2$$

$$0 = V'_2(3V'_2 - 2V\ )$$

$V'_2 = 0$ (brak zderzenia) lub $V'_2 = \frac{2}{3}V$ oraz $V'_1 = V - \frac{2}{3}\cdot V = \frac{1}{3}V$.

Stąd:

$$\vec{V}_1' = \left[\frac{1}{3},0\right]\cdot V = \left[1\frac{m}{s},0\right];$$

$$\vec{V}_2' = \left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2},\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cdot V = \left[\frac{1}{3}V,\frac{\sqrt{3}}{3}V\right] = \left[1\frac{m}{s},\sqrt{3}\frac{m}{s}\right];$$

$$\vec{V}_3' = \left[1\frac{m}{s},-\sqrt{3}\frac{m}{s}\right].$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI* w. jest wspierany przez Europejski Fundusz Społeczny w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

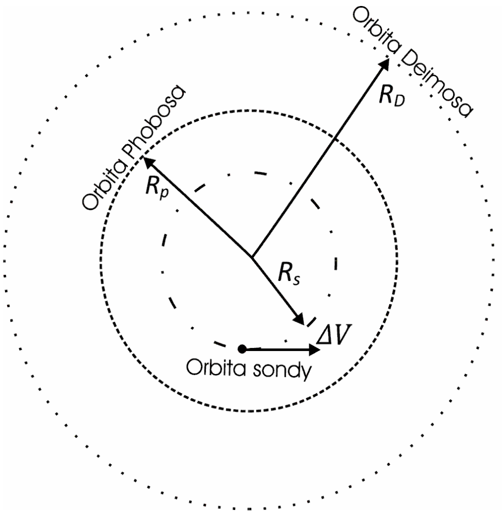
Zadanie 2. wersja A

Mars ma dwa małe księżyce: Phobosa i Deimosa. Phobos krąży wokół Marsa po orbicie kołowej o promieniu $R_P = 4R_M$ i okresie obiegu $T_P = 8h$, gdzie R_M to promień Marsa, a Deimos krąży wokół Marsa po orbicie kołowej o promieniu $R_D = 9R_M$.

Oblicz:

a) okres obiegu Deimosa dookoła Marsa;

b) o ile należy zwiększyć prędkość sondy, poruszającej się wokół Marsa po orbicie kołowej o promieniu $R_S = R_M$, aby przestała być ona związana Marsem. Przyjmij, że promień Marsa jest równy $R_M = 3400\,\text{km}$. Prędkość sondy zwiększa się zgodnie z kierunkiem jej lotu na orbicie.



Rozwiązanie wersji A.

a) Możemy skorzystać z III prawa Keplera (nawet jeśli go ktoś nie zapamięta, to może go wyprowadzić), bądź też jeśli nie ma pojęcia o III prawie Keplera, to operując pojęciem prędkości niezbędnej do utrzymania obiektów na orbicie planety tak czy inaczej do tego prawa dojdzie. Poniżej zaprezentowano rozwiązanie, zakładające, że student nie pamiętał III prawa Keplera. Prędkość niezbędną do utrzymania obiektu w polu grawitacyjnym planety na orbicie kołowej, możemy wyznaczyć przyrównując siłę grawitacji i siłę dośrodkową:

$$F_d = \frac{mV^2}{R} \quad F_g = \frac{GMm}{R^2} \rightarrow F_d = F_g \rightarrow V = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Wprowadzając oznaczenia z treści zadania, prędkość Deimosa wynosi: $V_D = \sqrt{\frac{GM}{R_D}}$

Znając tę prędkość oraz promień orbity Deimosa, możemy wyznaczyć jego okres obiegu dookoła Marsa. W treści zadania nie została podana masa Marsa ani stała grawitacji. Niemniej iloczyn GM możemy wyznaczyć znając parametry orbity drugiego księżyca – Phobosa: $V_P = \sqrt{\frac{GM}{R_P}} \rightarrow \frac{2\pi R_p}{T_p} = GM = \frac{4\pi^2 R_p^3}{T_p^2}$

Podstawiają to do równania na okres obiegu Deimosa otrzymujemy:

$$T_D = T_P\sqrt{\frac{R_D^3}{R_P^3}}\ ; \qquad T_D = 8\text{h}\sqrt{\frac{(9R_M)^3}{(4R_M)^3}} = 8\text{h}\sqrt{\frac{729}{64}} = 8\text{h}\,\frac{27}{8} = 27h$$

b) Ten problem można rozwiązać różnymi drogami. Wyznaczmy na początek ile powinna wynosić prędkość satelity, znajdującego się w odległości r od środka planety, aby satelita przestał być z nią związany. Całkowita energia w polu grawitacyjnym jest równa sumie energii potencjalnej oraz energii kinetycznej:

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{mV^2}{2}$$

Aby satelita zaczął poruszać się po paraboli, jego całkowita energia musi być równa 0.

$$-\frac{GMm}{r} + \frac{mV^2}{2} = 0$$

Stąd, W przypadku satelity poruszającego się wokół Marsa mamy: $V = \sqrt{\frac{2GM}{R_S}}$

Z kolei prędkość niezbędna do utrzymania satelity na orbicie wynosi: $V = \sqrt{\frac{GM}{R_S}}$

A zatem dodatkowa prędkość ΔV jest równa: $\Delta V = \sqrt{\frac{GM}{R_S}}(\sqrt{2} - 1)$

W treści zadania nie mamy podanej masy Marsa ani stała grawitacji, jednakże widzimy, że czynnik $\sqrt{\frac{GM}{R_S}}$, to prędkość niezbędna do utrzymania satelity na orbicie.

W związku z czym: $\sqrt{\frac{GM}{R_S}} = \frac{2\pi R_s}{T_s}$

i wtedy dodatkowa prędkość jest równa: $\Delta V = \frac{2\pi R_s}{T_s(\sqrt{2} - 1)}$

Nie znamy niestety czasu obiegu -T_s satelity wokół Marsa. Czas ten możemy wyznaczyć korzystając ze wzorów wyprowadzonych w punkcie pierwszym oraz z informacji na temat orbity, któregoś z księżyców. Niech tym księżycem będzie Phobos: $T_S = T_P\sqrt{\frac{R_S^3}{R_P^3}}$

Ostatecznie:

$$\Delta V = \frac{2\pi R_S}{\left(T_P\sqrt{\frac{R_S^3}{R_P^3}}\right)(\sqrt{2} - 1)}$$

$$\Delta V = \frac{2\pi \cdot 3400km}{8 \cdot 3600s\sqrt{\frac{(1R_M)^3}{(4R_M)^3}}}(\sqrt{2} - 1) = \frac{2\pi \cdot 3400km}{8 \cdot 3600s\sqrt{\frac{1}{64}}}(\sqrt{2} - 1) \rightarrow$$

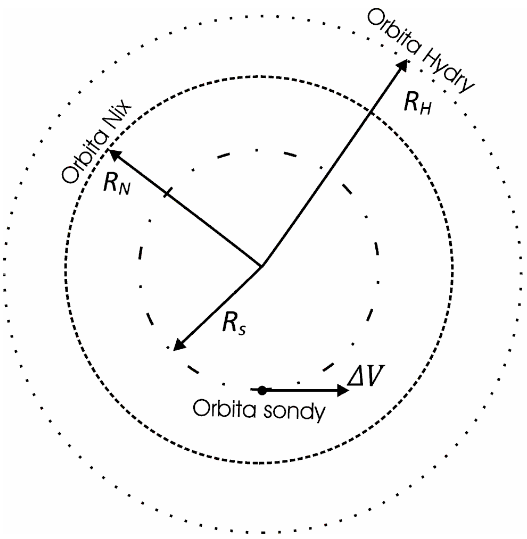
$$\Delta V = \frac{2\pi \cdot 3400km}{8 \cdot 3600s\frac{1}{8}}(\sqrt{2} - 1) = \frac{2\pi \cdot 17km}{18s}(\sqrt{2} - 1) \rightarrow$$

$$\Delta V = \frac{\pi \cdot 17km}{9s}(\sqrt{2} - 1) = \frac{17}{9}\pi(\sqrt{2} - 1)\frac{km}{s}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI* w. jest wspierany przez Europejski Fundusz Społeczny w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Zadanie 2. Wersja B



Pluton posiada trzy niewielkie księżyce. Dwa spośród nich – Hydra i Nix mają rozmiary nieznaczne
w porównaniu z promieniem planety. Wiedząc że:
Nix krąży wokół Plutona po orbicie kołowej o promieniu $R_N = 36R_p$ i okresie obiegu T_N = 25dni, gdzie R_p to promień Plutona.
Hydra krąży wokół Plutona po orbicie kołowej o promieniu $R_H = 49R_p$.
Oblicz:

a) okres obiegu Hydry dookoła Plutona;
b) o ile należy zwiększyć prędkość ciała poruszającego się wokół Plutona po orbicie kołowej o promieniu $R_s = R_p$, aby przestało ono być związane planetą. Promień Plutona jest równy $R_p = 1150km$. Prędkość ciała zwiększamy zgodnie z kierunkiem jego lotu na orbicie.

Rozwiązanie wersji B.

Wzory takie same jak dla wersji A. Rachunki są następujące:

a)

$$T_H = 25\text{dni}\sqrt{\frac{(49R_p)^3}{(36R_p)^3}} = 25\text{dni}\sqrt{\frac{49\cdot 49^2}{36\cdot 36^2}} = 25\text{dni}\frac{49}{36}\sqrt{\frac{49}{36}} = 25\text{dni}\frac{49}{36}\cdot\frac{7}{6} = 25\cdot\frac{343}{216}dni$$

b)

$$V = \frac{2\pi\cdot 1150km}{25dni\sqrt{\frac{(1R_p)^3}{(36R_p)^3}}}\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{2\pi\cdot 1150km}{25dni\cdot\frac{1}{36\cdot 6}}\left(\sqrt{2}-1\right) =$$

$$= \frac{2\pi\cdot 1150\cdot 216km}{25\cdot 24\cdot 3600s}\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{2\pi\cdot 46\cdot 216km}{24\cdot 3600s}\left(\sqrt{2}-1\right) =$$

$$= \frac{2\pi\cdot 46\cdot 9km}{3600s}\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{2\pi\cdot 46\cdot km}{400s}\left(\sqrt{2}-1\right) =$$

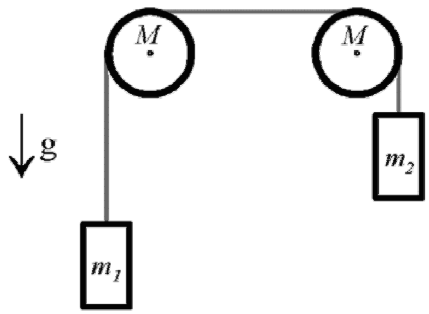
$$= \frac{\pi\cdot 46\cdot km}{200s}\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{23}{200}\pi\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{km}{s}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI* w. jest wspierany przez Europejski Fundusz Społeczny w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Zadanie 3 (wersja A)



Klocek o masie m_1 przywiązany jest do wiotkiej, nierozciągliwej i nieważkiej nici, którą przewieszono przez krążki dwóch zamocowanych pod sufitem bloczków, z których każdy ma masę M i promień R, a do drugiego końca nici przymocowano drugi klocek o masie m_2. Oba bloczki są jednorodnymi walcami mogącymi się swobodnie obracać wokół swych poziomych osi symetrii, a każdy z nich ma zatem moment bezwładności $I = 0.5 \cdot M \cdot R^2$. Układ znajduje się w jednorodnym polu siły ciężkości o natężeniu g. Policzyć przyspieszenie a z jakim poruszają się klocki i naprężenie T odcinka nici pomiędzy bloczkami, znaleźć ich wartości liczbowe, gdy m_1 = 1 kg, m_2 = 2 kg, M = 1 kg, g = 10m/s^2 oraz określić w którą stronę w takim przypadku następuje ten ruch, jeśli układ początkowo spoczywał.

Rozwiązanie wersji A.

Gdy przyspieszenie klocka 1 (lewego) mierzymy ze zwrotem do dołu, a klocka 2 (prawego) do góry, zaś przyspieszenie kątowe każdego z bloczków "przeciwnie do ruchu wskazówek zegara" (czyli zgodnie z regułą przyjętą dla klocków), wtedy równania opisujące ruch mają następującą postać:

$$R\varepsilon = a$$
$$m_1 a = m_1 g - T_1$$
$$m_2 a = T_2 - m_2 g$$
$$I\varepsilon = RT_1 - RT_3$$
$$I\varepsilon = RT_3 - RT_2$$

gdzie a - przyspieszenie liniowe klocków, ε - przyspieszenie kątowe bloczków, T_1 - naprężenie odcinka nici nad pierwszym klockiem, T_2 - naprężenie odcinka nici nad drugim klockiem, $T3$ - naprężenie nici na odcinku pomiędzy bloczkami, $I = 0.5MR^2$.

Po rozwiązaniu:

$$a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M}$$
$$T_3 = 0.5(m_1 + m_2)g + 0.5(m_2 - m_1)a$$

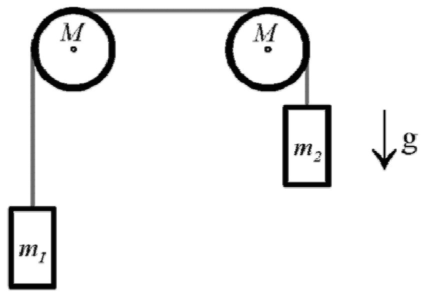
(wstawienie a do wzoru na T_3 raczej go nie uprości).

a = -2.5 m/s^2, T_3 = 13.75 N, lewy klocek (1) rozpoczyna ruch w górę.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI* w. jest wspierany przez Europejski Fundusz Społeczny w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Zadanie 3 (wersja B)



Klocek o masie m_1 przywiązany jest do wiotkiej, nierozciągliwej i nieważkiej nici, którą przewieszono przez krążki dwóch zamocowanych pod sufitem bloczków, z których każdy ma masę M i promień R, a do drugiego końca nici przymocowano drugi klocek o masie m_2. Oba bloczki są jednorodnymi walcami mogącymi się swobodnie obracać wokół swych poziomych osi symetrii, a każdy z nich ma zatem moment bezwładności $I = 0.5 \cdot M \cdot R^2$. Układ znajduje się w jednorodnym polu siły ciężkości o natężeniu g. Policzyć przyspieszenie a z jakim poruszają się klocki i naprężenie T odcinka nici pomiędzy bloczkami, znaleźć ich wartości liczbowe, gdy m_1 = 2 kg, m_2 = 1 kg, M = 2 kg, g = 10m/s^2 oraz określić w którą stronę w takim przypadku następuje ten ruch, jeśli układ początkowo spoczywał.

Rozwiązanie wersji B.

Gdy przyspieszenie klocka 1 (lewego) mierzymy ze zwrotem do dołu, a klocka 2 (prawego) do góry, zaś przyspieszenie kątowe każdego z bloczków "przeciwnie do ruchu wskazówek zegara" (czyli zgodnie z regułą przyjętą dla klocków), wtedy równania opisujące ruch mają następującą postać:

$$R\varepsilon = a$$
$$m_1 a = m_1 g - T_1$$
$$m_2 a = T_2 - m_2 g$$
$$I\varepsilon = RT_1 - RT_3$$
$$I\varepsilon = RT_3 - RT_2$$

gdzie a - przyspieszenie liniowe klocków, ε - przyspieszenie kątowe bloczków, T_1 - naprężenie odcinka nici nad pierwszym klockiem, T_2 - naprężenie odcinka nici nad drugim klockiem, $T3$ - naprężenie nici na odcinku pomiędzy bloczkami, $I = 0.5MR^2$.

Po rozwiązaniu:

$$a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M}$$
$$T_3 = 0.5(m_1 + m_2)g + 0.5(m_2 - m_1)a$$

(wstawienie a do wzoru na T_3 raczej go nie uprości).

a = 2 m/s^2, T_3 = 14 N, prawy klocek (2) rozpoczyna ruch w górę.