



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



# Dynamika

## Fizyka I (Mechanika)

### Wykład IV:

- Rozwiązywanie równań ruchu
  - ⇒ ruch w jednorodnym polu elektrycznym i magnetycznym
- Dynamika ruchu po okręgu
- Siły sprężyste
- Opory ruchu

# Równania ruchu

Podstawowym zagadnieniem dynamiki jest rozwiązywanie równań ruchu, czyli określanie ruchu ciała ze znajomości działających na nie sił.

Siła działająca na ciało może zależeć od położenia i prędkości cząstki oraz czasu  
⇒ równanie ruchu:

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

Ogólne rozwiązanie ma sześć stałych całkowania:

$$\vec{r} = \vec{r}(t, C_1, C_2, \dots, C_6)$$

Aby ściśle określić ruch ciała musimy poza rozwiązaniem równań ruchu wyznaczyć wartości wolnych parametrów (w ogólnym przypadku sześciu)

Najczęściej dokonujemy tego określając warunki początkowe:

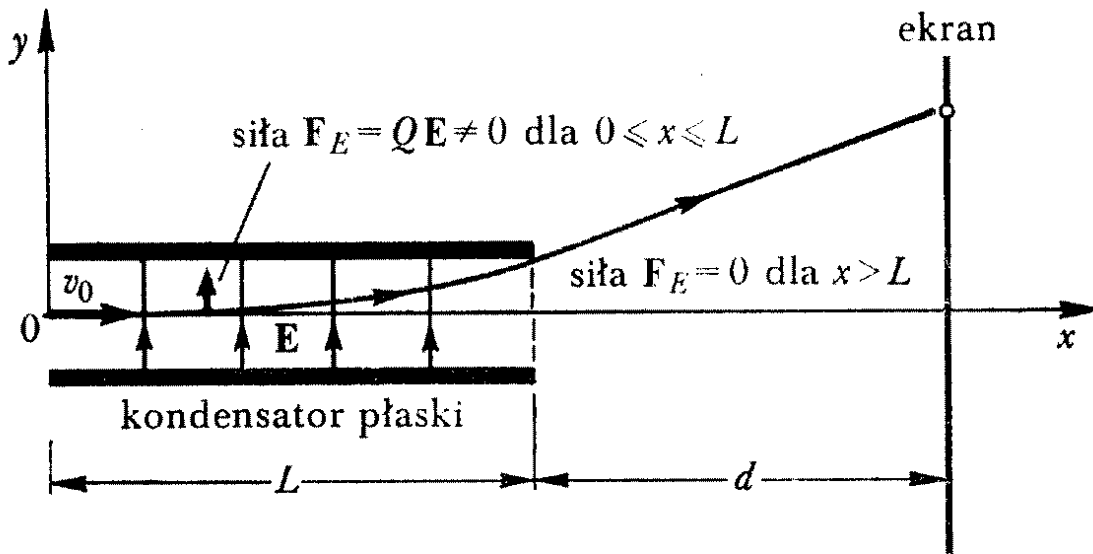
$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$$

$t_0$  - wybrana "chwila początkowa"

# Równania ruchu

## Pole elektryczne



Stałe jednorodne pole elektryczne  $\vec{E} = (0, E, 0)$

W chwili  $t_0 = 0$  w punkcie  $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$  w pole wlatuje z prędkością  $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$  cząstka o masie  $m$  i ładunku  $Q$

$$\vec{F}_E = Q \vec{E}$$

Równania ruchu:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Q E$$

Całkowanie + warunki początkowe

$$\Rightarrow x(t) = v_0 \cdot t$$

$$y(t) = \frac{Q E}{2m} \cdot t^2$$

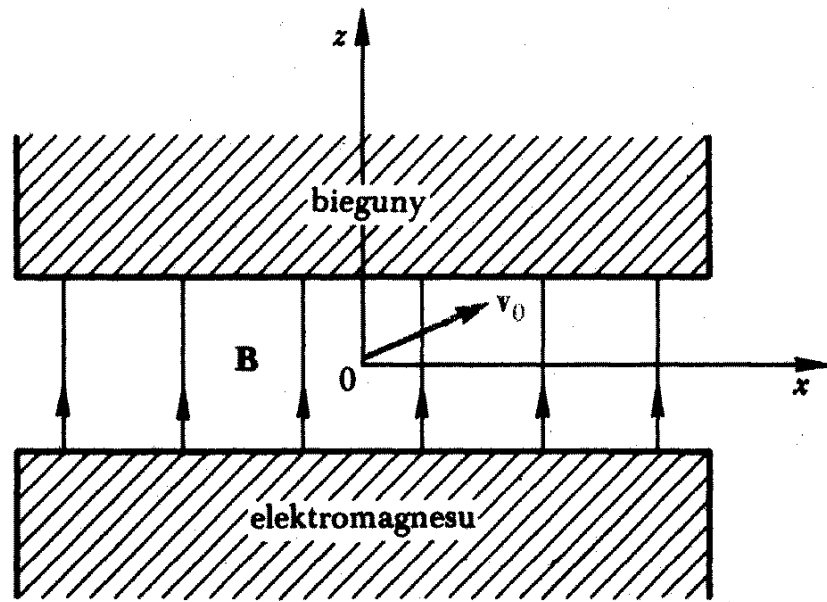
$$\Rightarrow \text{równanie toru: } y = \frac{Q E}{2m v_0^2} \cdot x^2$$

Kąt odchylenia:

$$\tan \theta = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} = \frac{Q E L}{m v_0^2}$$

# Równania ruchu

## Pole magnetyczne



Stałe jednorodne pole  $\vec{B} = (0, 0, B)$

W chwili  $t_0 = 0$  w punkcie  $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$   
w pole wlatuje z prędkością  $\vec{v}_0 = (0, v_0, 0)$   
cząstka o masie  $m$  i ładunku  $Q$

$$\vec{F}_B = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{siła Lorenza}$$

Z definicji iloczynu wektorowego

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = Q \cdot \begin{pmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

Układ dwóch równań:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = Q B \frac{dy}{dt}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -Q B \frac{dx}{dt}$$

Całkując pierwsze równanie

$$m \frac{dx}{dt} = Q B (y - y_c)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = - \left( \frac{Q B}{m} \right)^2 (y - y_c)$$

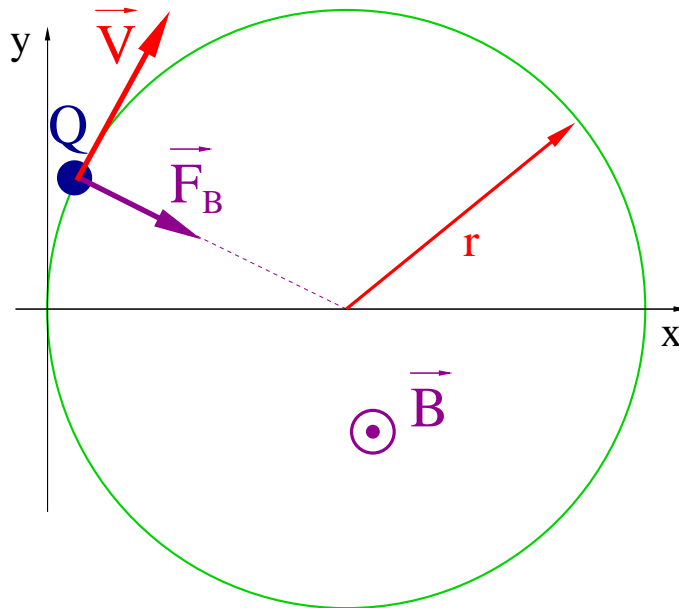
# Równania ruchu

## Pole magnetyczne

Otrzymujemy równania ruchu:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 (y - y_c) \quad \text{oscylator}$$
$$\frac{dx}{dt} = \omega (y - y_c) \quad \omega = \frac{Q B}{m}$$

⇒ ruch po okręgu  $\omega$  - częstość cyklotronowa



Rozwiązanie:

$$x = r \cdot \sin(\omega t + \phi_0) + x_c$$
$$y = r \cdot \cos(\omega t + \phi_0) + y_c$$

gdzie  $r$  - promień cyklotronowy:

$$r = \frac{m v_0}{Q B}$$

Z warunków początkowych  
( $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$  i  $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ ):

$$x = r \cdot (1 - \cos \omega t)$$
$$y = r \cdot \sin \omega t$$

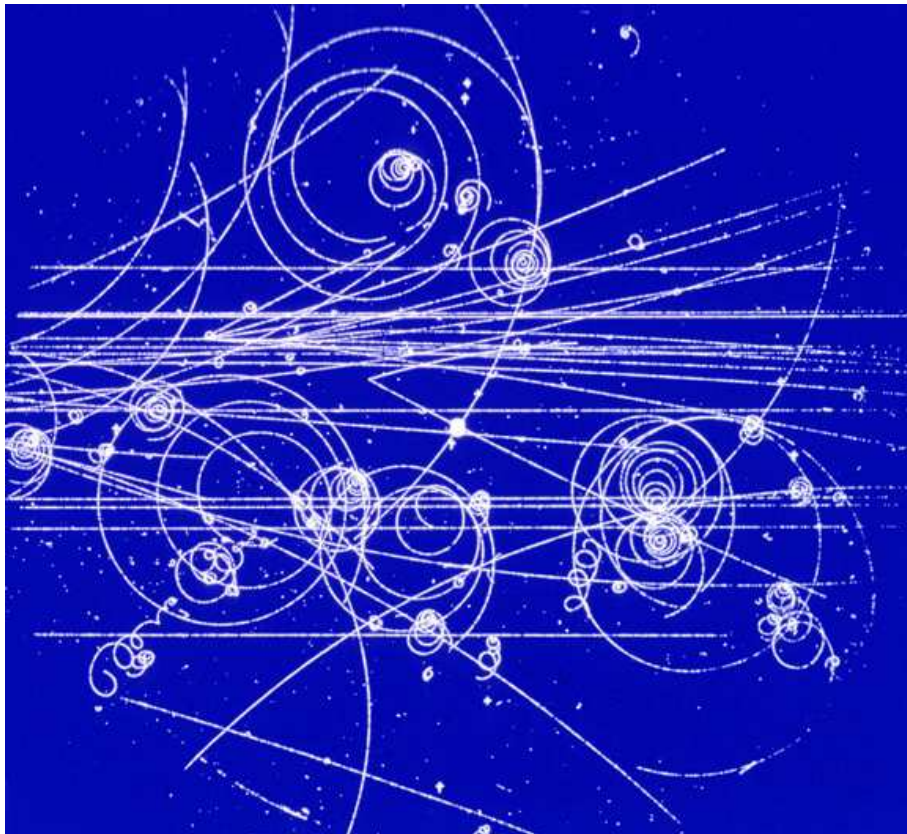
Ruch w polu magnetycznym  
jest jednostajny:  $v = \text{const}$

$$r = \frac{m v}{Q B} = \frac{p}{Q B}$$

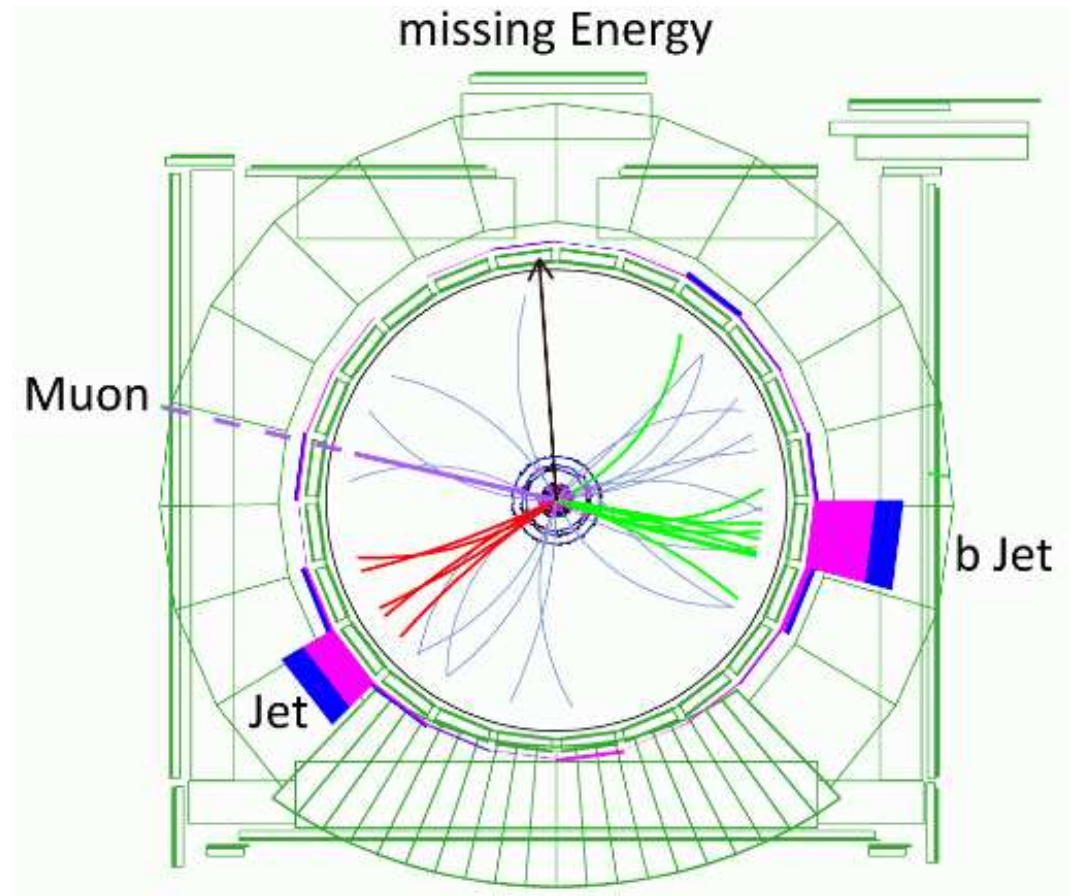
# Równania ruchu

W fizyce cząstek **pole magnetyczne** powszechnie wykorzystywane jest do **pomiaru pędu cząstek**. Wszystkie długożyciowe cząstki naładowane mają ładunek  $\pm 1e$ ...

Komora pęcherzykowa w CERN



Detektor CDF w Fermilab



# Równania ruchu

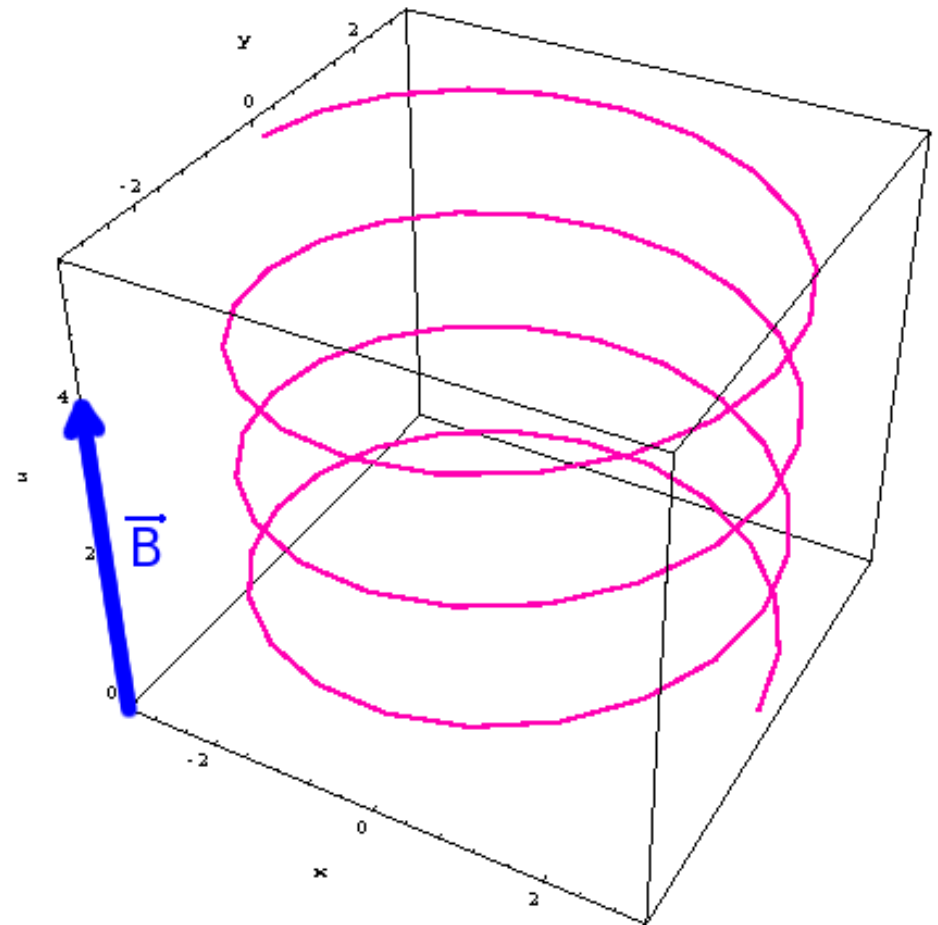
## Pole magnetyczne

W ogólnym przypadku prędkość cząstki  $\vec{V}$  nie musi być prostopadła do wektora indukcji pola magnetycznego  $\vec{B}$ .

Jednak siła Lorenza zawsze prostopadła do  $\vec{B} \Rightarrow$  na kierunku równoległym do pola znika!

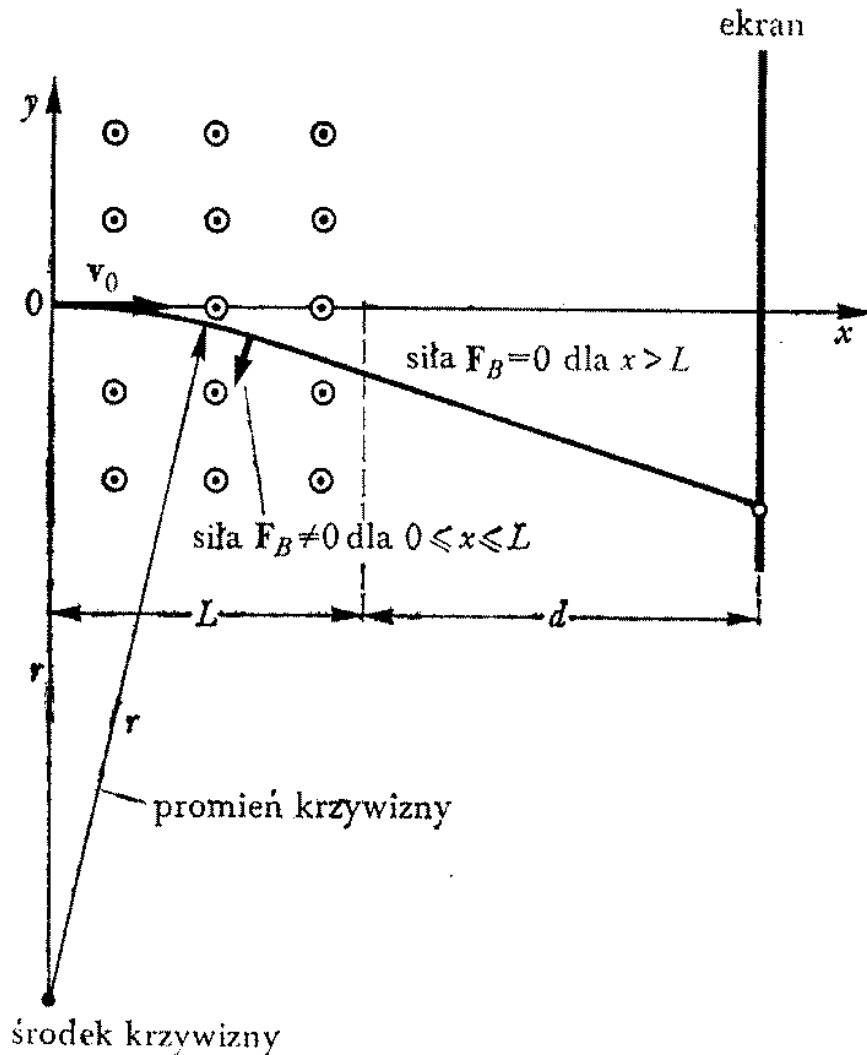
W kierunku wektora pola ruch cząstki jest ruchem jednostajnym.

W ogólnym przypadku torem ruchu jest spirala.



# Równania ruchu

## Pole magnetyczne



Odchylenie cząstki przelatującej przez wąski obszar jednorodnego pola zakładamy  $\omega t \ll 1$ :

$$x \approx r \cdot \omega t$$

$$y \approx r \cdot \left[ \left( 1 - \frac{(\omega t)^2}{2} \right) - 1 \right] \\ = - \frac{x^2}{2r}$$

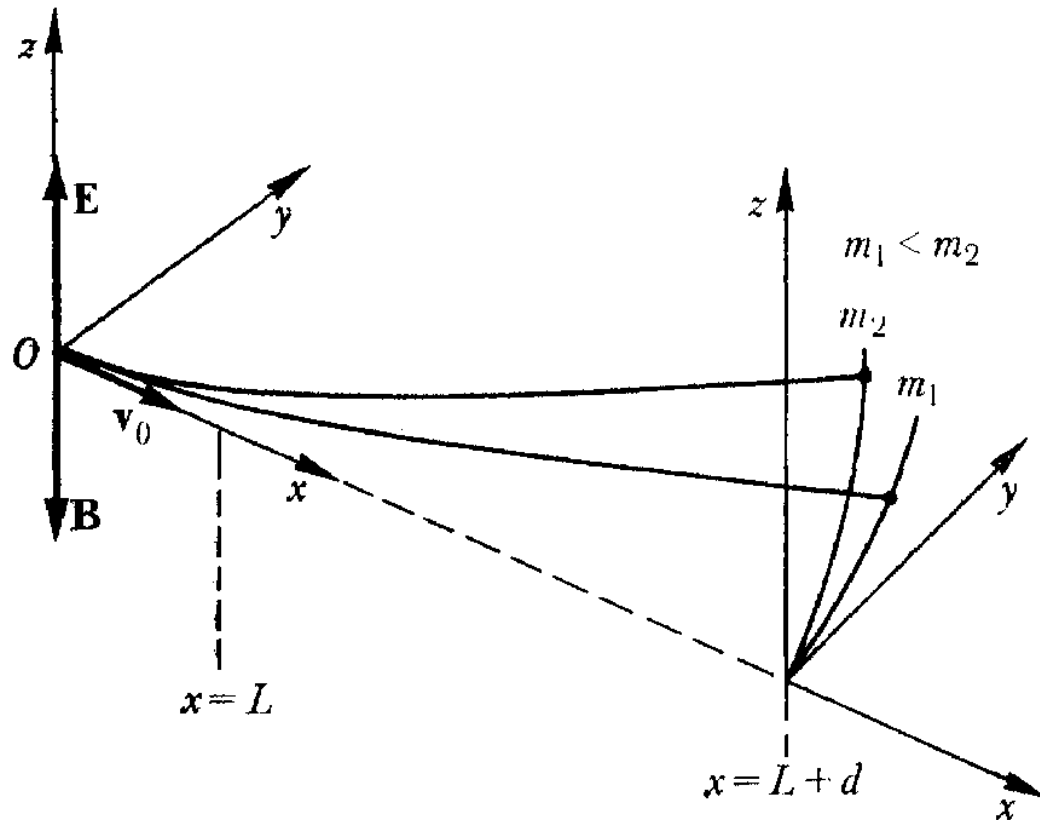
Kąt odchylenia:

$$\tan \theta = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} = \frac{L}{r} = \frac{Q B L}{m v_0}$$



# Równania ruchu

## Spektroskop Thomsona (1913)



Cząstki przelatują przez obszar  
jednorodnych pól  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$

$$\vec{E} \updownarrow \vec{B}$$

Pozycja cząstki na ekranie  $d \gg L$

$$y_e \approx d \cdot \tan \theta_B = \frac{Q B L d}{m v_0}$$

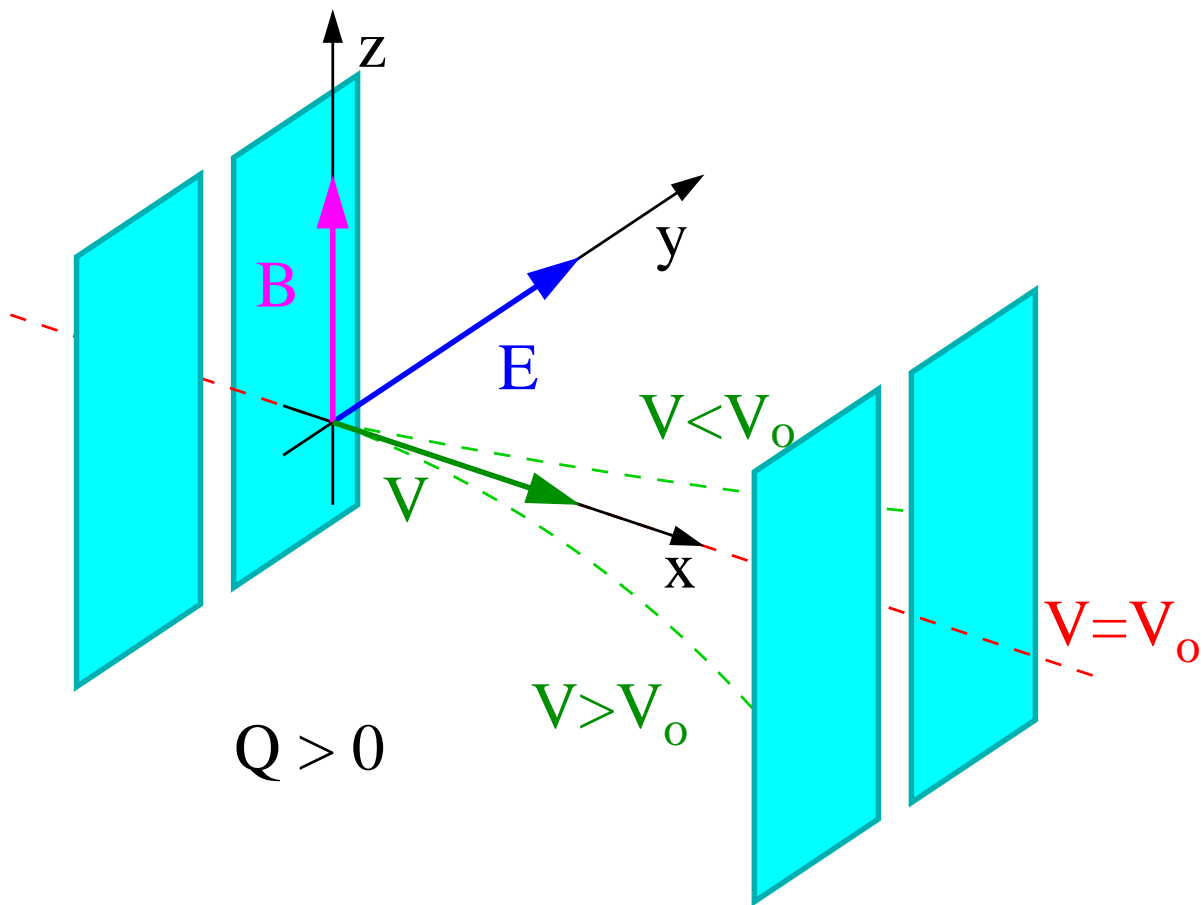
$$z_e \approx d \cdot \tan \theta_E = \frac{Q E L d}{m v_0^2}$$

$$\Rightarrow z_e = \frac{m}{Q} \cdot \frac{E}{B^2 L d} \cdot y_e^2$$

Cząstki o **różnych**  $v_0$  układają się na **parabolach** odpowiadających ich  $\frac{m}{Q}$   
 $\Rightarrow$  separacja izotopów o różnych masach - **spektroskopia masowa**

# Równania ruchu

## Selektor prędkości



Cząstka w skrzyżowanych  
jednorodnych polach  $\vec{E} \perp \vec{B}$

$$\vec{F}_E = Q \cdot \vec{E}$$

$$\vec{F}_B = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Dla prędkości  $v_0 = \frac{E}{B}$   
wypadkowa siła  $\vec{F}_E + \vec{F}_B = 0$

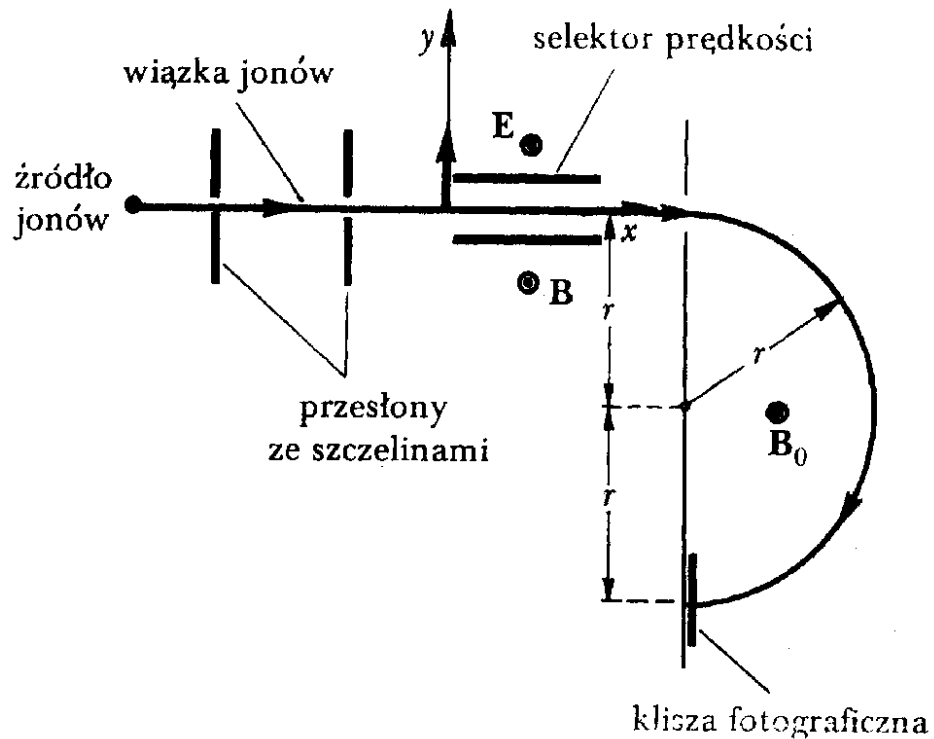
$\Rightarrow$  tor prostoliniowy

$\Rightarrow$  metoda selekcji cząstek  
o ustalonej prędkości

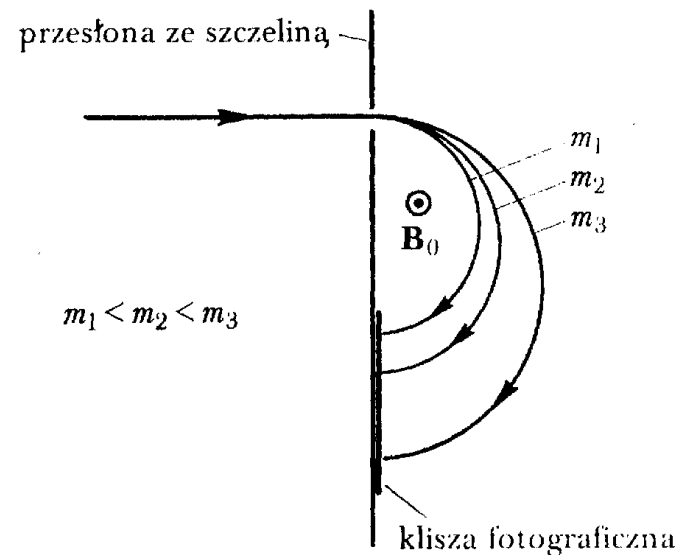
niezależnie od ich  $Q$  i  $m$

# Równania ruchu

## Spektrometr Bainbridge'a



Mierzymy promień cyklotronowy  $r = \frac{m v_0}{Q B}$   
dla cząstek o ustalonej prędkości  $v_0 = \frac{E}{B}$   
 $\Rightarrow$  pomiar  $\frac{m}{Q}$



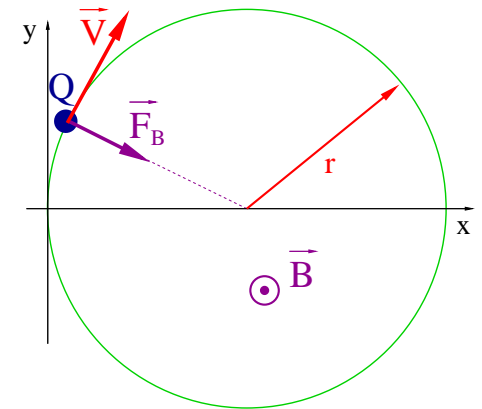
Cząstki o różnych masach zaczną kliszę w różnych odległościach od szczeliny

# Ruch po okręgu

## Zasada bezwładności

“Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszają ciała do zmiany tego stanu.” I. Newton

⇒ aby ciało pozostawało w ruchu po okręgu konieczne jest działanie siły ⇒ **siła dośrodkowa**



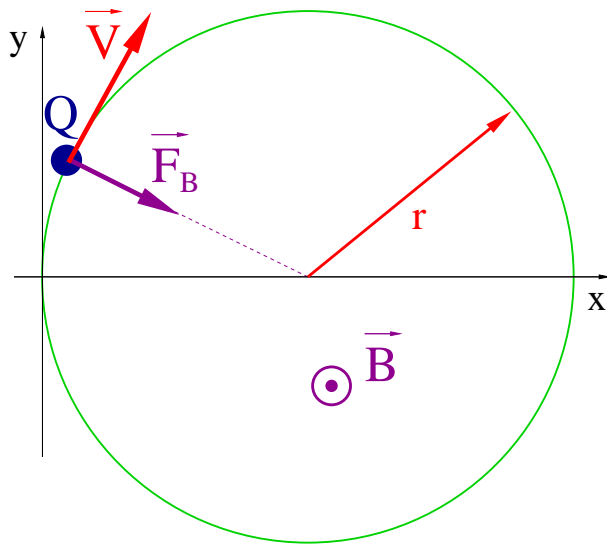
Ruch po okręgu może być wynikiem działania różnego rodzaju sił:

- siły zewnętrzne
  - ⇒ siła Lorenza (pole magnetyczne)
  - ⇒ siły sprężystości
- siły reakcji więzów (kulka na nitce)
- wypadkowej sił reakcji i sił zewnętrznych (regulator Watta, kulka w wirującym naczyniu...)

# Ruch po okręgu

## Siła dośrodkowa

Cząstka naładowana w polu magnetycznym



Siła Lorenza:

$$\vec{F}_B = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Dla  $\vec{v} \perp \vec{B}$ :

$$F_B = Q v B$$

$$\Rightarrow F_B = \frac{Q B}{m v} m v^2 = \frac{1}{r} m v^2$$

Promień cyklotronowy:

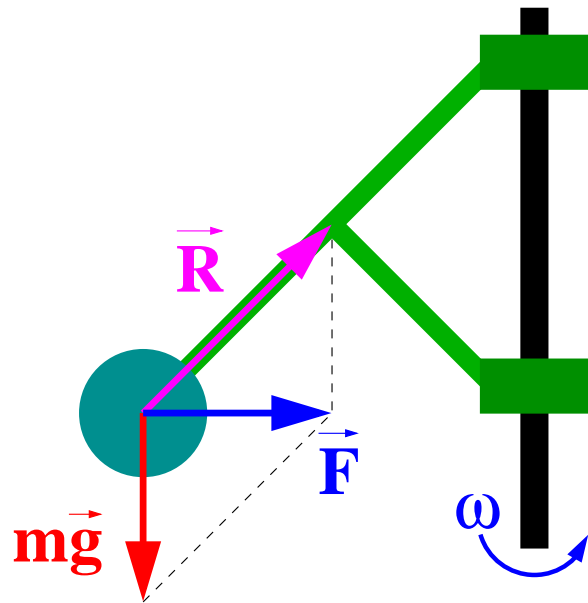
$$r = \frac{m v}{Q B} = \frac{p}{Q B}$$

$$F_B = \frac{m v^2}{r} = m \omega^2 r$$

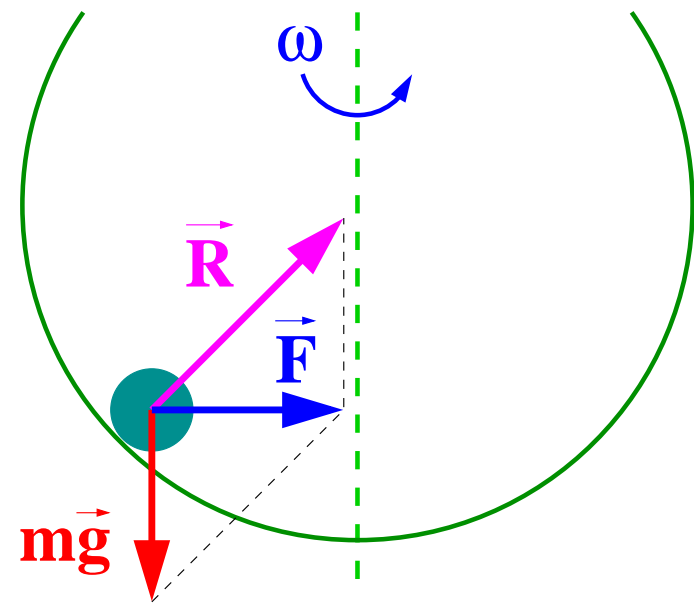
# Ruch po okręgu

## Siła dośrodkowa

Regulator Watta



Kulka w wirującym naczyniu

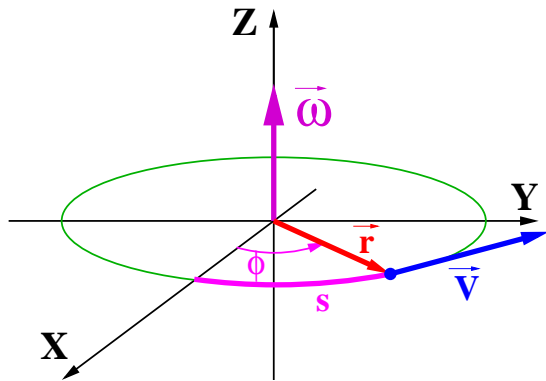


Siła dośrodkowa jest wypadkową siły reakcji i siły ciężkości:

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R}$$

# Ruch po okręgu

## Siła dośrodkowa



$$x = r \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$y = r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$z \equiv 0$$

$$\Rightarrow a_x = -\omega^2 r \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$a_y = -\omega^2 r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

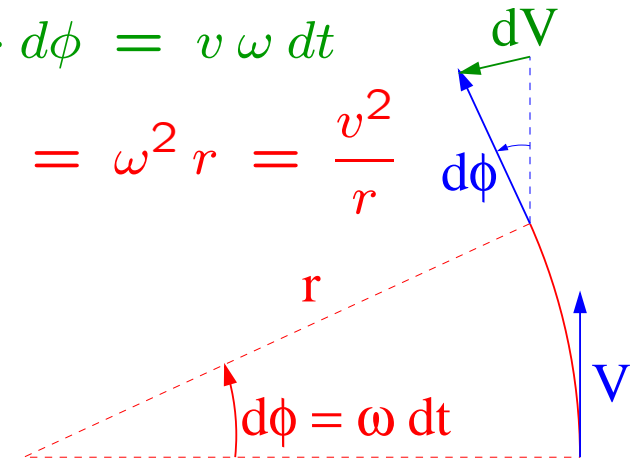
$$\Rightarrow \vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -m \omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$dv = v \cdot d\phi = v \omega dt$$

$$a = v \omega = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$



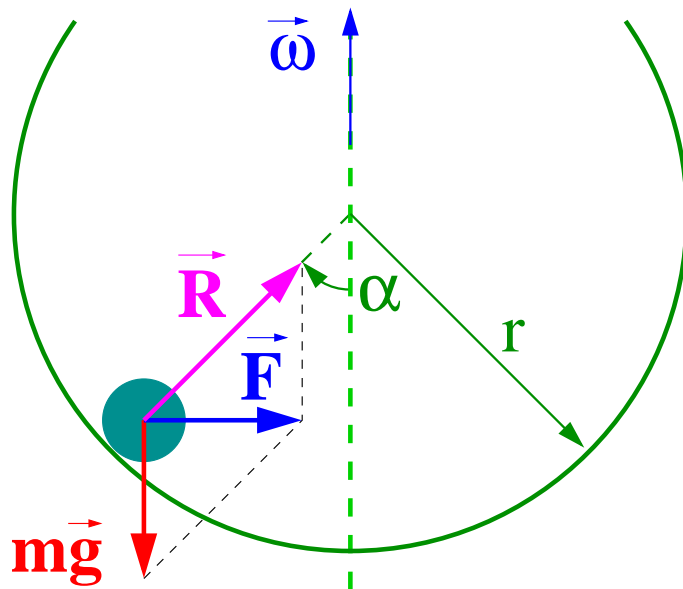
W zapisie wektorowym:  $\vec{\omega} = const$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= -\omega^2 \cdot \vec{r}_{\perp} \quad \vec{r}_{\perp} = (x, y, 0) \end{aligned}$$

# Ruch po okręgu

## Siła dośrodkowa

### Kulka w wirującym naczyniu



$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R}$$

Siła dośrodkowa skierowana poziomo ze składania sił:

$$\Rightarrow R \cdot \cos \alpha - mg = 0$$

$$F = R \cdot \sin \alpha = mg \cdot \tan \alpha$$

Z równania ruchu:

$$F = m\omega^2 r_{\perp} = m\omega^2 r \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 r}$$

Kulka odchyli się dopiero dla  $\omega > \sqrt{\frac{g}{r}} = \omega_0$

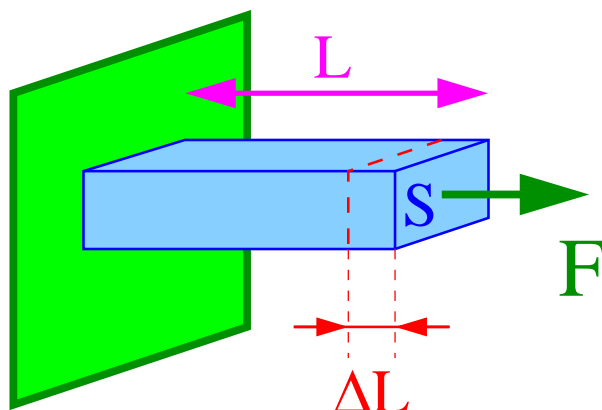
$\omega_0$  - częstość drgań wahadła matematycznego o długości  $r$



# Siła sprężysta

## Prawo Hooke'a

Opisuje zależność siły sprężystej od odkształcenia ciała:

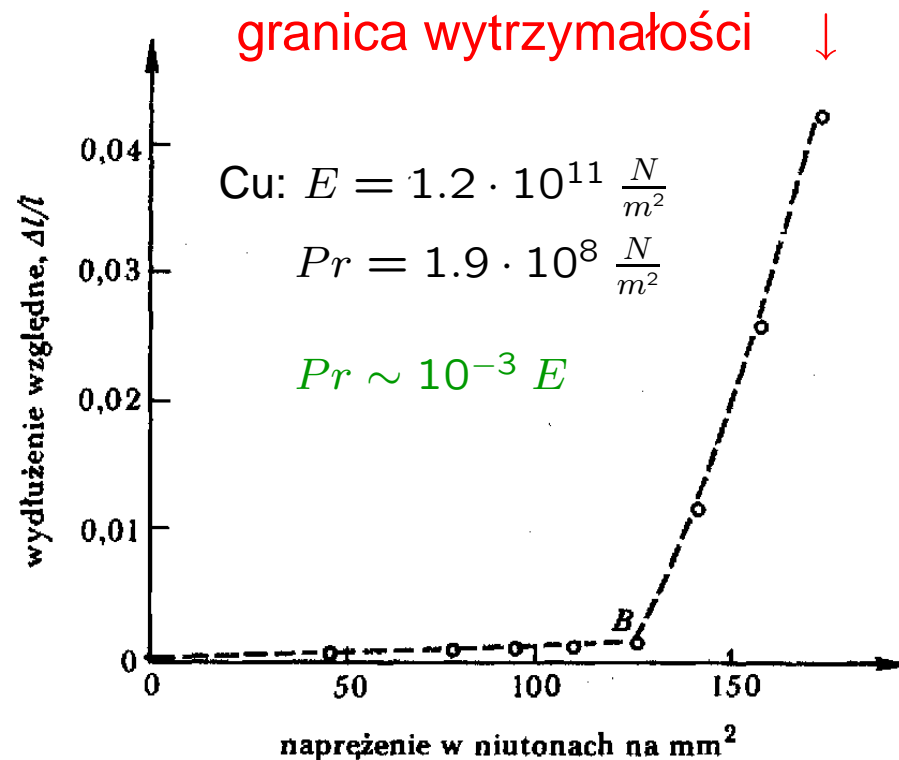


$$F = E S \frac{\Delta L}{L}$$

$E$  - moduł Younga [ $N/m^2$ ]

napężenie odpowiadające dwukrotnemu wydłużeniu

Prawo Hooke'a jest prawem empirycznym  
Jest słuszne tylko dla małych naprężeń.



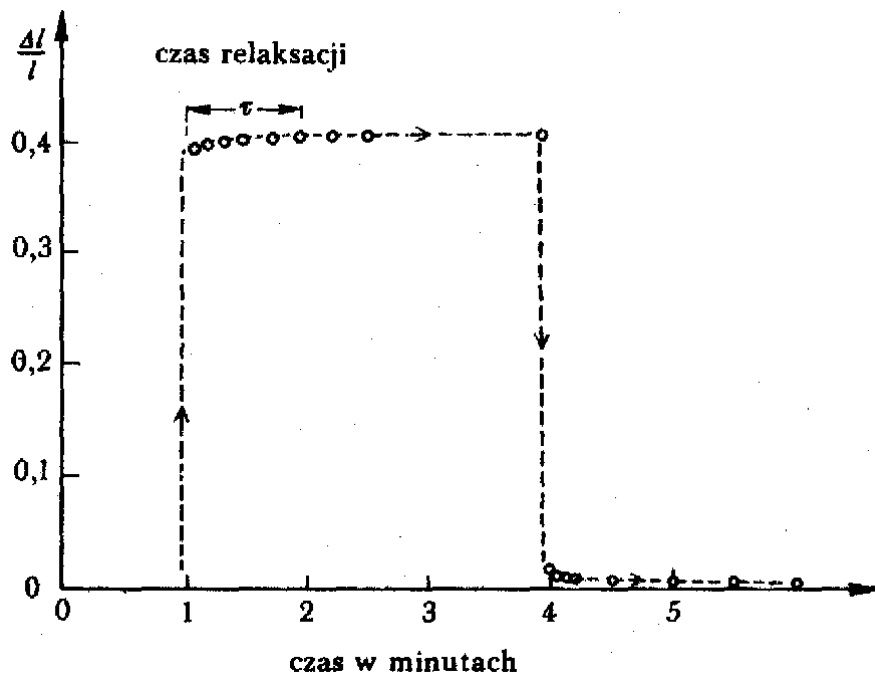
granica proporcjonalności  $\uparrow$  ( $Pr$ )

# Siła sprężysta

## Relaksacja

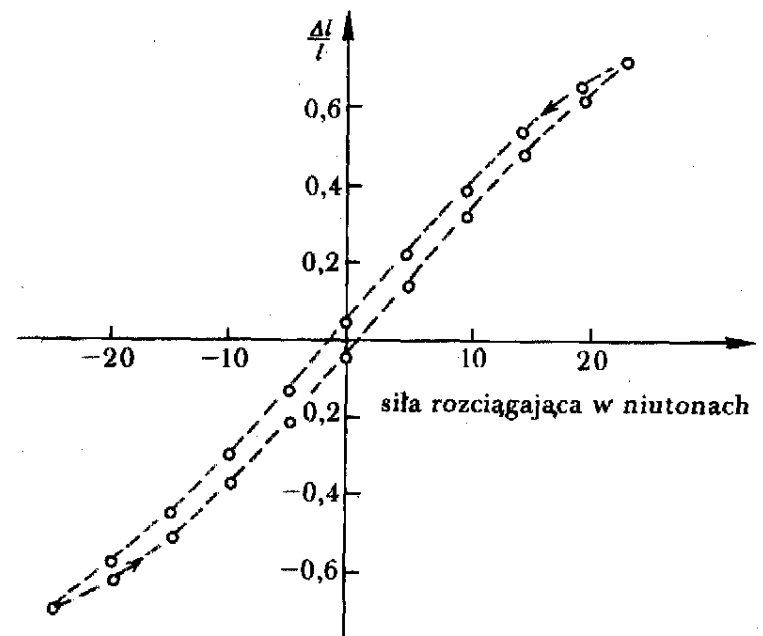
Prawo Hooke'a odnosi się do sytuacji statycznej.

Od momentu przyłożenia siły do osiągnięcia odpowiedniego odkształcenie mija skończony czas - **czas relaksacji**



podobnie gdy siła przestanie działać

## Histereza

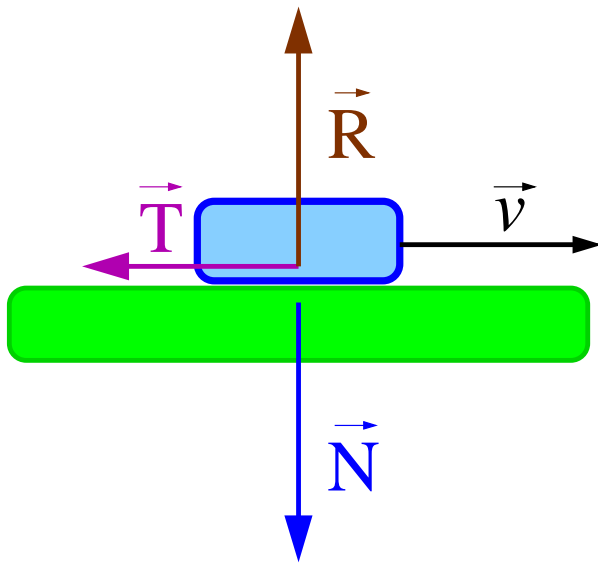


Przyłożenie dużej siły, nawet na krótki czas może powodować trwałe odkształcenie

⇒ trzeba przyłożyć siłę przeciwnie skierowaną

# Tarcie

## Tarcie kinetyczne



Siła pojawiająca się między dwoma powierzchniami **poruszającymi się** względem siebie, dociskanymi siłą  $N$ .

Ścisły opis sił tarcia jest bardzo skomplikowany.

⇒ Prawo empiryczne:

$$\vec{T} = -\mu_k \vec{i}_v N \quad \vec{i}_v = \frac{\vec{v}}{v}$$

Siła tarcia kinetycznego:

- jest proporcjonalna do  $\perp$  siły dociskającej
- nie zależy od powierzchni zetknięcia
- nie zależy od prędkości

Prawo empiryczne ⇒ przybliżone !!!

# Tarcie

## Obraz mikroskopowy

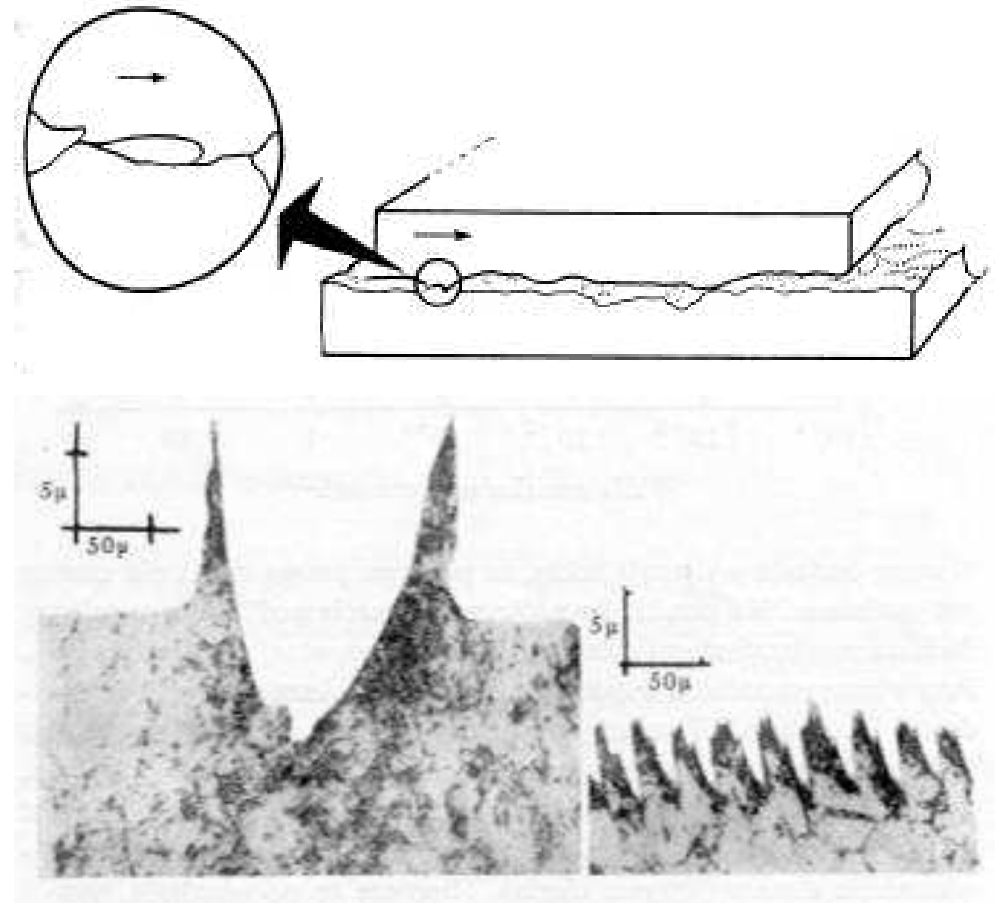
Tarcie wywołane jest przez oddziaływanie elektromagnetyczne cząstek stykających się ciał.

Powierzchnie nigdy nie są idealnie równe

na poziomie mikroskopowym cząstki jednego ciała “blokują drogę” cząstkom drugiego ciała

⇒ muszą zostać “odepchnięte”

wypolerowana miedź ⇒



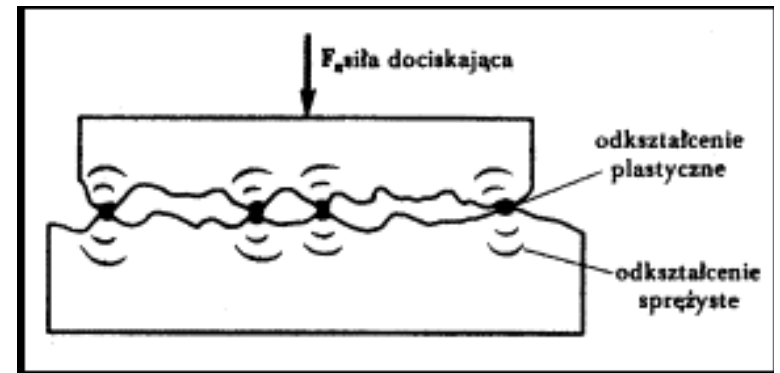
# Tarcie

## Zależność od nacisku

Powierzchnia rzeczywistego (mikroskopowego) styku ciał jest w normalnych warunkach wiele rzędów wielkości mniejsza niż powierzchnia geometryczna:

siła dociskająca	ułamek powierzchni
1 N/cm <sup>2</sup>	0.00001
2.5 N/cm <sup>2</sup>	0.000025
50 N/cm <sup>2</sup>	0.0005
250 N/cm <sup>2</sup>	0.0025

(płytki stalowe)



⇒ efektywna powierzchnia styku proporcjonalna do nacisku

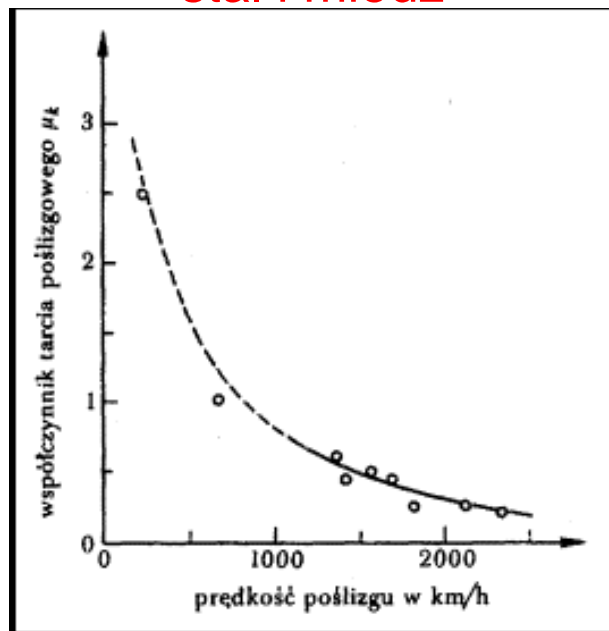
⇒ liczba oddziaływań na poziomie atomowym proporcjonalna do nacisku

# Tarcie

## Odstępstwa od praw empirycznych

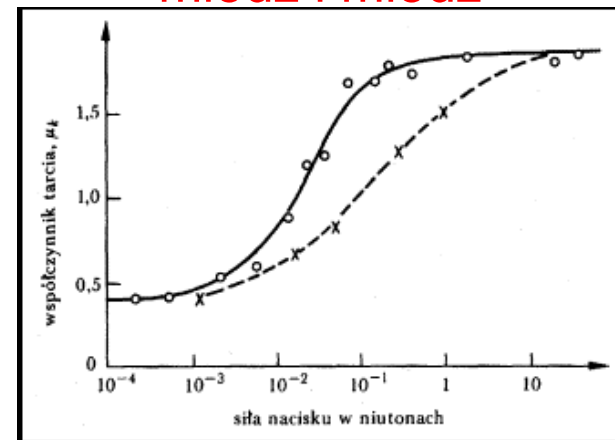
Przy dużych prędkościach może się pojawić zależność  $\mu_k$  od prędkości  $v$ :

stal i miedź



Przy dużych siłach dociskających mogą się pojawić odstępstwa od zależności liniowej:

miedź i miedź



Przy dużym nasisku zniszczeniu ulega warstwa tlenków na powierzchni miedzi...

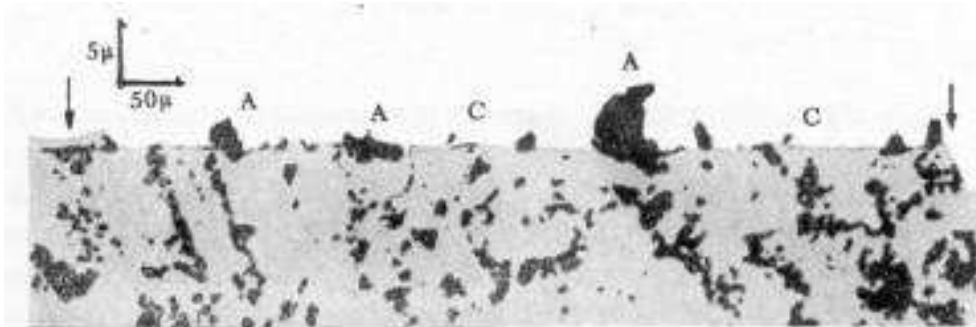
Przy bardzo dużych prędkościach miedź ulega chwilowemu stopieniu...

# Tarcie

## Ścieranie

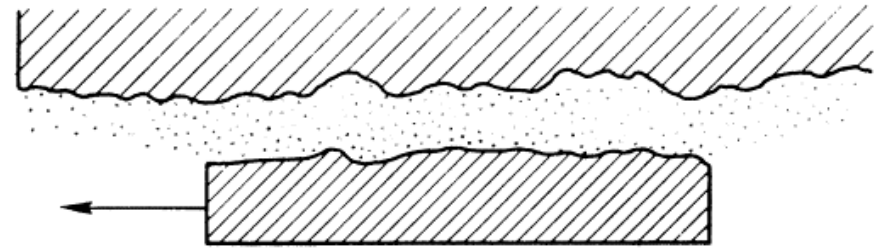
Na poziomie mikroskopowym tarcie prowadzi trwałych zmian w stykających się powierzchniach.

Fragmenty miedzi przyłączone do powierzchni stali:



## Smarowanie

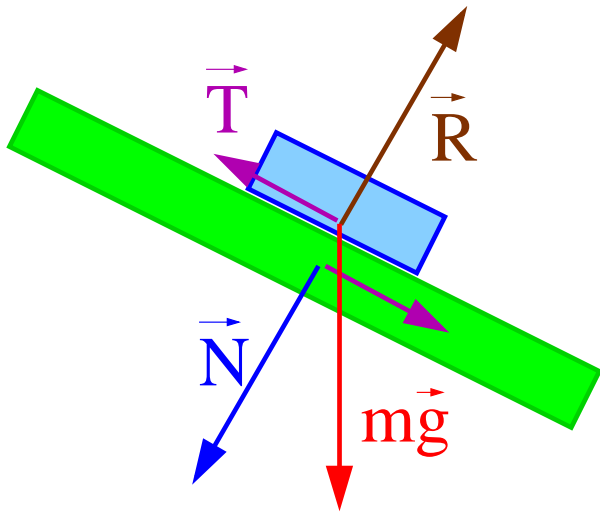
Tarcie zmniejszamy wprowadzając smar między poruszające się powierzchnie.



Powierzchnie nie stykają się  $\Rightarrow$  brak tarcia  
 $\Rightarrow$  pojawia się jednak nowa siła oporu  
związana z lepkością

# Tarcie

## Tarcie statyczne



Ciało pozostaje w równowadze dzięki działaniu tarcia statycznego

Siła działająca między dwoma powierzchniami nieruchomymi względem siebie, dociskanymi siłą  $N$ .

Maksymalna siła tarcia statycznego  $T_S^{max}$  jest równa najmniejszej sile  $F$  jaką należy przyłożyć do ciała, aby ruszyć je z miejsca.

Prawo empiryczne:

$$\vec{T}_S^{max} = -\mu_s \vec{i}_F N \quad \vec{i}_F = \frac{\vec{F}}{F}$$



# Tarcie

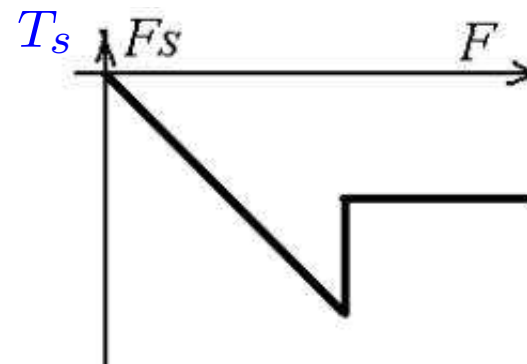
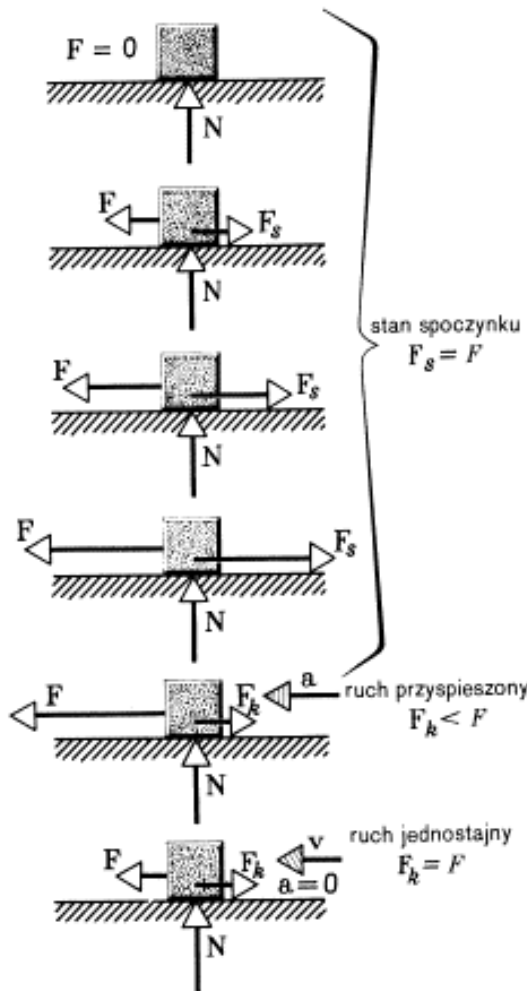
## Tarcie statyczne

Póki przyłożona siła  $\vec{F}$  jest mała, tarcie statyczne utrzymuje ciało w spoczynku:

$$\vec{T}_s = -\vec{F}$$

⇒ siła tarcia rośnie proporcjonalnie do przyłożonej siły.

Gdy przyłożona siła przekroczy wartość  $T_s^{max} = \mu_s \cdot N$  ciało zaczyna się poruszać ⇒ tarcie kinetyczne



Tarcie kinetyczne naogół słabsze od spoczynkowego:  $\mu_k < \mu_s$

# Tarcie

## Współczynniki tarcia

Przykładowe współczynniki  
dla wybranych materiałów:

materiały	$\mu_s$	$\mu_k$
stal o stal	0,15	0,03 – 0,09
stal o lód	0,027	0,014
drewno o drewno	0,65	0,2 – 0,4
guma o beton suchy	1,0	0,7
guma o beton mokry	0,7	0,5

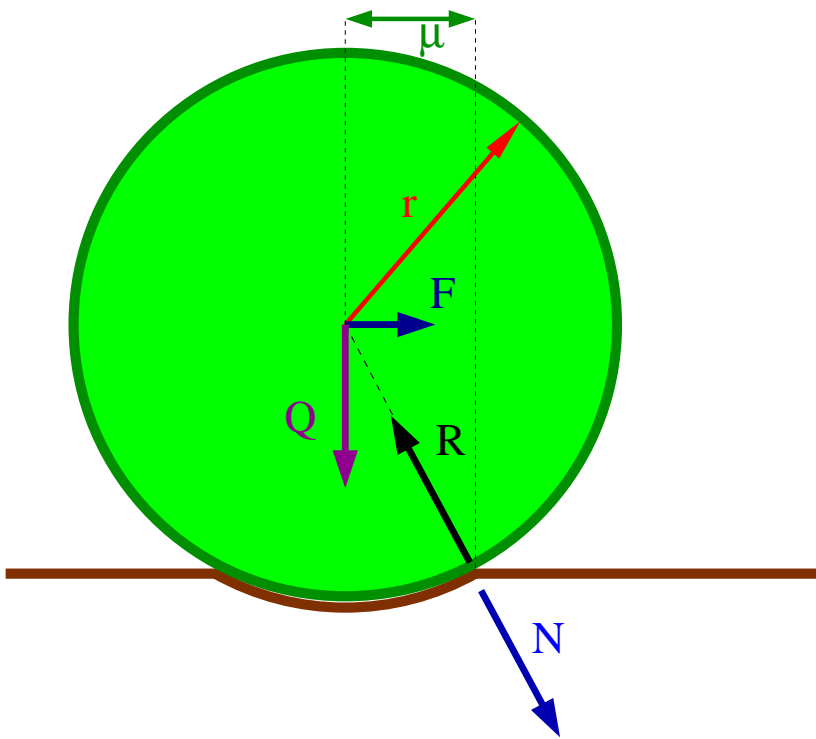
Hamowanie samochodu:

**ważne aby koła nie zaczęły się ślizgać**

- poślizg  $\Rightarrow \mu_k$
- dobry kierowca lub ABS  $\Rightarrow \mu_s$   
zysk  $\sim 40\%$  na drodze hamowania

# Tarcie

## Tarcie toczne



Toczące się ciało odkształca zawsze powierzchnię po której się toczy.

Poza tarciem statycznym i kinetycznym (poślizgowym) mamy **tarcie toczne**:

$$\vec{T}_t = -\mu_t \vec{i}_F \frac{N}{r}$$

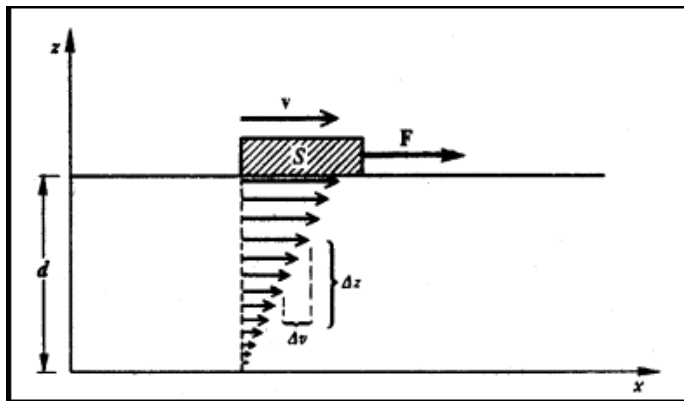
Współczynnik tarcia tocznego  $\mu_t$  jest zwykle bardzo mały

Przykładowo:

- drewno + drewno  $\Rightarrow \mu_t = 0,0005 \text{ m}$
- stal hartowana + stal  $\Rightarrow \mu_t = 0,00001 \text{ m}$   
(wymiar długości!)

# Lepkość

Ciało poruszające się  
po powierzchni cieczy:



Warstwa cieczy przylegająca do  
ciała porusza się wraz z nim.

Warstwa cieczy przylegająca do  
dna spoczywa.

“tarcie wewnętrzne” pomiędzy warstwami cieczy  
poruszającymi się z różnymi prędkościami.

Formuła empiryczna:

$$\vec{F}_L = -\vec{i}_V \eta \frac{v S}{d}$$

gdzie:  $v$  - prędkość ciała  
 $S$  - powierzchnia styku z cieczą  
 $d$  - głębokość naczynia  
 $\eta$  - współczynnik lepkości

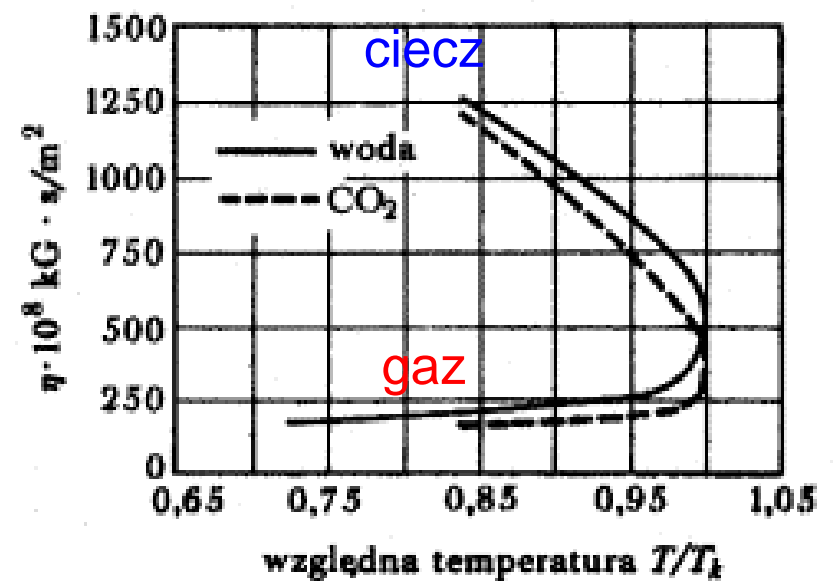
# Lepkość

Typowe wartości:

eter	0.0002	$Ns/m^2$
woda	0.001	$Ns/m^2$
gliceryna	1.5	$Ns/m^2$
miód	500.	$Ns/m^2$
wodór	0.000009	$Ns/m^2$
powietrze	0.000018	$Ns/m^2$
tlen	0.000021	$Ns/m^2$

Lepkość cieczy maleje z temperaturą

Lepkość gazów rośnie z temperaturą

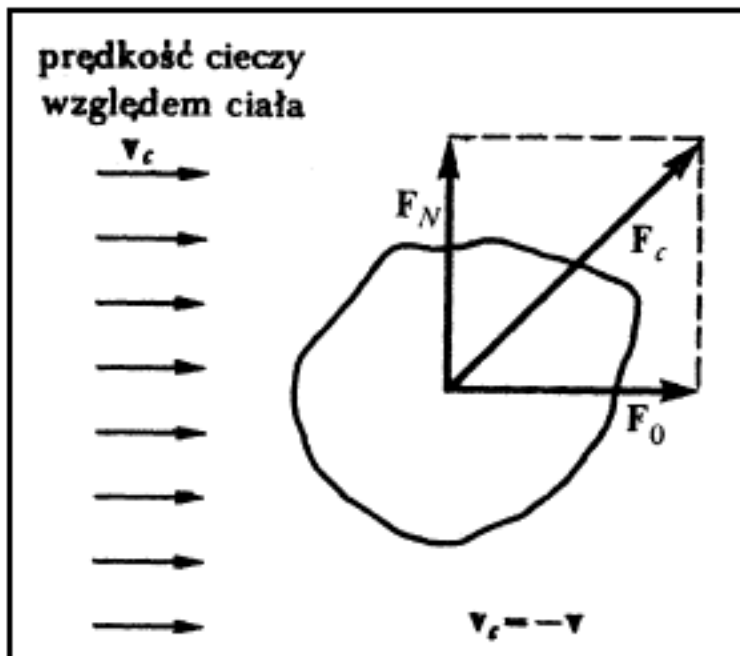


# Ruch w ośrodku

## Opór czołowy

Siły jakie działają na ciało poruszające się w ośrodku możemy podzielić na:

- siłę oporu czołowego  $\vec{F}_0 \updownarrow \vec{v}$
- siłę nośną  $\vec{F}_N \perp \vec{v}$



Z analizy wymiarowej:

$$\vec{F}_0 = -\vec{i}_v \frac{C}{2} \rho v^2 S \quad \text{wzór Newtona}$$

gdzie:  $v$  - prędkość ciała  
 $S$  - powierzchnia poprzeczna  
 $\rho$  - gęstość cieczy

$C$  - bezwymiarowy współczynnik zależny od kształtu ciała, jego orientacji względem  $\vec{v}$  oraz **bezwymiarowej** kombinacji parametrów:

$$Re = \frac{v l \rho}{\eta}$$

$Re$  - liczba Reynoldsa,  $l$  - wymiar poprzeczny

O.Reynolds (1883): skalowanie przepływów cieczy

# Ruch w ośrodku

## Opór czołowy

Dla ciała kulistego i  $Re \ll 1$   
istnieje ścisłe rozwiązanie problemu:  
(G.Stokes 1851)

$$C = \frac{24}{Re}$$

$$\vec{F}_o = -6\pi\eta r \vec{v}$$

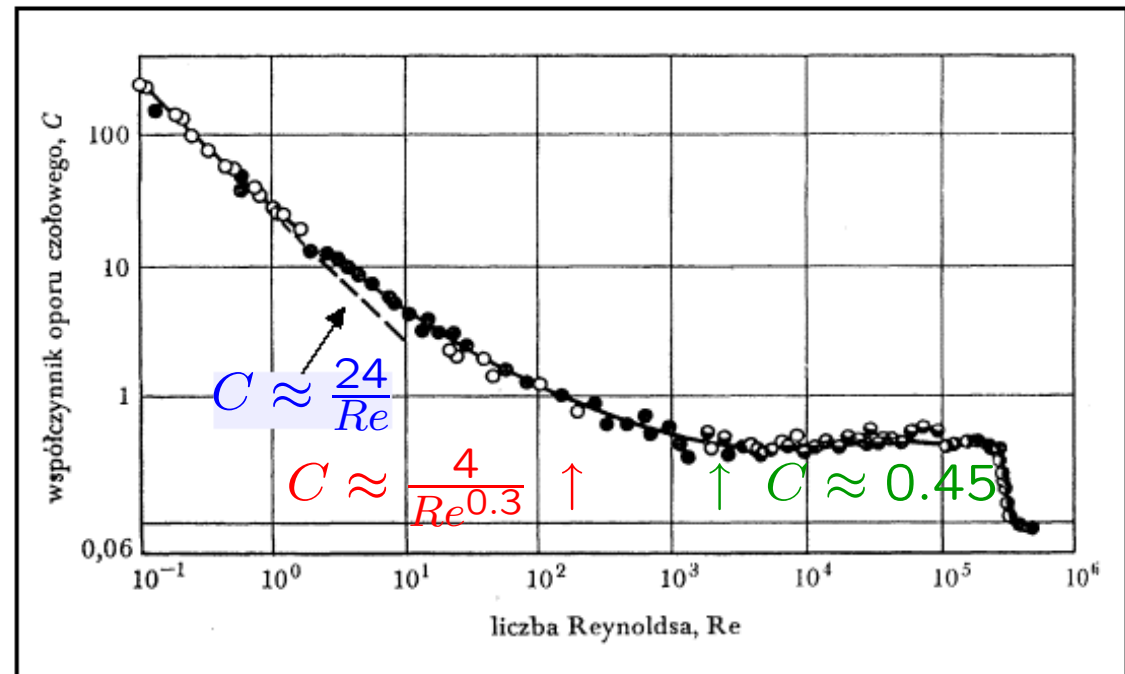
siła oporu proporcjonalna do  $v$

W obszarze dużych wartości  $Re$

$$C \approx \text{const}$$

$$F_o \sim v^2$$

Wyniki pomiarów współczynnika  $C$  dla kuli:



# Ruch w ośrodku

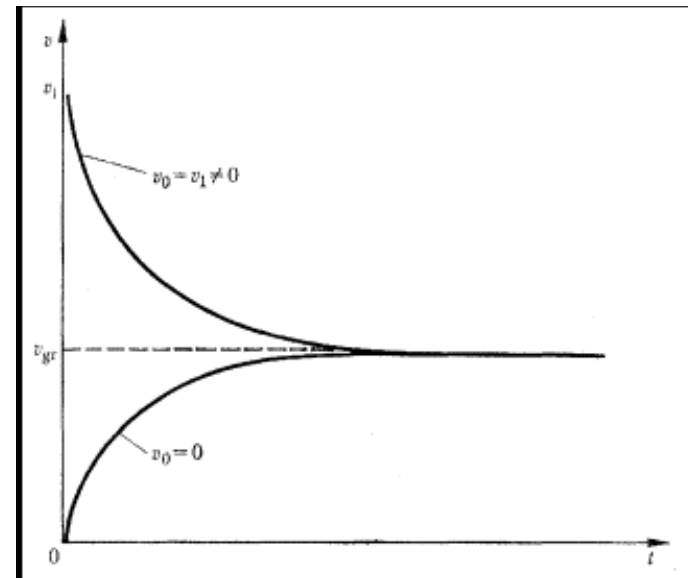
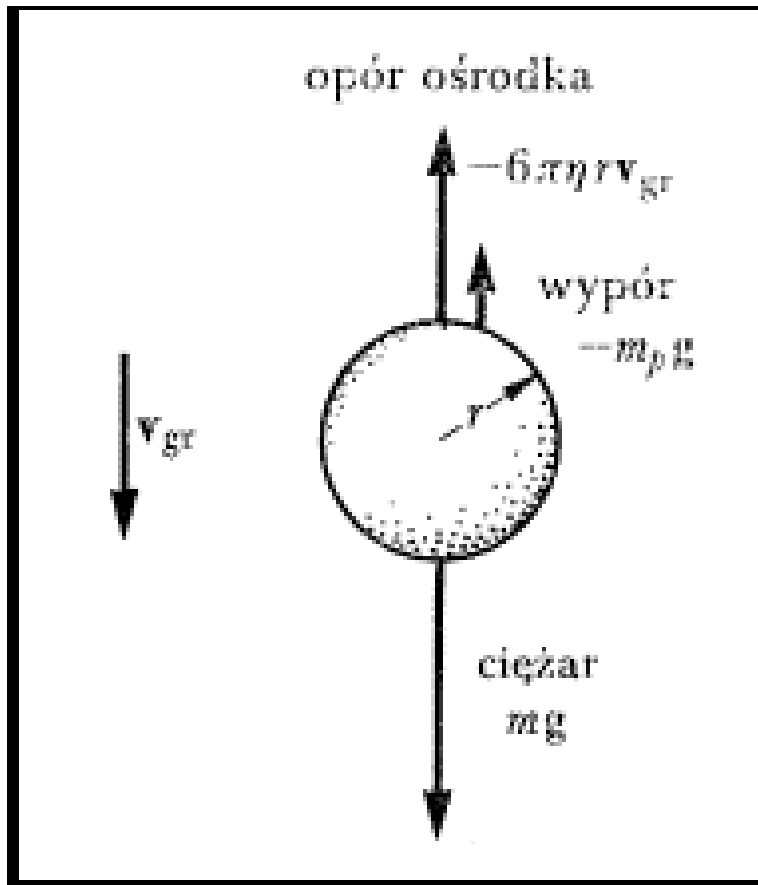
## Prędkość graniczna

Równanie ruchu kuli spadającej w cieczy ( $Re \ll 1$ )

$$m\vec{a} = m\vec{g} - m_p\vec{g} - 6\pi\eta r\vec{v}$$

Rozwiązanie (ruch w pionie):

$$v(t) = v_{gr} + (v_0 - v_{gr}) \exp\left(-\frac{6\pi\eta r}{m} t\right)$$



$v_{gr}$  - prędkość graniczna

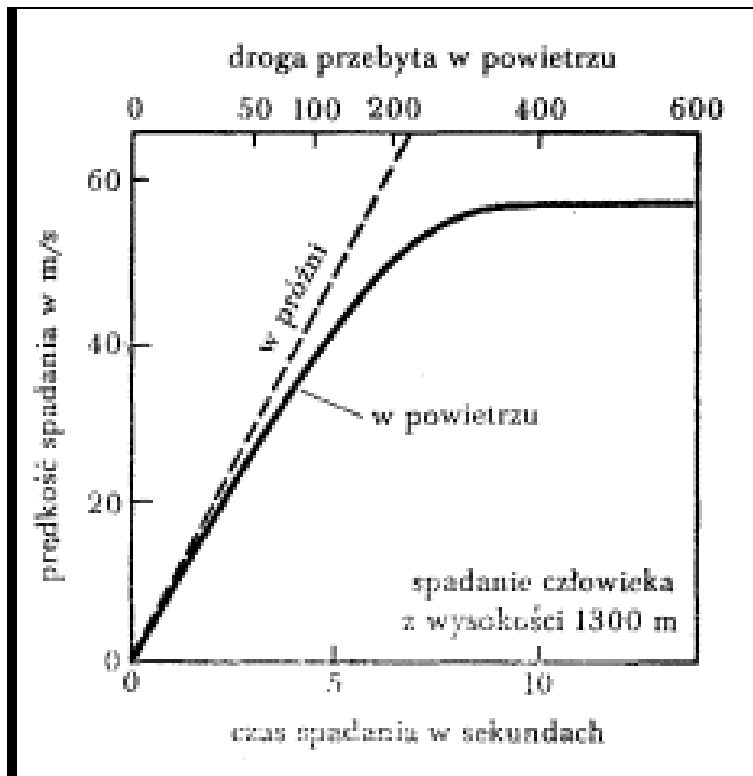


# Ruch w ośrodku

## Prędkość graniczna

Dla kuli spadającej w cieczy ( $Re \ll 1$ )

$$v_{gr} = \frac{2}{9} \frac{r^2 g (\rho - \rho_p)}{\eta}$$



## Zależność od kształtu

Kula:

$$\begin{aligned}\vec{F}_o &= -6\pi \eta r \vec{v} \\ &\approx -18.8 \eta r \vec{v}\end{aligned}$$

Dysk ( $\perp \vec{v}$ ):

$$\vec{F}_o = -16 \eta r \vec{v}$$

Dysk ( $\parallel \vec{v}$ ):

$$\vec{F}_o = -\frac{32}{3} \eta r \vec{v}$$

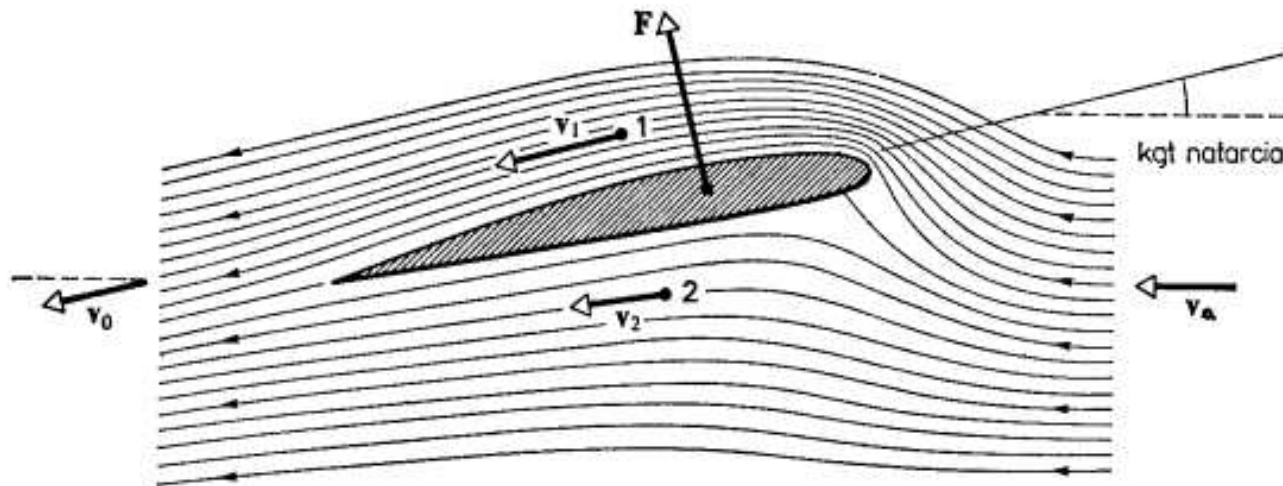
# Ruch w ośrodku

## Prawo Bernouliego

Lepkość nie jest jedynym źródłem sił działających na ciało w ośrodku.

Prawo Bernouliego:  $\rho gh + \frac{\rho v^2}{2} + p = const$

Ciśnienie cieczy (nacisk na jednostkę powierzchni) jest mniejsze w obszarze większych prędkości opływania  $\Rightarrow$  ciało jest “wciągane” w obszar większych prędkości

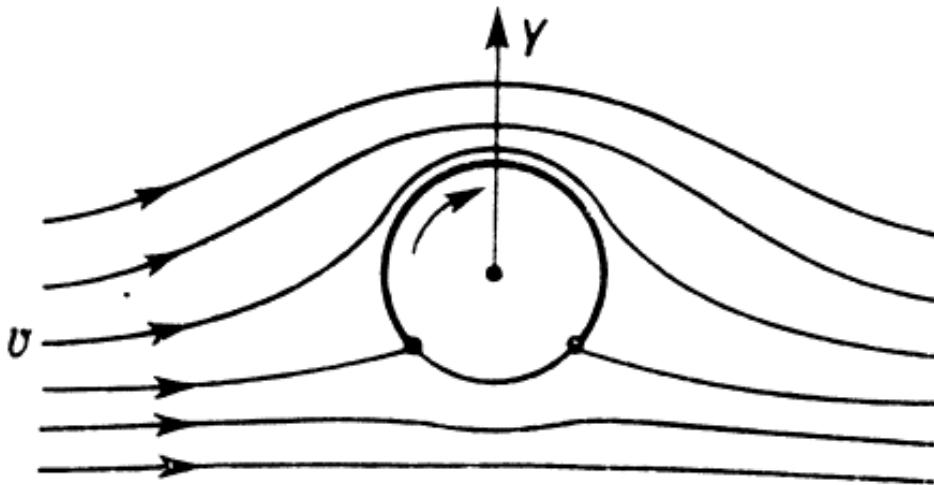


Ale można na to spojrzeć też z punktu widzenia **praw Newtona!** Siła nośna jest siłą reakcji! Ciało wymusza zmianę kierunku ruchu cząsteczek ośrodka, pcha go “w dół”...

# Ruch w ośrodku

## Zjawisko Magnusa

Walec wirujący w przepływającej poprzecznie do osi obrotu cieczy lub gązie.



zgodne kierunki prędkości:

- ⇒ prędkość przepływu wzrasta
- ⇒ przyspieszenie dośrodkowe rośnie
- ⇒ ciśnienie maleje

przeciwnie kierunki prędkości:

- ⇒ prędkość przepływu maleje
- ⇒ przyspieszenie dośrodkowe maleje
- ⇒ ciśnienie wzrasta

⇒ wypadkowa siła nośna  $\vec{F}_N \perp \vec{v}$



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt **Fizyka wobec wyzwań XXI w.**  
współfinansowany przez Unię Europejską  
ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego  
w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki