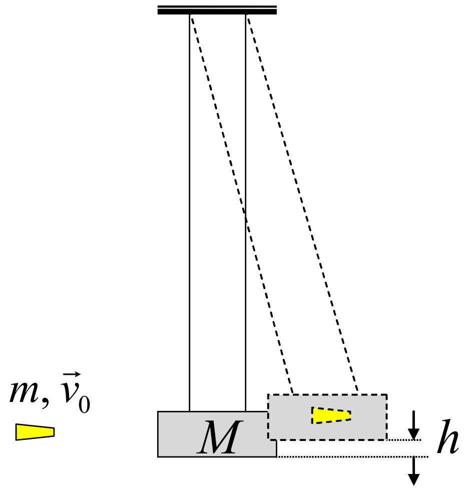
Rozwiazania zadń z kol.2. (Fizyka Medyczna i Neuroinformatyka)

Zad. 1A

Wahadło balistyczne to klocek o dużej masie zawieszony na długiej nici (patrz rysunek). Takie wahadło może służyć do pomiaru prędkości pocisków. Pocisk o masie m i prędkości poziomej v_0=700 m/s wbija się w klocek i zatrzymuje w nim. Czas hamowania pocisku jest mały w porównaniu z okresem drgań wahadła. Przyjmij wartość przyspieszenia ziemskiego $g \cong 10 m/s^2$. Masa klocka M=2kg, masa pocisku 2g

1. Policzyć maksymalne wzniesienie pionowe klocka, h (patrz rysunek).
2. Policz stosunek energii kinetycznej układu (klocek + pocisk) tuż po zderzeniu, do początkowej energii pocisku.



Rys.1 Wahadło balistyczne

Rozwiązanie:

Zasada zachowania pędu pozwala wyliczyć prędkość klocka po zderzeniu:

$mv_0 = (m+M)v$, co daje $v = \frac{m}{(m+M)} v_0$

Teraz klocek odchyla się od pionu i wznosi na wysokość h dzięki zachowaniu energii:

$$\frac{(m+M)}{2} v^2 = (m+M)gh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2$$

$$h = \frac{\left(700\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 10 \frac{m}{s^2}} \left(\frac{2}{2002}\right)^2 \frac{49 \cdot 4 \cdot 10^4}{2 \cdot 4 \cdot 10^7} \cong 25 \cdot 10^{-3} m = 25mm$$

Jaką część energii przejmuje klocek ?

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI* w. współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

$$\frac{T'}{T}=\frac{\frac{1}{2}(m+M)v^2}{\frac{1}{2}mv_0^2}=\frac{m+M}{mv_0^2}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 v_0^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{T'}{T}=\frac{m}{m+M}=\frac{2}{2002}\cong 0{,}1\%$$

Klocek przejmuje bardzo niewielką część energii kinetycznej (1%)

Zad. 1B

Wahadło balistyczne to klocek o dużej masie M, zawieszony na długiej nici (patrz rysunek). Takie wahadło może służyć do pomiaru prędkości pocisków. Pocisk o masie m i prędkości poziomej v_0 wbija się w klocek i zatrzymuje w nim. Czas hamowania pocisku jest mały w porównaniu z okresem drgań wahadła. Przyjmij wartość przyspieszenia ziemskiego $g \cong 10 m/s^2$.

Masa klocka M=2kg, masa pocisku 3g

1. Policz prędkość pocisku, jeśli klocek wzniósł się na wysokość 3,2 cm
2. Policz stosunek energii kinetycznej układu (klocek + pocisk) tuż po zderzeniu, do początkowej energii pocisku.

Rozwiązanie:

Zasada zachowania pędu pozwala wyliczyć prędkość klocka po zderzeniu:

$mv_0=(m+M)v$, co daje $v=\frac{m}{(m+M)}v_0$

Teraz klocek odchyla się od pionu i wznosi na wysokość h dzięki zachowaniu energii:

$$\frac{(m+M)}{2}v^2=(m+M)gh \quad\Rightarrow\quad h=\frac{v^2}{2g}=\frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2$$

Liczymy prędkość pocisku: $v_0^2=2gh\left(\frac{m+M}{m}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad v_0=\sqrt{2gh}\left(\frac{m+M}{m}\right)$

$$v_0=\sqrt{2\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}032m}\left(\frac{2003g}{3g}\right)\cong\frac{0{,}8}{3}2003=533\frac{m}{s}$$

Jaką część energii przejmuje klocek ?

$$\frac{T'}{T}=\frac{\frac{1}{2}(m+M)v^2}{\frac{1}{2}mv_0^2}=\frac{m+M}{mv_0^2}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 v_0^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{T'}{T}=\frac{m}{m+M}=\frac{3}{2003}\cong 0{,}15\%$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI* w. jest wspierany przez Europejski Fundusz Społeczny w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Wersja A

Wiedząc, że:

- Promień orbity satelity geostacjonarnego jest równy $R_g = 6\frac{3}{5}\mathrm{R_z}$, gdzie R_z - promień Ziemi.
- Satelita, krążący wokół Księżyca po orbicie kołowej o promieniu $R_k = R_z$, potrzebuje $T_k = 12$ godzin na jedno okrążenie.

Oblicz ile razy masa Księżyca jest mniejsza od masy Ziemi.

Rozwiązanie.

W zadaniu pojawia się problem ruchu satelitów oraz prędkości niezbędnej do utrzymania obiektu na orbicie kołowej. Prędkość tę można wyliczyć ze wzoru:

$$F_d = \frac{mV^2}{r} = F_g = \frac{GMm}{r} \rightarrow V = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Dla Księżyca i satelity na orbicie o promieniu R_k prędkość ta wynosi:

$$V_k = \sqrt{\frac{GM_k}{R_k}}$$

A dla Ziemi odpowiednio:

$$V_z = \sqrt{\frac{GM_z}{R_z}}$$

Z powyższych wzorów możemy wyznaczyć masę jako funkcję promieni planet i ich prędkości kosmicznych:

$$V_k^2 = \frac{GM_k}{R_k} \rightarrow M_k = \frac{V_k^2 R_k}{G}$$

Z kolei dla Ziemi:

$$M_z = \frac{V_z^2 R_z}{G}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI* w. jest wspierany przez Europejski Fundusz Społeczny w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

W związku z czym:

$$\frac{M_z}{M_k} = \frac{V_z^2 R_z}{G} \frac{G}{V_k^2 R_k} = \frac{V_z^2 R_g}{V_k^2 R_k}$$

Do szczęścia brakuje nam prędkości kosmicznych, które obliczymy mając dane w zadaniach orbity i okresy obiegu satelitów:

$$V_k = \frac{2\pi R_k}{T_k}$$
$$V_z = \frac{2\pi R_g}{T_g}$$

$$\frac{M_z}{M_k} = \frac{R_g^3 T_k^2}{R_k^3 T_g^2} = \frac{R^\wedge}{T_k^2 R_g} = \frac{\left(6\frac{3}{5}R_z\right)^3 (12h)^2}{(1R_z)^3 (24h)^2} = \frac{\left(\frac{33}{5}\right)^3}{4} = \frac{35937}{4 \cdot 125} \approx 72$$

W rzeczywistości masa Ziemi jest 81 razy większa. Tutaj trochę naciągnąłem pewne liczby.

<u>Wersja A</u>

Wiedząc, że:

- Jeden z Księżyców Jowisza – Europa, krąży wokół niego po orbicie kołowej o promieniu $R_E = 105 R_z$, gdzie R_z - promień Ziemi, zaś okres obiegu wynosi $T_E = 3\frac{1}{2}$dni.
- Promień orbity satelity geostacjonarnego jest równy $R_g = 6\frac{3}{5}\mathrm{R_z}$.

Oblicz ile razy masa Jowisza jest większa od masy Ziemi.

<u>Rozwiązanie:</u>

Identyczne jak poprzednio. Podaję tylko wyliczenia:

$$\frac{M_j}{M_z} = \frac{R_E^3 T_g^2}{R_g^3 T_E^2} = \frac{(105R_z)^3 (1dzie\acute{n})^2}{\left(6\frac{3}{5}\mathrm{R_z}\right)^2 \left(3\frac{1}{2}dni\right)^2} = \frac{(382)^3}{\left(\frac{33}{5}\right)^3 \left(\frac{7}{2}\right)^2} \approx \frac{1000000 \cdot 125 \cdot 4}{49 \cdot 35937} \approx \frac{20000 \cdot 125 \cdot 4}{35937}$$
$$\approx \frac{80000}{35937} \cdot 125 \approx 2 \cdot 125 = 250$$

W rzeczywistości Masa Jowisza jest 312 razy większa od Masy Ziemi.

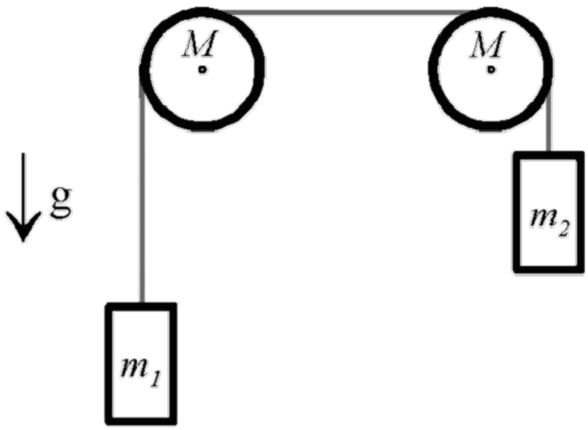
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI* w. jest wspierany przez Europejski Fundusz Społeczny w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Zadanie 3A

Klocek o masie m_1 przywiązany jest do wiotkiej, nierozciągliwej i nieważkiej nici, którą przewieszono przez krążki dwóch zamocowanych pod sufitem bloczków, z których każdy ma masę M i promień R, a do drugiego końca nici przymocowano drugi klocek o masie m_2. Oba bloczki są jednorodnymi walcami mogącymi się swobodnie obracać wokół swych poziomych osi symetrii, a każdy z nich ma zatem moment bezwładności $I = 0.5 \cdot M \cdot R^2$. Układ znajduje się w jednorodnym polu siły ciężkości o natężeniu g. Policzyć przyspieszenie a z jakim poruszają się klocki, znaleźć jego wartość liczbową, gdy $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $M = 1$ kg, $g = 10\text{m/s}^2$ oraz określić w którą stronę w takim przypadku następuje ten ruch, jeśli układ początkowo spoczywał.



Zad. 3B

Klocek o masie m_1 przywiązany jest do wiotkiej, nierozciągliwej i nieważkiej nici, którą przewieszono przez krążki dwóch zamocowanych pod sufitem bloczków, z których każdy ma masę M i promień R, a do drugiego końca nici przymocowano drugi klocek o masie m_2. Oba bloczki są jednorodnymi walcami mogącymi się swobodnie obracać wokół swych poziomych osi symetrii, a każdy z nich ma zatem moment bezwładności $I = 0.5 \cdot M \cdot R^2$. Układ znajduje się w jednorodnym polu siły ciężkości o natężeniu g. Policzyć przyspieszenie a z jakim poruszają się klocki, znaleźć jego wartość liczbową, gdy $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1$ kg, $M = 2$ kg, $g = 10\text{m/s}^2$ oraz określić w którą stronę w takim przypadku następuje ten ruch, jeśli układ początkowo spoczywał.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI* w. współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Rozwiązanie

Gdy przyspieszenie klocka 1 (lewego) mierzymy ze zwrotem do dołu, a klocka 2 (prawego).do góry, zaś przyspieszenie kątowe każdego z bloczków "przeciwnie do ruchu wskazówek zegara" (czyli zgodnie z regułą przyjętą dla klocków), wtedy równania opisujące ruch mają następującą postać:

$R\,\varepsilon = a$

$m_1\,a = m_1\,g - T_1$

$m_2\,a = T_2 - m_2\,g$

$I\,\varepsilon = R\,T_1 - R\,T_3$

$I\,\varepsilon = R\,T_3 - R\,T_2$,

gdzie a przyspieszenie liniowe klocków, ε przyspieszenie kątowe bloczków, T_1 naprężenie odcinka nici nad pierwszym klockiem, T_2 naprężenie odcinka nici nad drugim klockiem, T_3 naprężenie nici na odcinku pomiędzy bloczkami, $I = 0.5\,M\,R^2$. Po rozwiązaniu:

$a = g\,(m_1 - m_2) / (m_1 + m_2 + M)$

$T_3 = 0.5\,(m_1 + m_2)\,\mathrm{g} + 0.5\,(m_2 - m_1)\,a$

(wstawienie a do wzoru na T_3 raczej go nie uprości).

W przypadku A) a = -2.5 m/s^2, T_3 = 13.75 N, lewy klocek (1) rozpoczyna ruch w górę, zaś w przypadku B) a = 2 m/s2, T_3 = 14 N, prawy klocek (2) rozpoczyna ruch w górę

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI* w. jest wspierany przez Europejski Fundusz Społeczny w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki