Prawa ruchu: dynamika

Fizyka I (Mechanika)

Wykład III:

- Bezwładność
- I zasada dynamiki, układ inercjalny
- II zasada dynamiki
- III zasada dynamiki
- Równania ruchu
- Więzy

Bezwładność

Bezwładność (inercja)

PWN 1998:

właściwość układu fizycznego (ciała) charakteryzująca jego podatność na zmiany stanu (ruchu)

⇒ dążenie układu do zachowania w stanu, w którym się znajduje

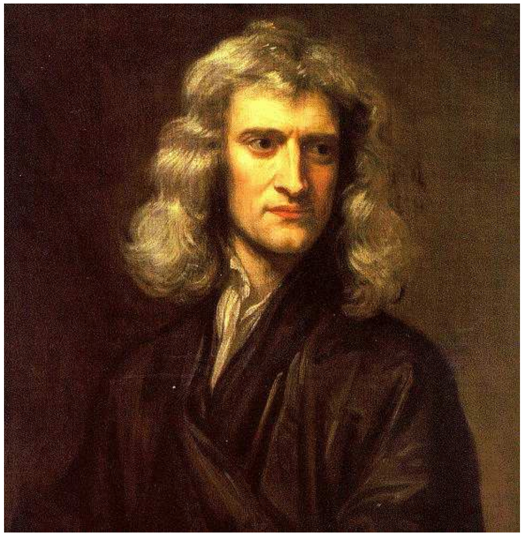
dążenie ciał do pozostawania w spoczynku lub w ruchu

⇒ “opór” stawiany przez układ, gdy próbujemy zmienić jego stan

np. gdy próbujemy wprawić w ruch lub zatrzymać ciało

I zasada dynamiki

Isaac Newton



Zasada bezwładności

Zawarta w dziele:

"Zasady matematyczne filozofii naturalnej" (1687)

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

"Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszają ciała do zmiany tego stanu."

I zasada dynamiki

Zasada bezwładności w ujęciu Newtona ma dwie “wady”:

- przyjmuje, że można zdefiniować bezwzględny spoczynek i ruch
- zakłada, że na ciało mogą nie działać żadne siły

Układ odniesienia

Newton zakładał istnienie “przestrzeń absolutna”,
która “pozostaje zawsza taka sama i nieruchoma”

$\Rightarrow$ “absolutnego” układu odniesienia

Dziś wiemy, że taki układ nie istnieje.

Względem jakiego układu spełniona jest I zasada dynamiki ?

Jeśli dwa układy poruszają się względem siebie z przyspieszeniem,
I zasada dynamiki nie może być spełniona w obu z nich...

I zasada dynamiki

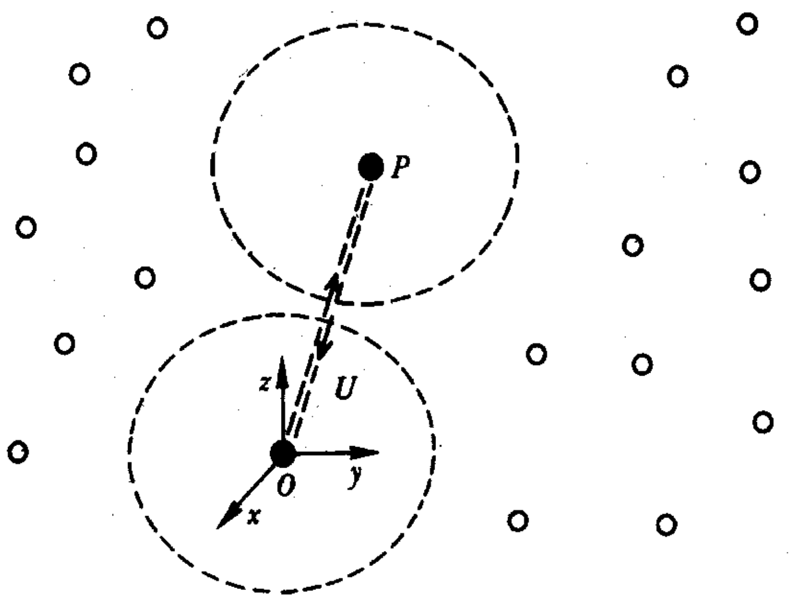
Ciało izolowane

Aby na ciało nie działały żadne siły musi być odizolowane od wpływu innych ciał.

Bardzo trudno o “doskonałą” izolację.

Wszystkie znane nam siły maleją z odległością

$\Rightarrow$ ciało uznamy za izolowane jeśli będzie dostatecznie daleko od innych ciał.



Aby zweryfikować zasadę bezwładności musimy mieć **dwa** ciała izolowane:
ciało obserwowane i układ odniesienia.

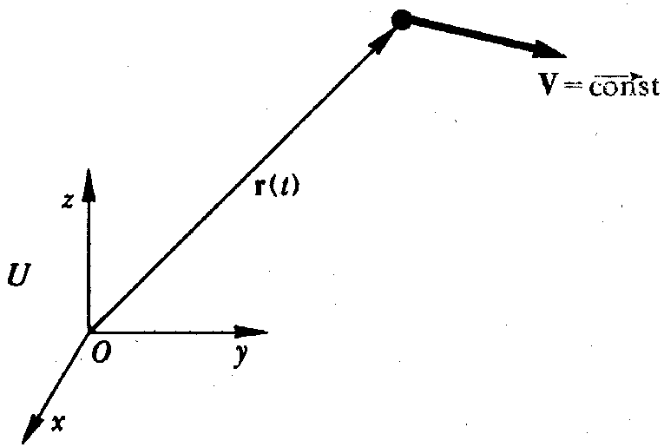
Ale każda obserwacja jest związana z jakimś **oddziaływaniem** !...

Nigdy nie spełnimy idealnych warunków...

I zasada dynamiki

Układ inercjalny

Układ w którym obowiązuje I zasada dynamiki nazywamy **układem inercjalnym**.



Jeśli istnieje jeden układ inercjalny to istnieje nieskończenie wiele układów inercjalnych.

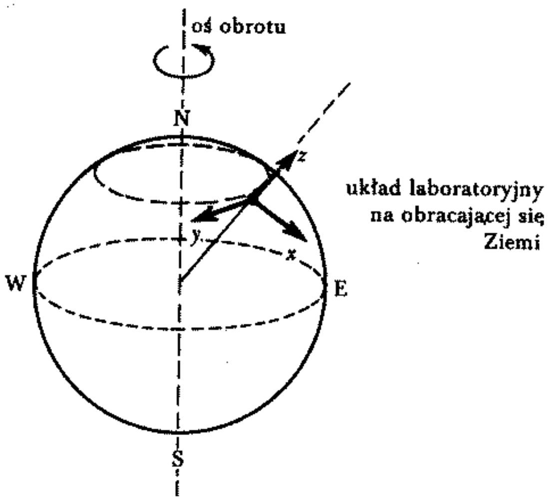
każdy inny układ poruszający się względem niego z prędkością $\vec{V} = const$

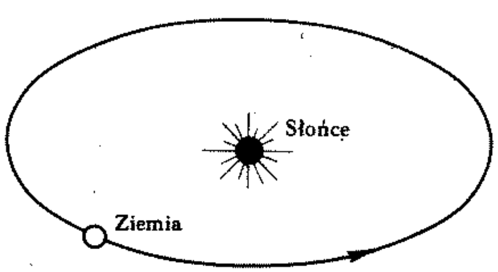
Zasada bezwładności jest równoważna z postulatem:

Istnieje układ inercjalny

I zasada dynamiki

Układ inercjalny





Jaki układ możemy uznać za inercjalny ?

Wszystko zależy od zagadnienia
i dokładności pomiaru

Rotacja Ziemi: $a_Z \approx 0.03 \frac{m}{s^2}$

Obieg wokół słońca: $a_S \approx 0.006 \frac{m}{s^2}$

Rotacja Galaktyki: $a_G \approx 0.000\,000\,000\,3 \frac{m}{s^2}$

Na ogół wystarcza układ laboratoryjny
(zwiazany z Ziemią)

II zasada dynamiki

II prawo Newtona

"Zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej

i odbywa się w kierunku prostej, wzdłuż której siła jest przyłożona"

Zmiana ruchu ciała (w układzie inercjalnym) jest zawsze wynikiem oddziaływania otoczenia (innych ciał).

Oddziaływanie to opisujemy ilościowo wprowadzając pojęcie **siły**

Siła jest wielkością wektorową (kierunek zmiany ruchu)

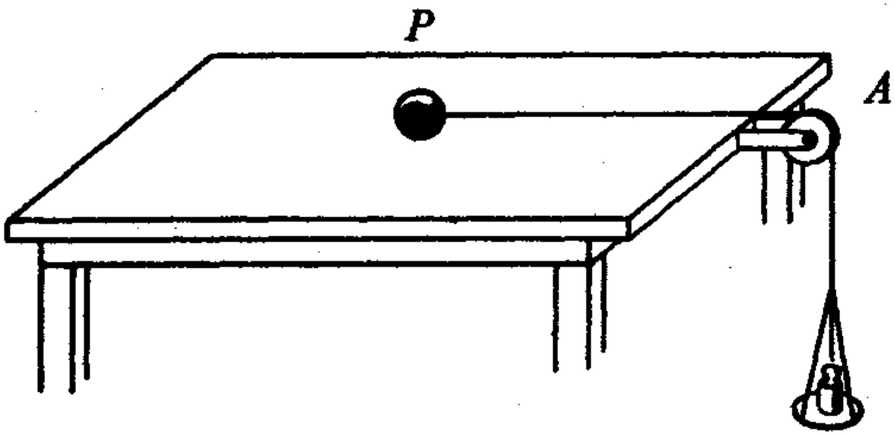
Siły możemy porównywać ilościowo niezależnie od ruchu ciał
naogół wykorzystujemy przy tym I zasadę dynamiki (równowaga sił)
np. porównywanie ciężaru poprzez ważenie ciał, pomiar siły dynamometrem...

II zasada dynamiki

Ruch pod wpływem stałej siły

Pokaz

$\downarrow t_0 = 0$ $\qquad\qquad$ $\downarrow t_1$



$\longleftarrow$ L $\longrightarrow$

Na dane ciało **P** działają różne siły $\vec{F}$ nadając mu różne przyspieszenia $\vec{a}$

Przyjmijmy: $\vec{r}(0) = \vec{v}(0) = 0$

$\Rightarrow$ ruch prostoliniowy jednostajnie przyspieszony

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \sim F$$

Czas na pokonanie odległości L:

$$L = \frac{a}{2}\,t_1^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2L}{t_1^2}$$

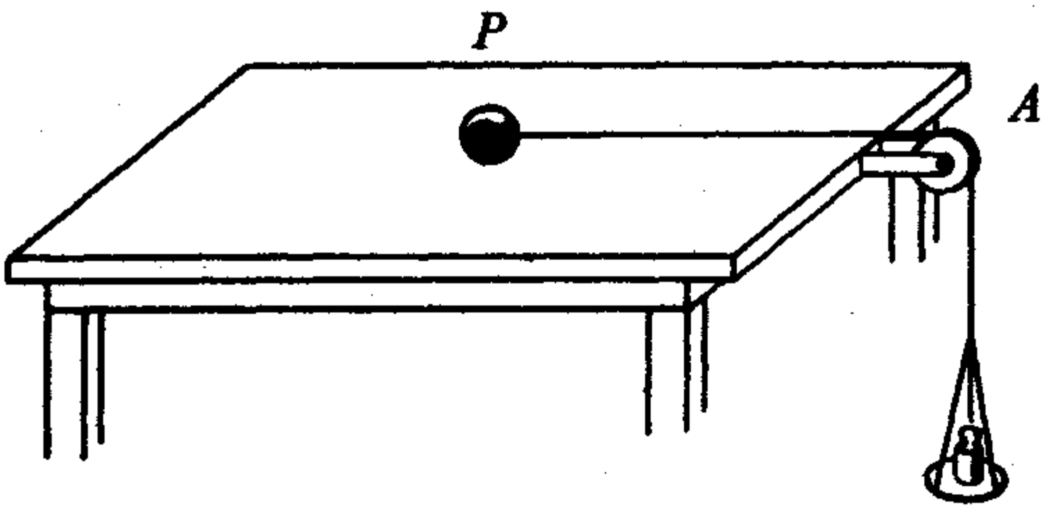
Prędkość na końcu odcinka L:

$$v_1 = \frac{2L}{t_1} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_1^2}{2L}$$

II zasada dynamiki

Masa bezwładna

"akcelerator"



Ustalona siła $\vec{F}$ działając na różne ciała **P** nadaje im różne przyspieszenia $\vec{a}$

Możemy wprowadzić współczynniki **m**, które określają stosunki przyspieszeń różnych ciał

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots \; = \; \frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} : \frac{1}{m_3} : \ldots$$

Lub też:

$$m_1 \, a_1 \; = \; m_2 \, a_2 \; = \; m_3 \, a_3 \; = \; \ldots$$

Stosunki przyspieszeń zależą od badanych ciał ale nie zależą od przyłożonej siły

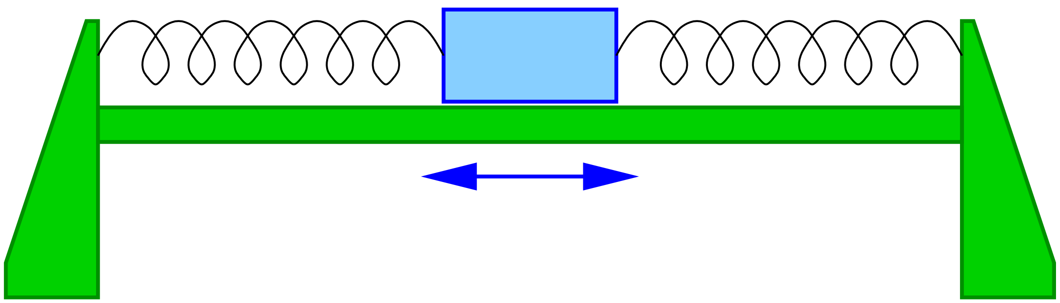
Możemy wybrać jakieś ciało i uznać je za "jednostkowe"

m - masa bezwładna

II zasada dynamiki

Ruch harmoniczny

Pokaz



Siła z jaką działa sprężyna zależy wyłącznie od położenia wózka

$$\boxed{F_x = -k \cdot x}$$

Pomiar przyspieszenia:

Położeniem równowagi jest $x = 0$

Przyjmijmy, że $x(0) = R$ i $v_x(0) = 0$

run harmoniczny:

$$x(t) = R \cdot \cos(\omega t)$$

$$a(t) = -\omega^2 \cdot x(t) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow \quad a \sim T^{-2}$$

Druga zasada dynamiki:

$$a \sim \frac{1}{m} \quad \Rightarrow \quad T^2 \sim m$$

II zasada dynamiki

Siła

Jednostką masy bezwładnej jest kilogram, 1 kg

Druga zasada dynamiki Newtona:

$$\boxed{\vec{F} = m\,\vec{a}}$$

klasyczna definicja siły

Jednostka siły: 1 niuton $1\ N = 1\ kg \cdot 1\ \frac{m}{s^2}$

Druga zasada dynamiki jest:

- wnioskiem z doświadczeń
- definicją nowych wielkości (masy i siły)

II zasada dynamiki

Zasada niezależności działania sił

Jeśli na ciało o masie m działają dwie niezależne siły F_1 i F_2:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}_1 = m\vec{a}_1 \\ \vec{F}_2 = m\vec{a}_2\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)$$

$$\vec{F} \;\; = \;\; m\,\vec{a}$$

$\Rightarrow$ przyspieszenie wywołane przez siłę wypadkową jest równe sumie przyspieszeń

Zasada addytywności masy

Dwie siły działając na dwie masy wywołują równe przyspieszenie:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}_1 = m_1\vec{a} \\ \vec{F}_2 = m_2\vec{a}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

$$\vec{F} \;\; = \;\; m\,\vec{a}$$

$\Rightarrow$ siła wypadkowa w działani na całkowitą masę daje takie samo przyspieszenie

II zasada dynamiki

Uogólnienie

Druga zasada dynamiki Newtona w postaci "klasycznej"

$$\boxed{\vec{F} = m\,\vec{a}}$$

ważna jest tylko dla ciał których masa jest stała $m = const$

Możemy jednak uogólnić:

$$\vec{F} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} \overset{m=const}{=} \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

gdzie $\vec{p} = m\vec{v}$ - pęd cząstki

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

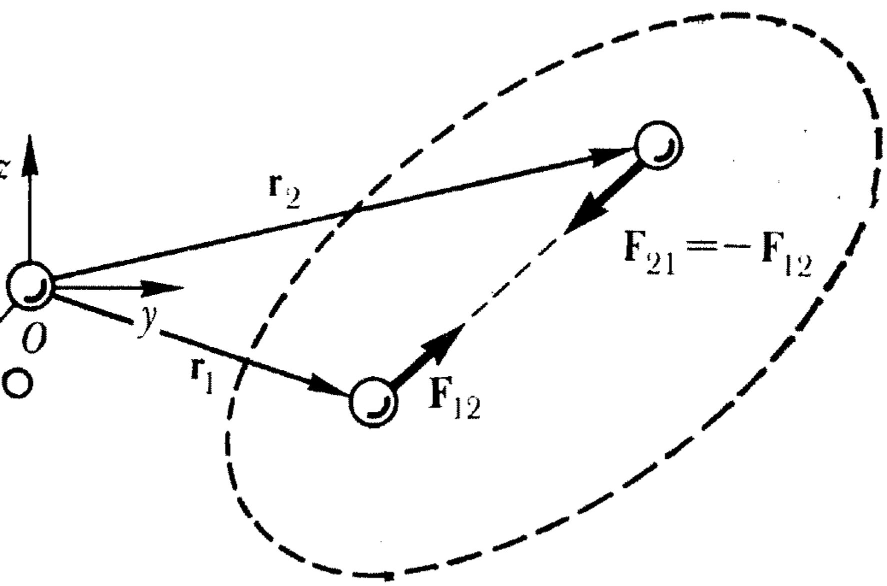
Jest słuszne także dla ciał o zmieniającej się masie (np. rakieta)

oraz w przypadku relatywistycznym (choć zmieni się definicja pędu).

$$\Delta\vec{p} = \int_{\Delta t} \vec{F}\,dt = I \quad \text{- popęd siły}$$

III zasada dynamiki

Zasada akcji i reakcji



"Każdemu działaniu towarzyszy równe i przeciwnie skierowane przeciwdziałanie.

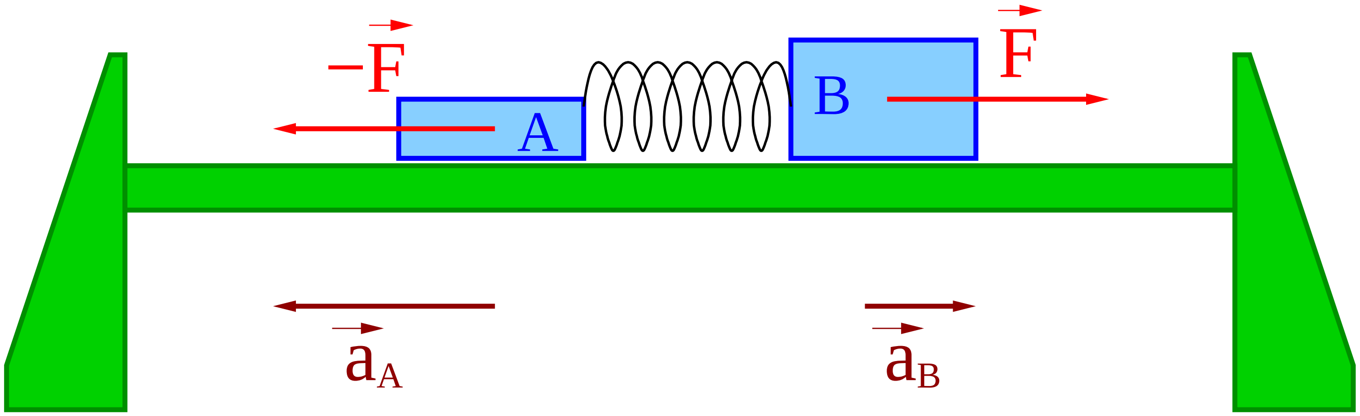
Wzajemne oddziaływania dwóch ciał są zawsze równe sobie i skierowane przeciwnie."

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

III zasada dynamiki

Zasada akcji i reakcji

Pokaz



Siły akcji i reakcji są równe co do wartości.

Przyspieszenia są odwrotnie proporcjonalne do mas:

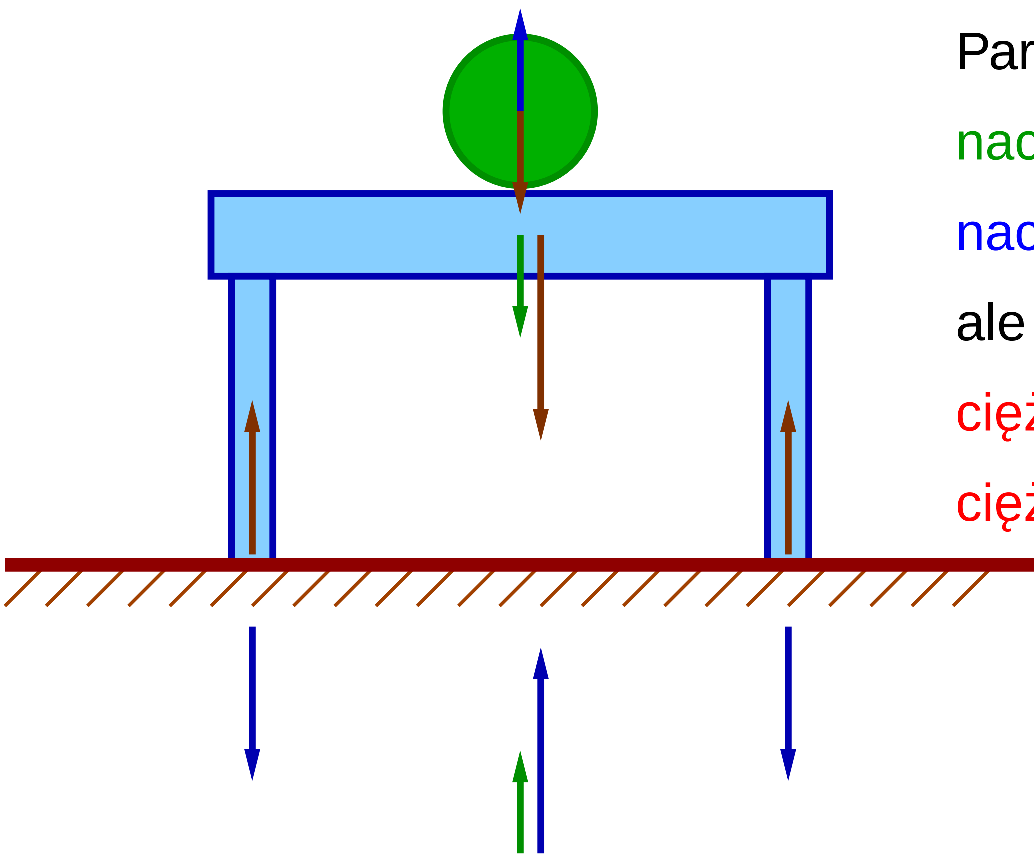
$$
\begin{aligned}
\vec{F}_A &= -\vec{F}_B \\
m_A\,\vec{a}_A &= -m_B\,\vec{a}_B \\
a_A : a_B &= \frac{1}{m_A} : \frac{1}{m_B}
\end{aligned}
$$

III zasada dynamiki

Zasada akcji i reakcji

Siły akcji i reakcji są przejawem oddziaływanie między dwoma ciałami

$\Rightarrow$ pary sił działające na różne ciała (!).



Pary sił akcji-reakcji:

nacisk kuli na stół - siła reakcji stołu

nacisk stołu na podłogę - siła reakcji podłogi

ale także

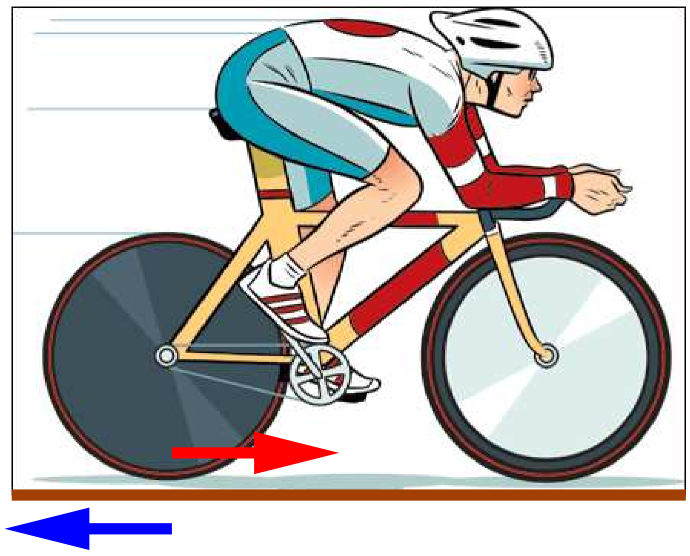
ciężar kuli - siła przyciągania Ziemi przez kulę

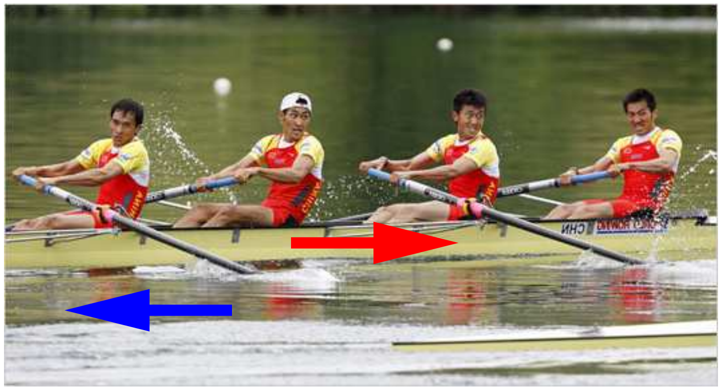
ciężar stołu - siła przyciągania Ziemi przez stół

III zasada dynamiki

Zasada akcji i reakcji

Poruszamy się dzięki siłom reakcji...

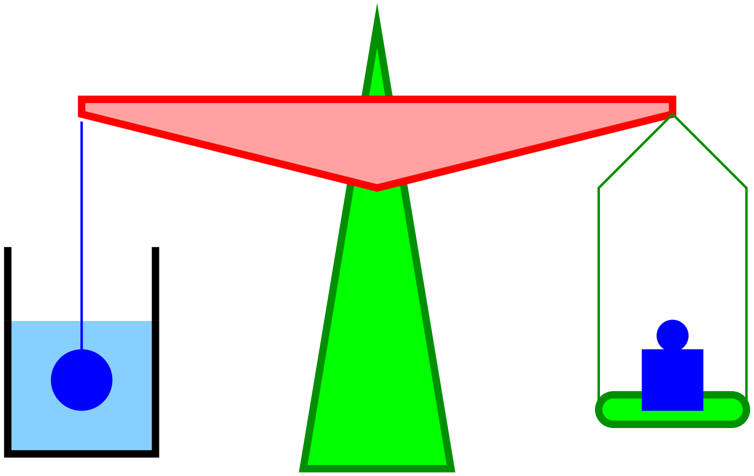


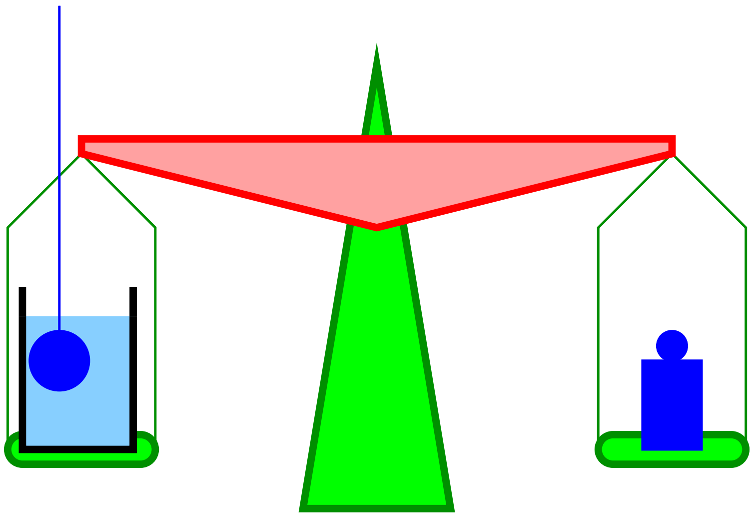


Idąc, jadąc na rowerze czy wiosłując działamy siłą na ziemię (wodę) starając się ją odepchnąć. To siła reakcji powoduje nasz ruch!

III zasada dynamiki

Siła wyporu





Ciało zanurzone w cieczy traci na wadze...

⇒ Ciecz działa na ciało siłą wyporu

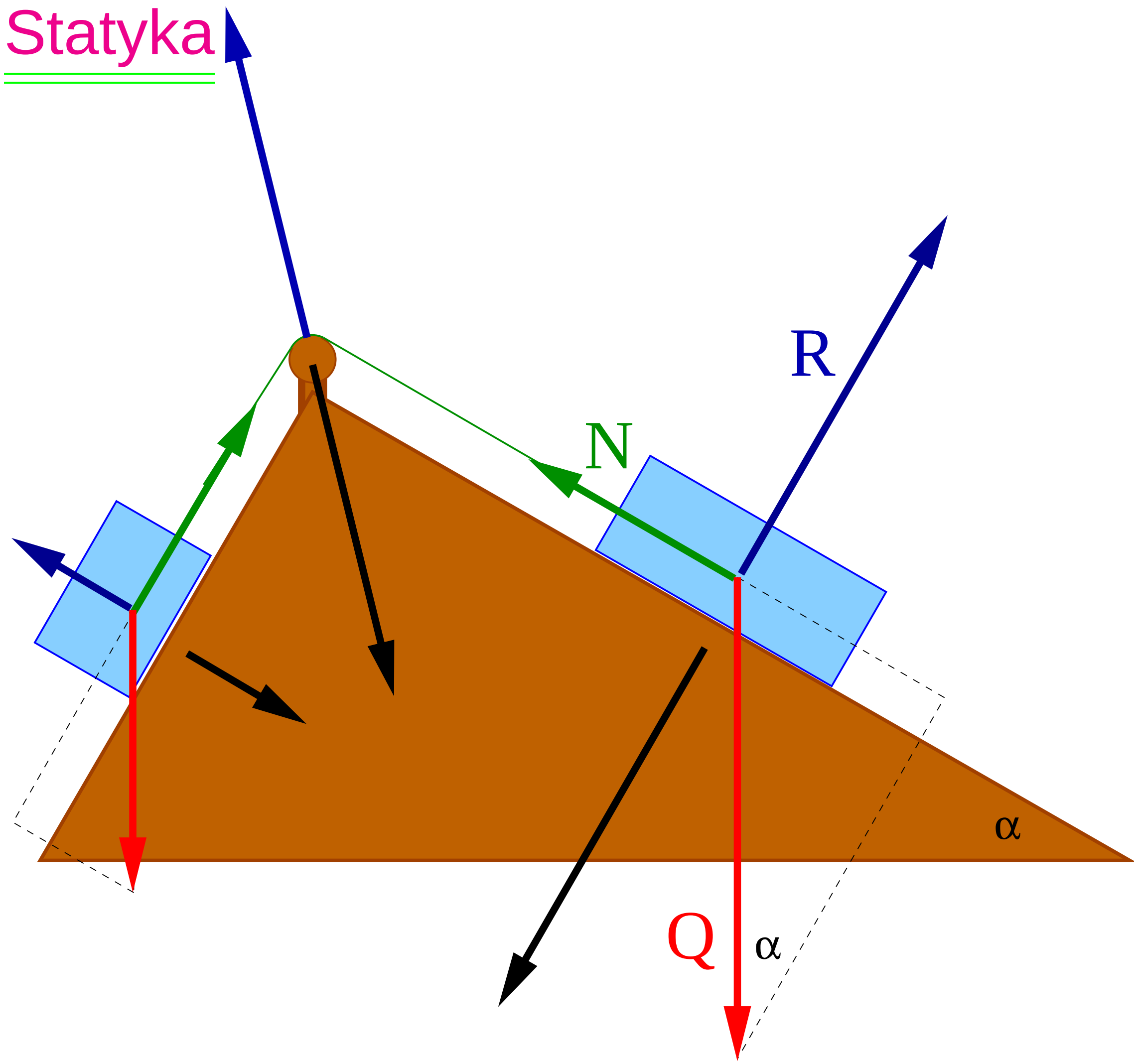
Ale ciecz w której ciało zanurzamy "przybiera" na wadze...

⇒ ciało działa na ciecz...

Łączny ciężar cieczy i ciała musi pozostać niezmieniony...

Zasady dynamiki

Statyka



Ciało spoczywa, jeśli działające na niego siły równoważą się.

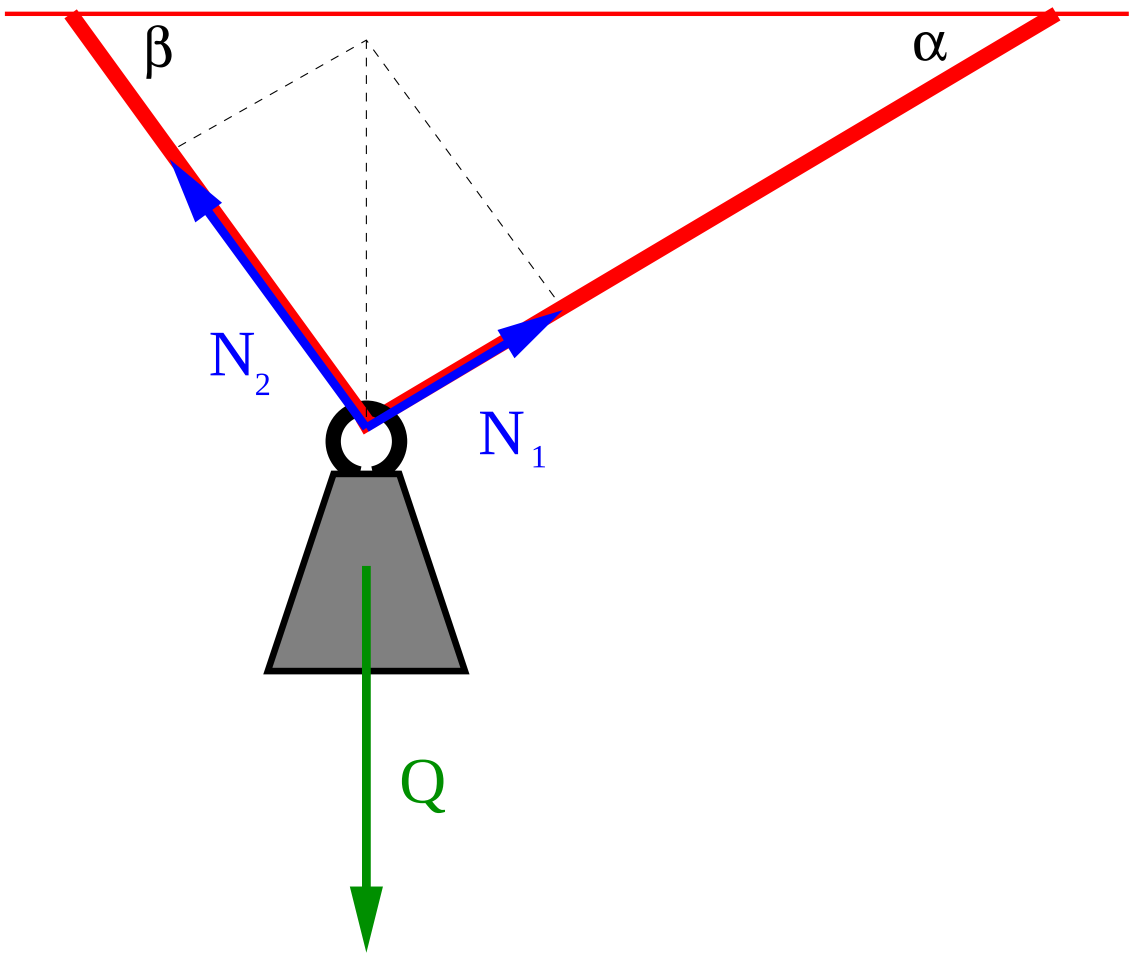
W przypadku ciała na równi, siła ciężkości równoważona jest przez siłę reakcji równi i napięcie sznurka:

$$R = Q \cdot \cos\alpha$$
$$N = Q \cdot \sin\alpha$$

Pomijamy siły tarcia,
sznurek równoległy do równi.

Zasady dynamiki

Statyka



Ciało spoczywa, jeśli działające na niego siły równoważą się.

Równowaga w pionie:

$$Q \;=\; N_1 \sin\alpha \;+\; N_2 \sin\beta$$

Równowaga w poziomie:

$$N_1 \cos\alpha \;=\; N_2 \cos\beta$$

Otrzymujemy:

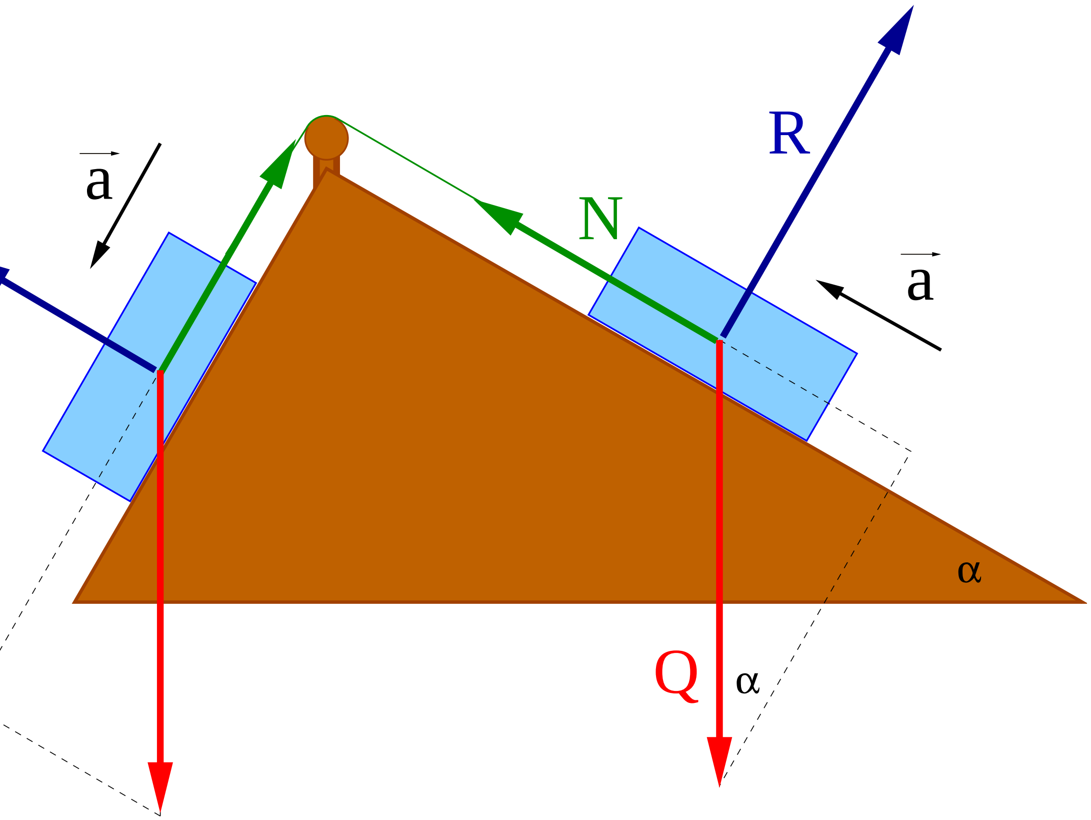
$$N_1 \;=\; \frac{Q\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Dla $\beta = \alpha$:

$$N_1 = N_2 \;=\; \frac{Q}{2\sin(\alpha)}$$

Zasady dynamiki

Ruch



Jeśli ciało porusza się ruchem przyspieszonym to oznacza, że działające na niego siły NIE równoważą się!

W przypadku ciała na równi:

$$\begin{aligned} R &= Q \cdot \cos\alpha \\ N &\neq Q \cdot \sin\alpha \end{aligned}$$

Równowaga sił zachowana na kierunku prostopadłym do równi

Równania ruchu

Podstawowym zagadnieniem dynamiki jest rozwiązywanie równań ruchu,
czyli określanie ruchu ciała ze znajomości działających na nie sił.

Postać ogólna

Siła działająca na ciało może zależeć od położenia i prędkości cząstki oraz czasu

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

$\Rightarrow$ równanie ruchu:

$$\boxed{m \, \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)}$$

Układ trzech równań różniczkowych drugiego rzędu $m(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}) = (F_x, F_y, F_z)$

Ogólne rozwiązanie ma sześć stałych całkowania:

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t, C_1, C_2, \ldots, C_6)$$

Równania ruchu

Warunki początkowe

Aby ściśle określić ruch ciała musimy poza rozwiązaniem równań ruchu wyznaczyć wartości wolnych parametrów (w ogólnym przypadku sześciu)

Najczęściej dokonujemy tego określając warunki początkowe:

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= \vec{r}\,(t_0) \\ \vec{v}_0 &= \vec{v}\,(t_0) \end{aligned}$$

t_0 - wybrana "chwila początkowa"

W mechanice klasycznej obowiązuje "zasada przyczynowości"

Jeśli znamy równania ruchu oraz dokładnie poznamy warunki początkowe możemy jednoznacznie określić stan układu w przeszłości i w przyszłości.

Zachowanie obiektów mikroświata (np. cząstek elementarnych) nie jest deterministyczne.
Granice stosowalności mechaniki klasycznej określa wartość stałej Plancka $h = 6.626 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$

Rówanania ruchu

Przykład

W ogólnym przypadku **siła sprężysta** może być przedstawiona w postaci:

$$\vec{F} = -k\,\vec{r}$$

Siła centralna - działająca zawsze w kierunku środka układu (zawsze możemy tak wybrać), stara się przywrócić ciało do położenia równowagi.

Równanie ruchu sprowadza się do postaci:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\,\vec{r}\,, \quad \text{gdzie: } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\Rightarrow$ oscylator harmoniczny.

Ogólne rozwiązanie równania ruchu:

$$\vec{r}(t) = \vec{A}\cdot\cos\omega t + \vec{B}\cdot\sin\omega t$$

Rówanania ruchu

Oscylator harmoniczny

Wartości $\vec{A}$ i $\vec{B}$ możemy wyznaczyć z warunków początkowych:

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 = \vec{r}(0) &= \vec{A} \\ \vec{v}_0 = \vec{v}(0) &= \omega \vec{B} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cdot \cos \omega t + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \cdot \sin \omega t$$

Ruch jest płaski, odbywa się w płaszczyźnie wyznaczonej przez $\vec{r}_0$ i $\vec{v}_0$.

Torem ruchu w ogólnym przypadku jest elipsa.

W szczególnym przypadku torem ruchu może być:

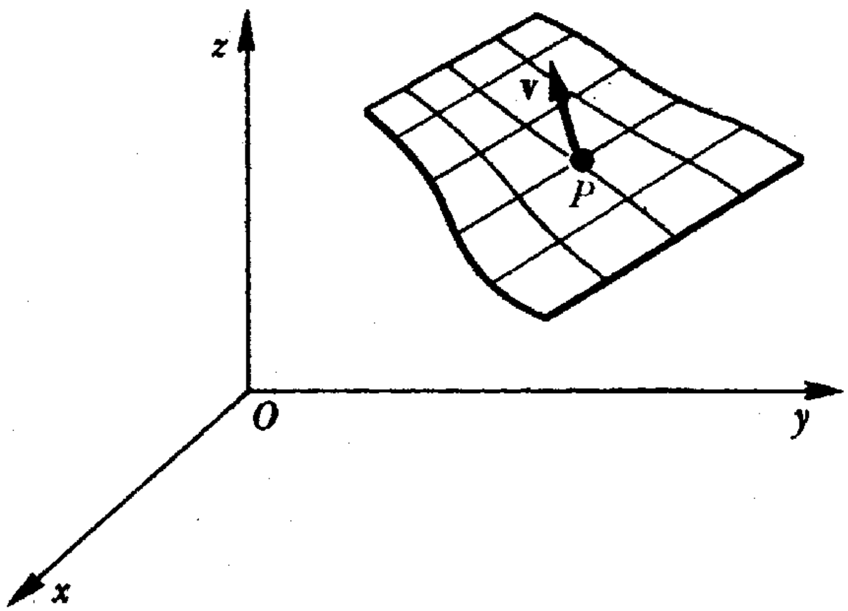
- odcinek, jeśli $\vec{r}_0 || \vec{v}_0$ (albo $\vec{r}_0 = 0$ albo $\vec{v}_0 = 0$)
- okrąg, jeśli $\vec{r}_0 \perp \vec{v}_0$ i $v_0 = \omega \cdot r_0$

Równania ruchu

Do tej pory rozważaliśmy ruch ciała, które może się przemieszczać bez ograniczeń w całej trójwymiarowej przestrzeni - trzy stopnie swobody: f=3.

W każdej chwili stan ciała opisuje sześć parametrów (dwa wektory: $\vec{r}$ i $\vec{v}$)

Więzy



W wielu przypadkach ruch ciała jest jednak ograniczony $\Rightarrow$ cząstka nieswobodna

$\Leftarrow$ powierzchnia więzów

Ogólny warunek opisujący powierzchnie:

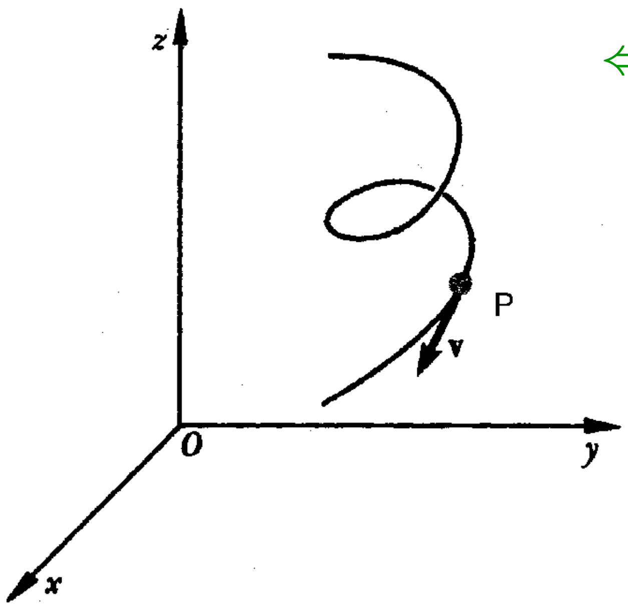
$$h(x, y, z, t) \;=\; 0$$

$\Rightarrow$ dwa stopnie swobody f=2

cztery parametry początkowe

Równania ruchu

Więzy



$\Leftarrow$ krzywa więzów

Krzywą w przestrzeni możemy opisać porzez dwa warunki:

$$h_1(x,y,z,t) = 0$$
$$h_2(x,y,z,t) = 0$$

$\Rightarrow$ jeden stopień swobody f=1,
dwa parametry początkowe

Do równania ruchu musimy wprowadzić dodatkową siłę reakcji więzów

$$\boxed{m\,\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) + \vec{F}_R}$$

gdzie: $\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$ - siły zewnętrzne, $\vec{F}_R$ - reakcja więzów

Rówanania ruchu

Więzy

Przy braku oporów ruchu (więzy idealne) siła reakcji więzów jest zawsze prostopadła do powierzchni lub krzywej więzów.

Więzy mogą być stacjonarne (*skleronomiczne*), niezależne od czasu:

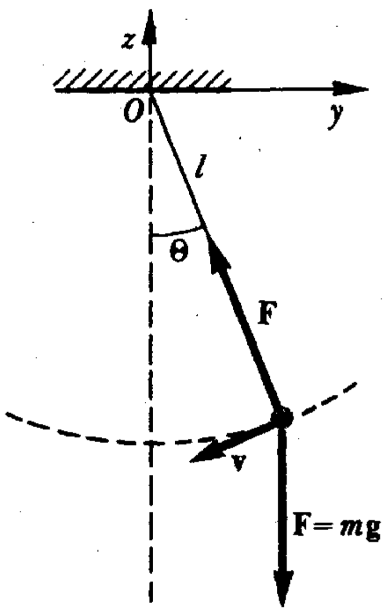
$$h(x, y, z) = 0$$

lub zależne od czasu (*reonomiczne*):

$$h(x, y, z, t) = 0$$

Przykład

Wahadło jednowymiarowe



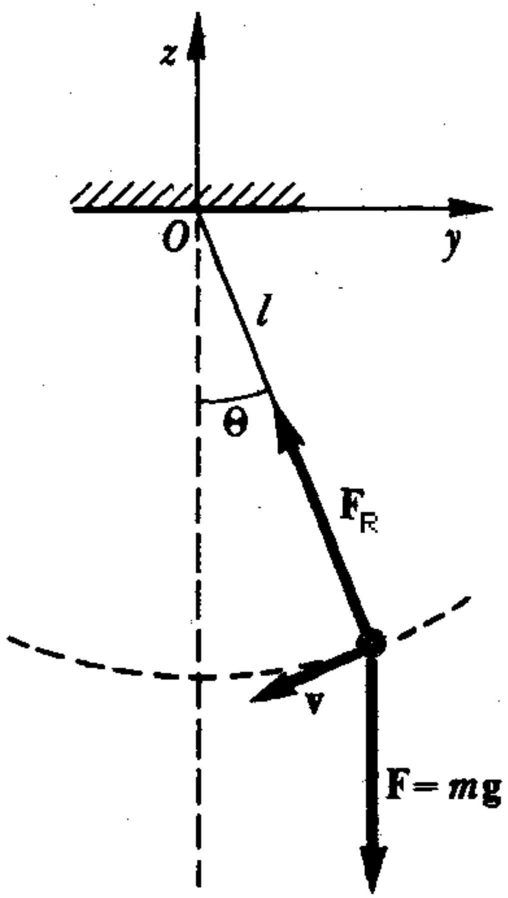
Równania więzów:

$$l^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \text{ - sfera}$$

$$x = 0 \text{ - płaszczyzna}$$

Rówanania ruchu

Wahadło



Warunki narzucone przez więzy najłatwiej uwzględnić opisując położenie kulki przez kąt Θ:

$$y = \ l \sin\Theta \qquad z = -l \cos\Theta$$

O sile reakcji $F_R(t)$ wiemy jedynie tyle, że działa wzdłuż nitki.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{F_R}{m}\sin\Theta \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -g + \frac{F_R}{m}\cos\Theta$$

$\Rightarrow$ przyspieszenie styczne nie zależy od F_R:

$$a_\Theta \equiv \cos\Theta\,\frac{d^2y}{dt^2} + \sin\Theta\,\frac{d^2z}{dt^2} \ = \ -g\cdot\sin\Theta$$

W przybliżeniu małych kątów ($\sin\theta \approx \theta$) otrzymujemy:

$$l\,\frac{d^2\Theta}{dt^2} \ = \ -g\cdot\Theta$$

$\Rightarrow$ oscylator harmoniczny częstość $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, okres $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Rówanania ruchu

Wahadło

Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego:

$$\Theta(t) = \Theta_0 \cdot \cos(\omega t) \qquad\qquad y = l\ \sin\Theta \qquad z = -l\ \cos\Theta$$

Siłę reakcji możemy wyznaczyć z równania ruchu w z:

$$\frac{dz}{dt} = l \sin\Theta\ [-\Theta_0\,\omega \sin(\omega t)]$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = l\omega^2\ \cos\Theta\ [\Theta_0\ \sin(\omega t)]^2 - l\omega^2 \sin\Theta\ \Theta_0\ \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow\ F_R = \frac{m}{\cos\Theta}\left(\frac{d^2z}{dt^2} + g\right) = mg\left[\Theta_0^2\ \sin^2(\omega t) - \tan\Theta\ \Theta_0 \cos(\omega t) + \frac{1}{\cos\Theta}\right]$$

W przybliżeniu małych kątów: $\tan\Theta \approx \Theta$ i $\frac{1}{\cos\Theta} \approx 1 + \frac{1}{2}\Theta^2$

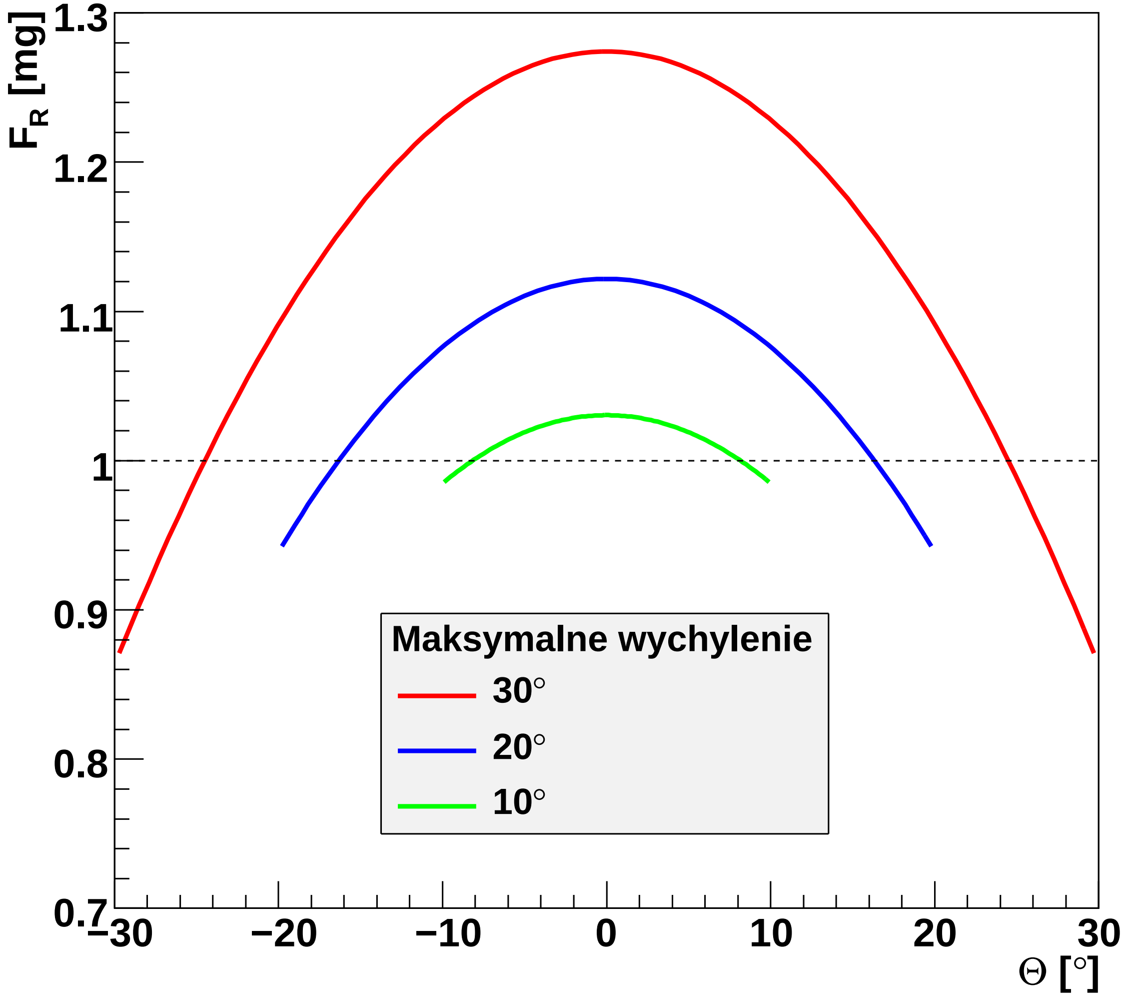
$$F_R = mg\left[\Theta_0^2\ \sin^2(\omega t) - \frac{1}{2}\Theta_0^2\ \cos^2(\omega t) + 1\right]$$

Rówanania ruchu

Wahadło

Ostatecznie otrzymujemy:

$$F_R(\Theta) \;=\; mg\left[1+\Theta_0^2-\frac{3}{2}\Theta^2(t)\right]$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt **Fizyka wobec wyzwań XXI w.**

współfinansowany przez Unię Europejską

ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego

w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki