



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Dynamika

Fizyka I (Mechanika)

Wykład V:

- Prawa ruchu w układzie nieinercyjnym
 - ⇒ siły bezwładności
- Prawa ruchu w układzie obracającym się
 - ⇒ siła odśrodkowa
 - ⇒ siła Coriolissa
- Zasada zachowania pędu
- Zasada zachowania momentu pędu
- Ruch ciał o zmiennej masie

Układ inercjalny

Zasada bezwładności

“Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszają ciała do zmiany tego stanu.” I. Newton

Układ odniesienia w którym spełniona jest zasada bezwładności nazywamy **układem inercjalnym**

Zasada bezwładności jest równoważna z postulatem istnienia układu inercjalnego

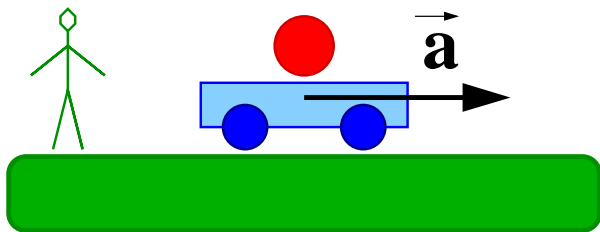
W **układzie inercjalnym** ruch ciała jest jednoznacznie zadany przez działające na nie siły zewnętrzne (**równanie ruchu**) + warunki początkowe

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R$$
$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \quad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

Układy nieinercyjne

Opis ruchu

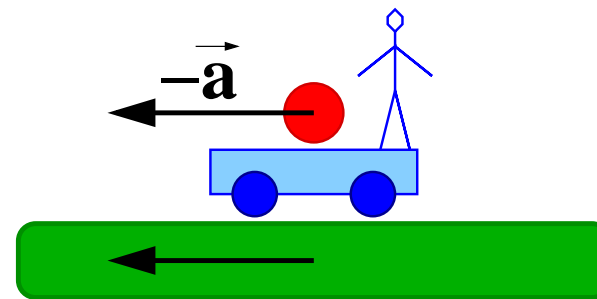
Wózek porusza się z przyspieszeniem \vec{a} względem stołu



Z punktu widzenia obserwatora związanego ze stołem kulka pozostaje w spoczynku.

Wynika to z zasady bezwładności - siły działające na kulkę równoważą się

$$\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$$



Z punktu widzenia obserwatora związanego z wózkiem kulka porusza się z przyspieszeniem $-\vec{a}$

\Rightarrow prawa Newtona nie są spełnione !?

Oba układy nie mogą być inercyjne.

Prawa ruchu w układzie nieinercyjnym wymagają modyfikacji

Układy nieinercyjne

Prawa ruchu

Przyjmijmy, że układ O' porusza się względem układu inercyjnego O .

Osie obu układów pozostają cały czas równoległe (brak obrotów)

Niech $\vec{r}_o(t)$ opisuje położenie układu O' w O . Przyspieszenie: $\vec{a}_o = \frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2}$

Ruch punktu materialnego mierzony w układach O i O' :

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_o$$

Przyspieszenie punktu materialnego mierzone w układach O i O' :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_o$$

Prawa ruchu w układzie inercyjnym O :

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R$$

⇒ w układzie nieinercyjnym O' :

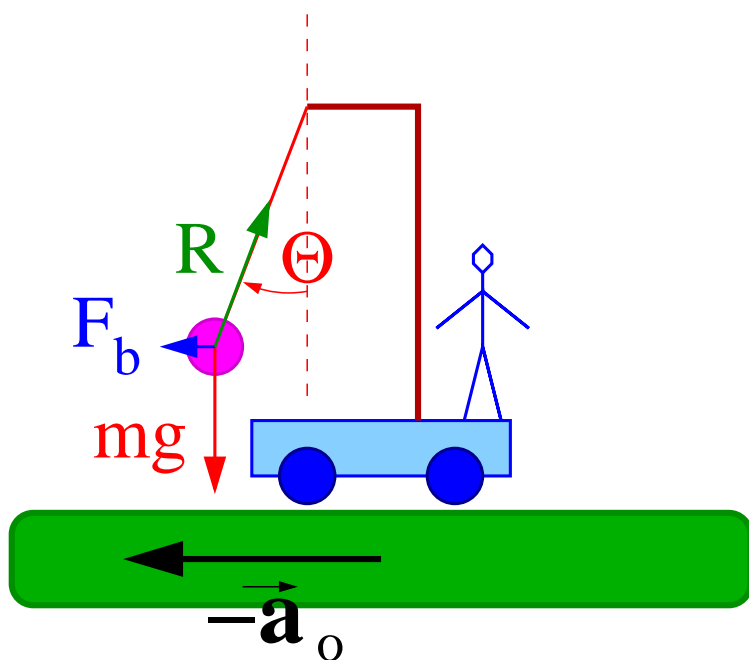
$$m\vec{a}' = \vec{F}(\vec{r}', \vec{v}', t) + \vec{F}_R - m\vec{a}_o$$

⇒ w układzie nieinercyjnym musimy wprowadzić siłę bezwładności $\vec{F}_b = -m\vec{a}_o$

Układy nieinercyjne

Prawa ruchu

Wahadło w układzie nieinercyjnym poruszającym się z przyspieszeniem \vec{a} względem układu inercyjnego



Oprócz siły ciężkości $m\vec{g}$ i reakcji \vec{R} musimy uwzględnić pozorną siłę bezwładności $\vec{F}_b = -m\vec{a}_0$

Opis ruchu można uprościć wprowadzając efektywne przyspieszenie ziemskie:

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_0$$

siły bezwładności \equiv siły grawitacji

\Rightarrow odchylenie położenia równowagi:

$$\tan \theta = \frac{a_0}{g}$$

Przyspieszenie drgań:

$$\omega'^2 = \frac{g'}{l} = \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l}$$

Układy nieinercjalne

Prawa ruchu

Jeśli $a_0 \ll g \Rightarrow$ w układzie poruszającym się z przyspieszeniem $\vec{a}_0 \perp \vec{g}$ obserwujemy **pozorną** zmianę **kierunku** działania siły ciężkości:

Ciecz w naczyniu:

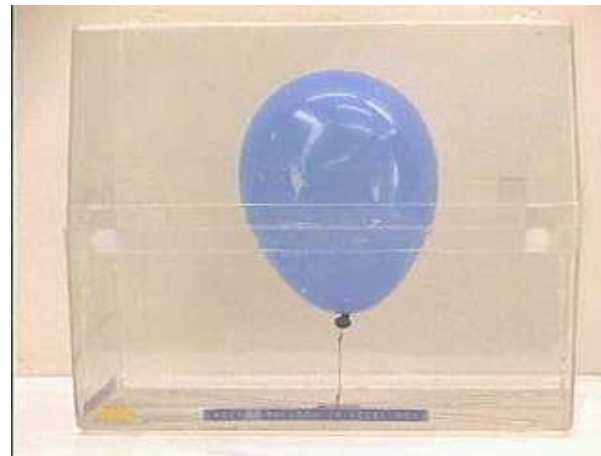
Balon z helem:

$$\vec{a} = 0$$

$$\vec{a} \neq 0$$

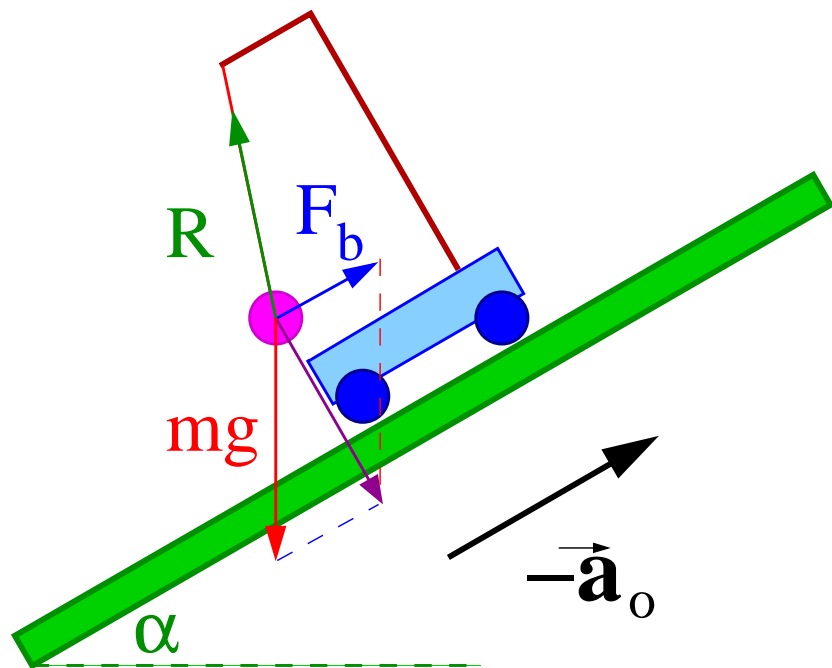
$$\vec{a} = 0$$

$$\vec{a} \neq 0$$



Układy nieinercjalne

Równia



siły działające w układzie wózka

Wózek zsuwa się bez tarcia po równi pochyłej. Zaniedbując ruch obrotowy kół przyspieszenie wózka:

$$a_0 = g \sin \alpha$$

W układzie związanym z wózkiem działająca na wahadło siła bezwładności jest równa co do wartości (lecz przeciwnie skierowana) równoległej składowej ciężaru.

Na wahadło działa pozorna siła ciężkości prostopadła do powierzchni równi.

$$g' = g_{\perp} = g \cos \alpha < g$$

⇒ spowolnienie drgań

Układy nieinercjalne



Spadek swobodny

W układzie odniesienia poruszającym się z przyspieszeniem $\vec{a}_o \parallel \vec{g}$ obserwujemy **pozorną** zmianę wartości przyspieszenie grawitacyjnego:

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_o$$



W układzie związanym z ciałem spadającym swobodnie $\vec{a}_o = \vec{g}$

$$\vec{g}' = 0$$

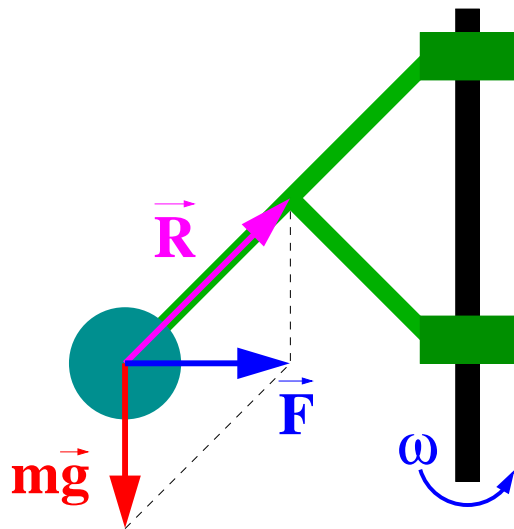
\Rightarrow stan nieważkości

Ruch po okręgu

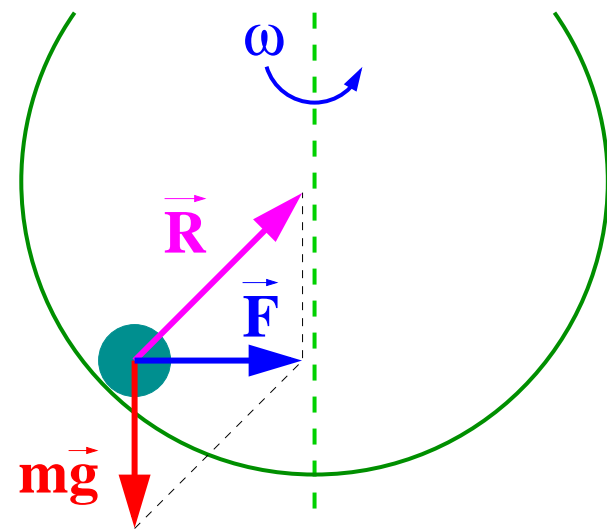
Układ inercjalny

Do utrzymania ciała w ruchu po okręgu konieczna jest **siła dośrodkowa**.

Regulator Watta



Kulka w wirującym naczyniu



Siła dośrodkowa jest tu wypadkową siły reakcji i siły ciężkości: $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R}$

Układ obracający się

Niech układ O' obraca się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ względem układu inercyjnego O .

Dla uproszenia przyjmijmy, że początki obu układów pokrywają się.

Rozważmy ruch punktu materialnego spoczywającego w układzie O' :

Z punktu widzenia obserwatora O ciało porusza się po okręgu i musi na nie działać siła dośrodkowa:

$$\vec{F} = -m \omega^2 \vec{r}_\perp$$

W układzie O' , aby opisać równowagę sił (ciało pozostaje w spoczynku) musimy wprowadzić siłę bezwładności:

$$\vec{F}_b = +m \omega^2 \vec{r}_\perp$$

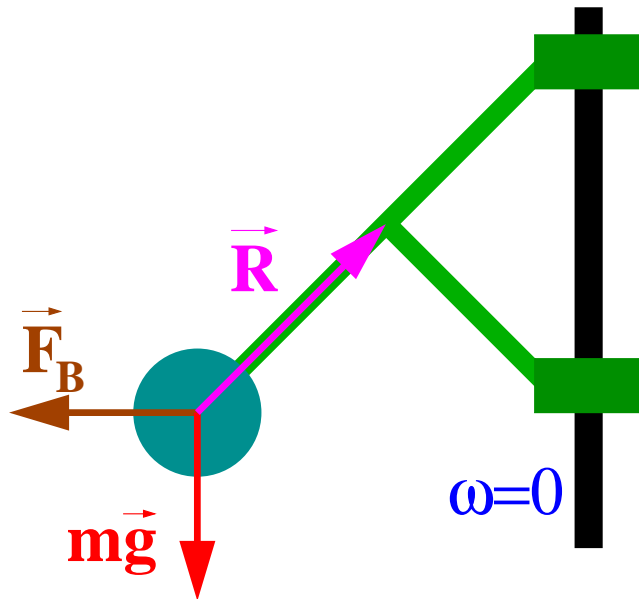
\Rightarrow siła odśrodkowa

Siły bezwładności są siłami pozornymi, wynikającymi z nieinercyjnego charakteru układu odniesienia

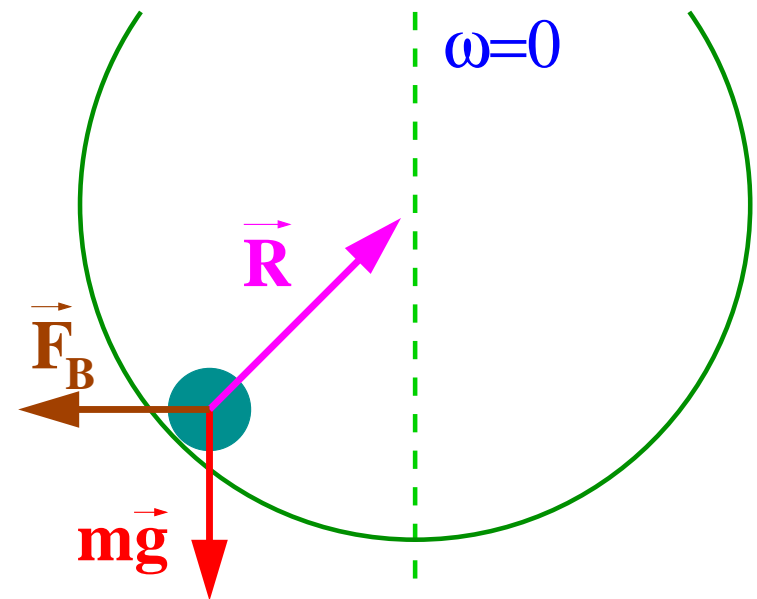
Układ obracający się

Siła odśrodkowa

Regulator Watta



Kulka w wirującym naczyniu



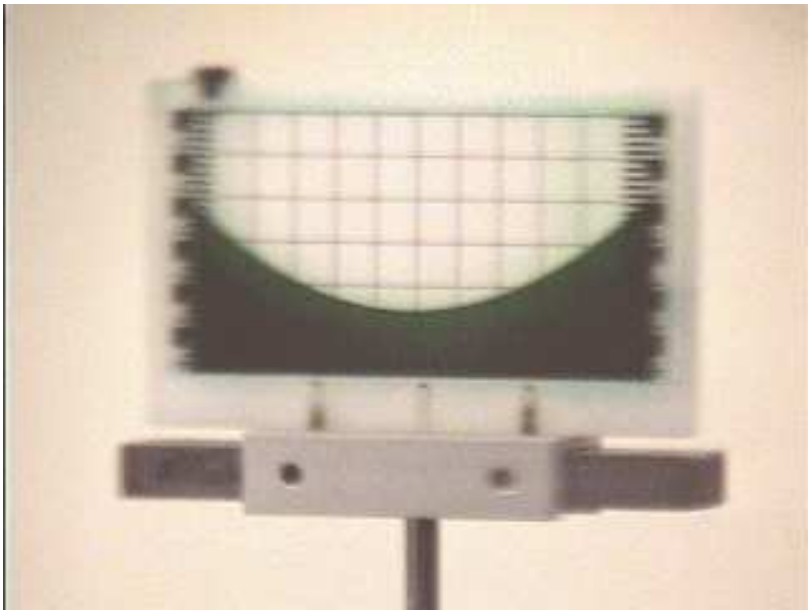
Równowaga sił w układzie obracającym się:

$$m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_b = m\vec{a}' = 0$$

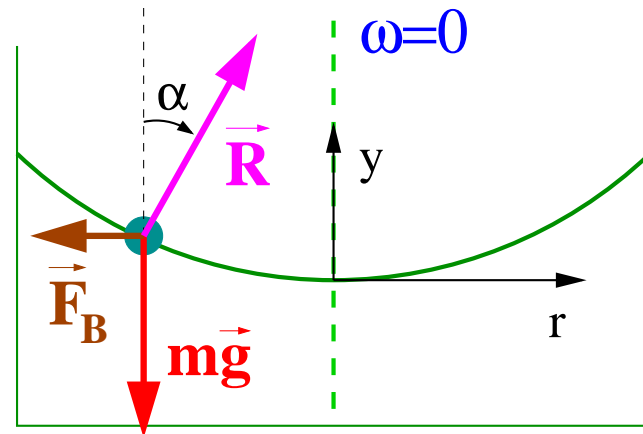
Układ obracający się

Siła odśrodkowa

Ciecz w wirującym naczyniu



Powierzchnia cieczy przyjmuje kształt paraboliczny



Równowaga drobiny na powierzchni cieczy:

$$mg \sin \alpha - m\omega^2 r \cos \alpha = 0$$

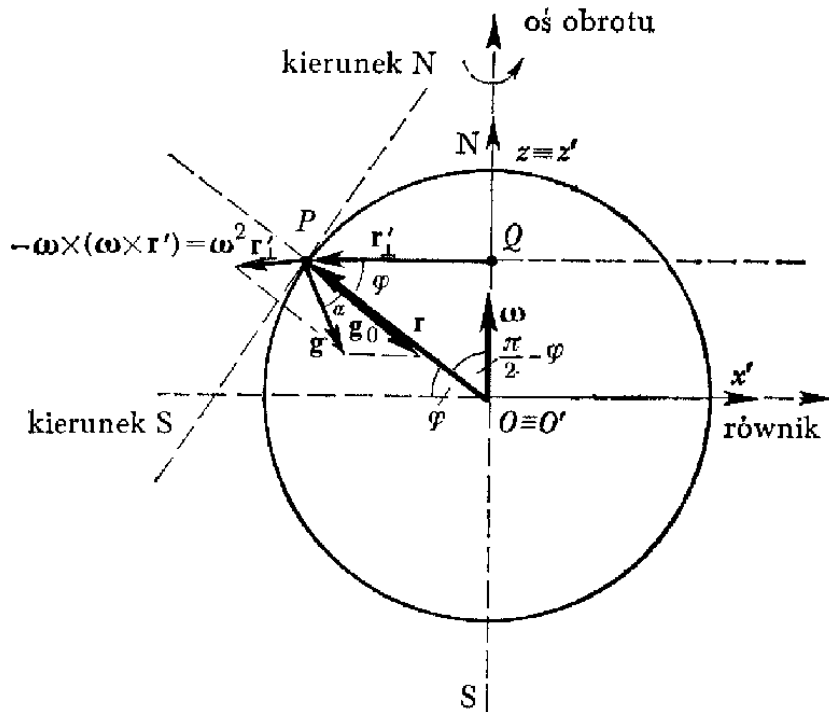
(rzut na powierzchnie cieczy)

$$\frac{dy}{dr} = \tan \alpha = \frac{\omega^2}{g} r$$

$$\Rightarrow y = \frac{\omega^2}{2g} \cdot r^2 + y_0$$

Układ obracający się

Ruch obrotowy Ziemi



$$\omega \approx \frac{2\pi}{23^h 56^m 04^s} \approx 7.3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s}$$

Ciała nieruchome względem powierzchni Ziemi. Zmiana efektywnego przyspieszenia ziemskiego związana z ruchem obrotowym Ziemi:

$$\Delta g = -\omega^2 r_{\perp} \cos \phi = -\omega^2 r_Z \cos^2 \phi$$

$$\approx -0.033 \frac{m}{s^2} \cdot \cos^2 \phi \quad \phi - \text{szerokość geo.}$$

Wyniki pomiarów:

biegun N $g = 9.83216 \frac{m}{s^2}$

Warszawa $g = 9.81230 \frac{m}{s^2}$

równik $g = 9.78030 \frac{m}{s^2}$

Efekt większy ze względu na spłaszczenie Ziemi

Układ obracający się

Układ O' obraca się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ względem układu inercjalnego O .

Rozważmy teraz ruch punktu materialnego spoczywającego w układzie O :

Z punktu widzenia obserwatora O' ciało porusza się po okręgu i musi na nie działać siła dośrodkowa:

$$\vec{F} = -m \omega^2 \vec{r}_\perp$$

W układzie O' działa tymczasem pozorna siła odśrodkowa

$$\vec{F}_b = +m \omega^2 \vec{r}_\perp$$

\Rightarrow musimy wprowadzić kolejną siłę ?!

Aby “uratować” równania ruchu potrzebujemy

$$\vec{F}_c = -2 m \omega^2 \vec{r}_\perp$$

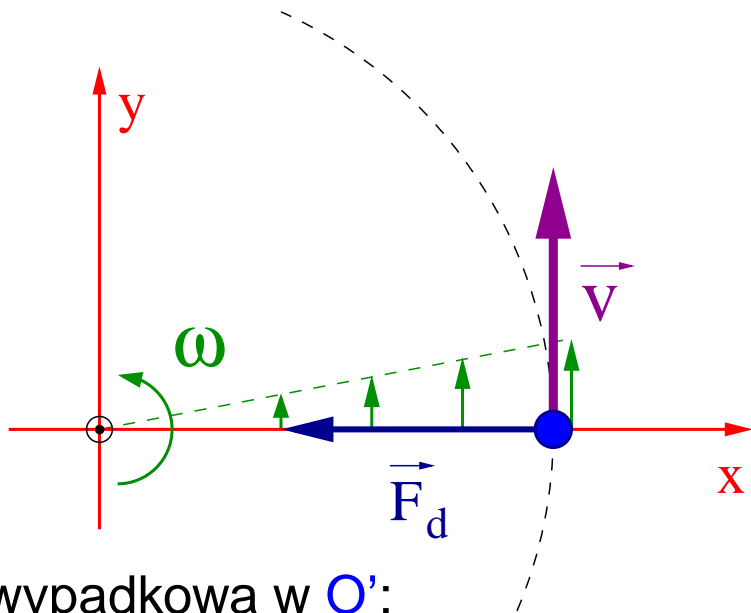
\Rightarrow czy to w ogóle ma sens ?...

Układ obracający się

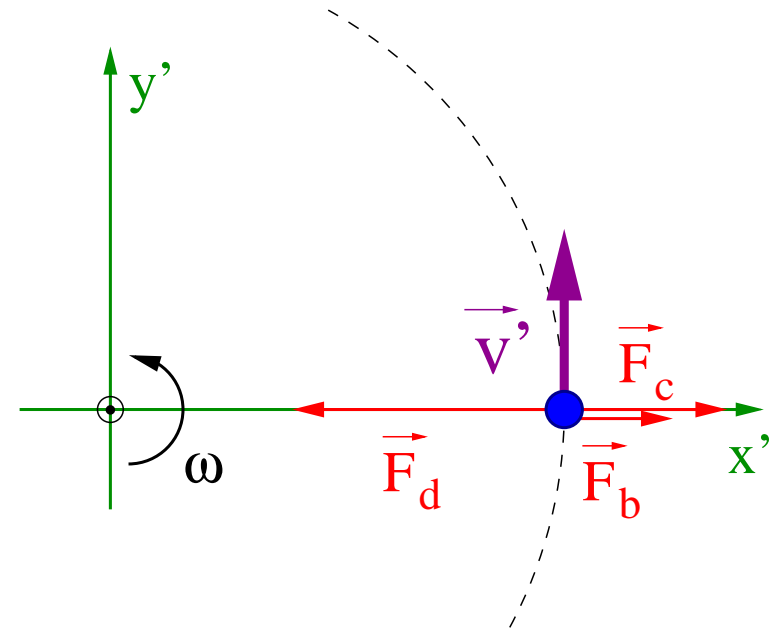
Punkt materialny poruszający się po okręgu w układzie O , siła dośrodkowa $F_d = m \frac{V^2}{r}$.

W układzie obracającym się O' prędkość punktu wynosi $V' = V - \omega r$

Układ O



Układ O'



Siła wypadkowa w O' :

$$F'_d = m \frac{V'^2}{r} = m \frac{(V' + \omega r)^2}{r} - 2m\omega V' - m\omega^2 r = F_d - F_c - F_b$$

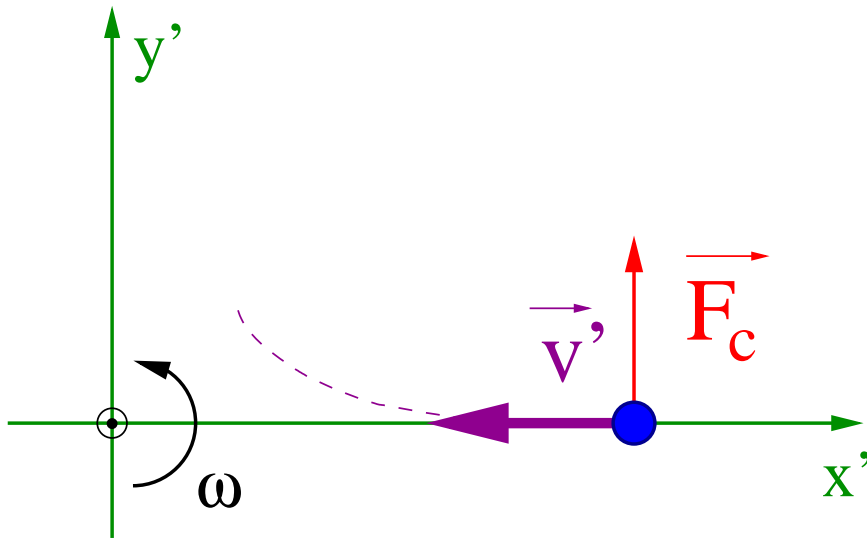
Dodatkowa siła pozorna \vec{F}_c (siła **Coriolisa**) konieczna do opisanie ruchu po okręgu w O'

Układ obracający się

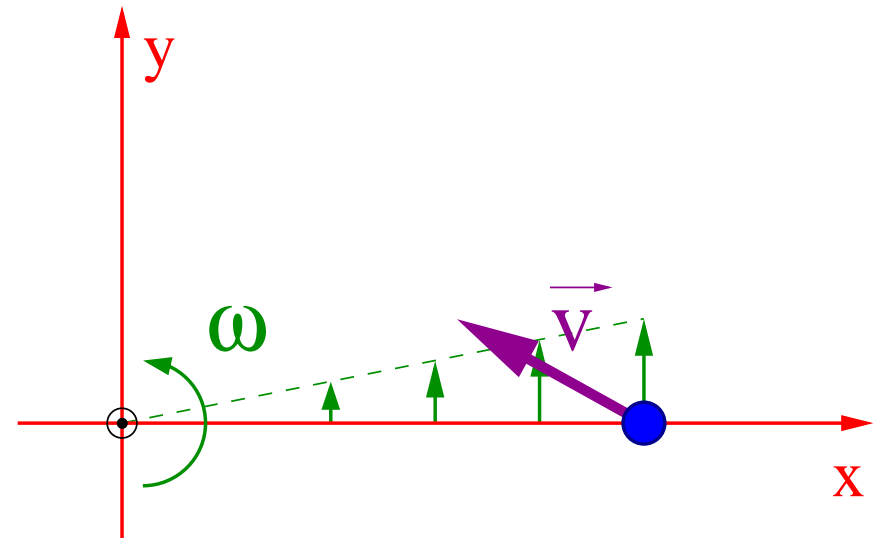
Rozważmy teraz punkt materialny poruszający się radialnie w układzie O' .

W inercyjnym układzie O zbliżający się do centrum układu punkt materialny zaczyna “wyprzedzać” punkty układu O' , gdyż ich prędkość w ruchu obrotowym maleje...

Układ O'



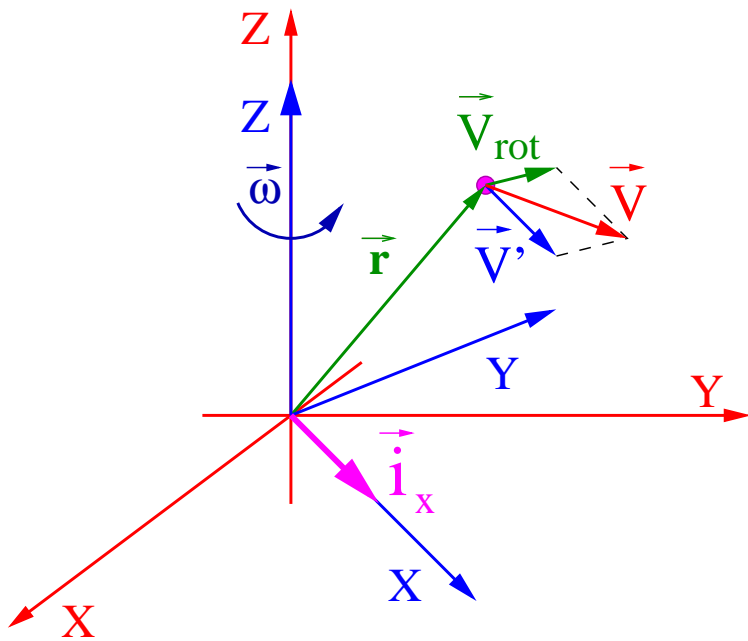
Układ O



Pozorna siła Coriolisa pojawia się w układzie obracającym się (nieinercyjnym), żeby opisać odchylenie od toru prostoliniowego...

Układ obracający się

Układ O' obraca się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ względem układu inercjalnego O .



Dodawanie prędkości:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{rot} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Przyspieszenie:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Pochodna dla wektora \vec{o} z układu O' : $(\vec{r}' \text{ i } \vec{v}')$

$$\frac{d\vec{o}'}{dt} = \frac{d\vec{o}'}{dt'} + \vec{\omega} \times \vec{o}'$$

pochodna w O' + obrót osi O'

$$\Rightarrow \vec{a} = \underbrace{\vec{a}'}_{\text{przyp. w } O'} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'}_{\text{przyp. } O'} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{przyp. dośrodkowe}} + \underbrace{2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{przyp. Coriolisa}}$$

przyp. w O'

przyp. O'

przyp. dośrodkowe

przyp. Coriolisa

Układ obracający się

Równanie ruchu

W układzie inercyjnym O:

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R$$

⇒ w układzie nieinercyjnym O':

$$m\vec{a}' = \vec{F}(\vec{r}', \vec{v}', t) + \vec{F}_R - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2 \cdot m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

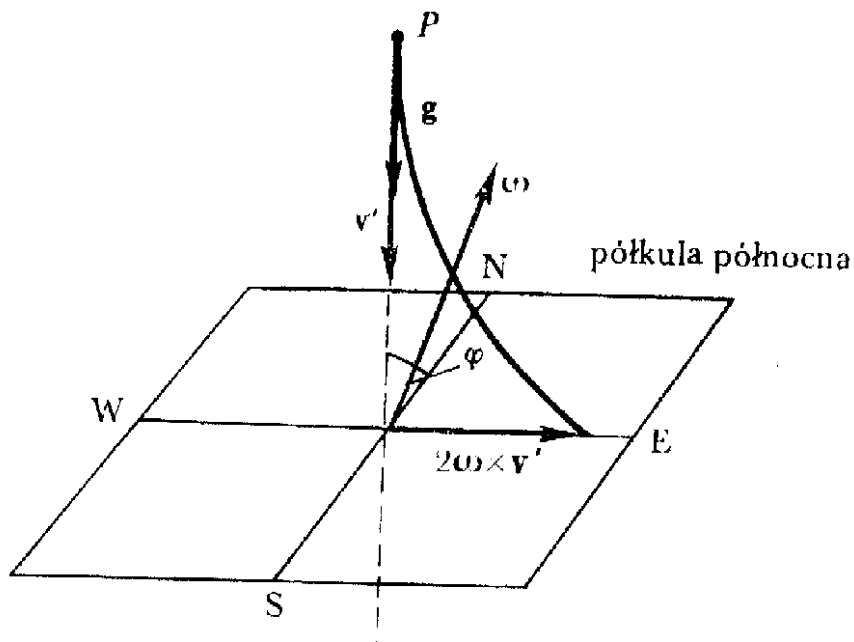
W układzie obracającym się wprowadzamy dwie pozorne siły bezwładności:

- siłę odśrodkową $\vec{F}_o = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = +m\omega^2 \vec{r}'_{\perp}$
- siłę Coriolisa $\vec{F}_c = -2 \cdot m\vec{\omega} \times \vec{v}'$

Układ obracający się

Ruch obrotowy Ziemi

Spadek swobodny z dużej wysokości



Siła Coriolisa odchyła tor ciała
w kierunku wschodnim (półkula północna)

Spadek swobodny z wysokości **5.5 km**,
z prędkością $v \approx 55 \text{ m/s}$:

$$a_c = 2\omega v \cos \phi \\ \approx 0.008 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos \phi$$

Spadek z **5.5 km** zajmie $t = 100 \text{ s}$.
Końcowe odchylenie toru od pionu:

$$\Delta = \frac{a_c t^2}{2} \approx 40 \text{ m} \cdot \cos \phi$$

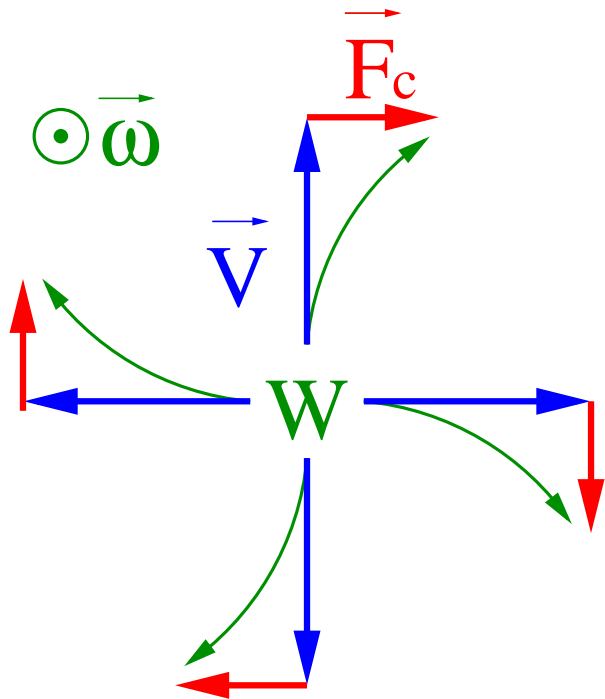
w Warszawie około 25 m

Układ obracający się

Siła Coriolisa

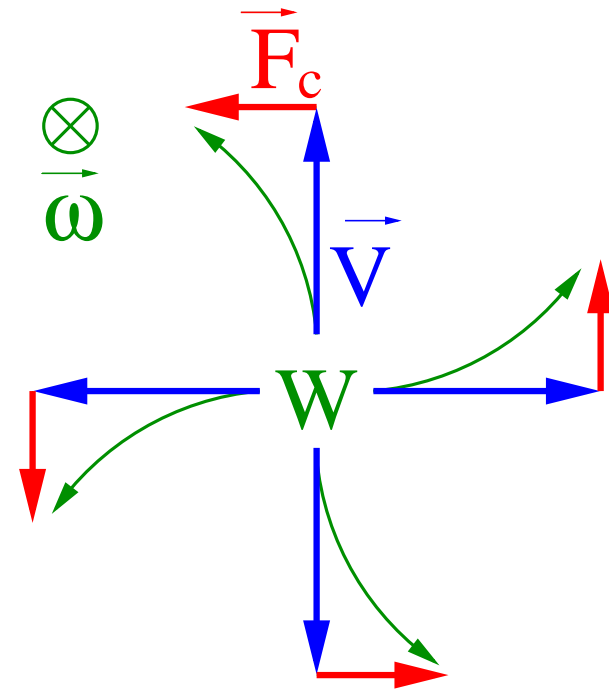
$$\vec{F}_c = -2 \cdot m \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Półkula północna



Wiatry zakręcają “w prawo”; wyż “kręci się” zgodnie z ruchem wskazówek zegara

Półkula południowa

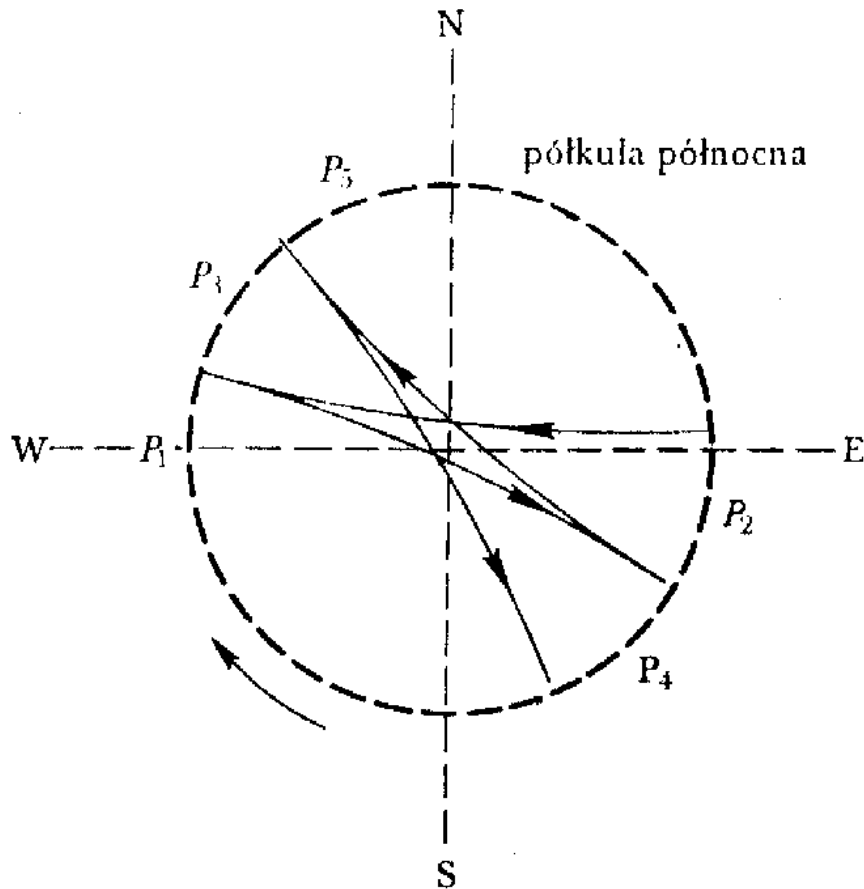


Wiatry zakręcają “w lewo”; wyż “kręci się” przeciwnie do ruchu wskazówek zegara

Układ obracający się

Wahadło Foucault'a

1851 r.

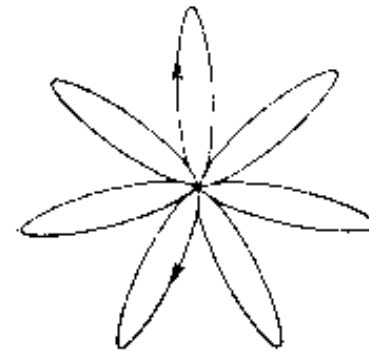


Dla obserwatora na Ziemi płaszczyzna ruchu wahadła obraca się z prędkością kątową

$$\omega_1 = \omega \cdot \sin \phi$$

w Warszawie ($\phi = 52^\circ$): $\omega_1 \approx 12^\circ/h$

dla startu z położenia równowagi:

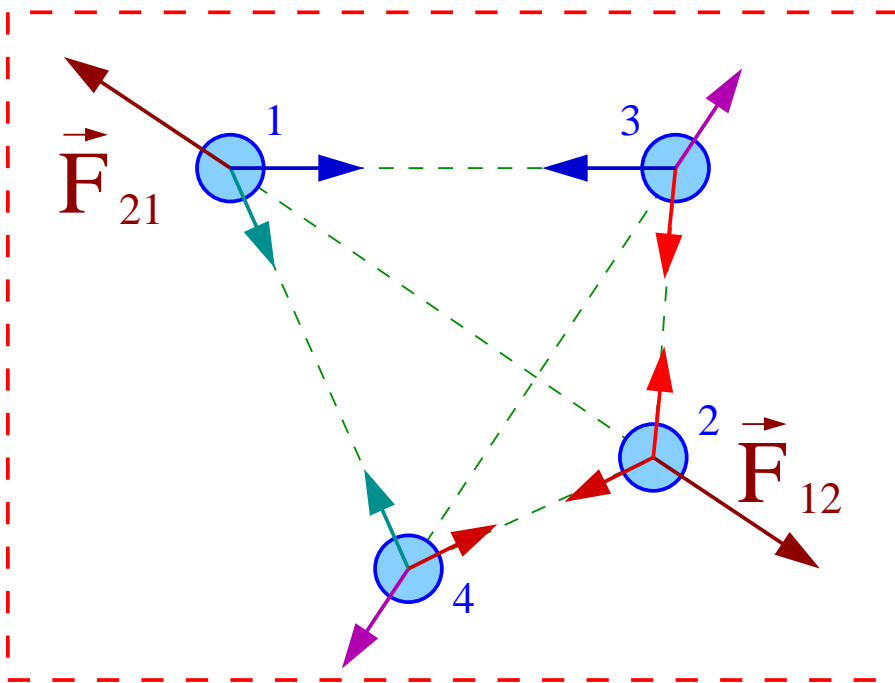


start z wychylenia maksymalnego

Zasada zachowania pędu

Układ izolowany

Każde ciało może w dowolny sposób oddziaływać z innymi elementami układu.



Brak oddziaływań ze światem zewnętrznym

III zasada dynamiki

Siły z którymi działają na siebie ciała i i j :

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Suma sił działających na ciało i :

$$\vec{F}_i^\Sigma = \sum_j \vec{F}_{ji}$$

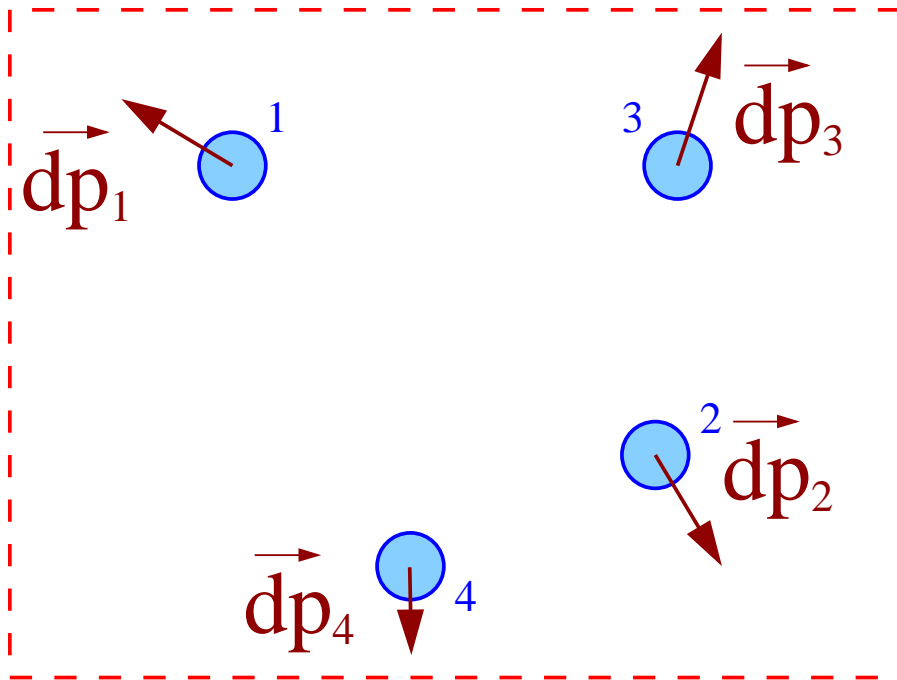
Suma sił działających na układ:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{tot} &= \sum_i \vec{F}_i^\Sigma = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ji} \\ &= \sum_j \sum_i -\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{tot} \\ &\Rightarrow \vec{F}_{tot} = 0\end{aligned}$$

Zasada zachowania pędu

II zasada dynamiki

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^\Sigma$$



izolowany układ inercjalny

Pęd układu

Prawo ruchu układu:

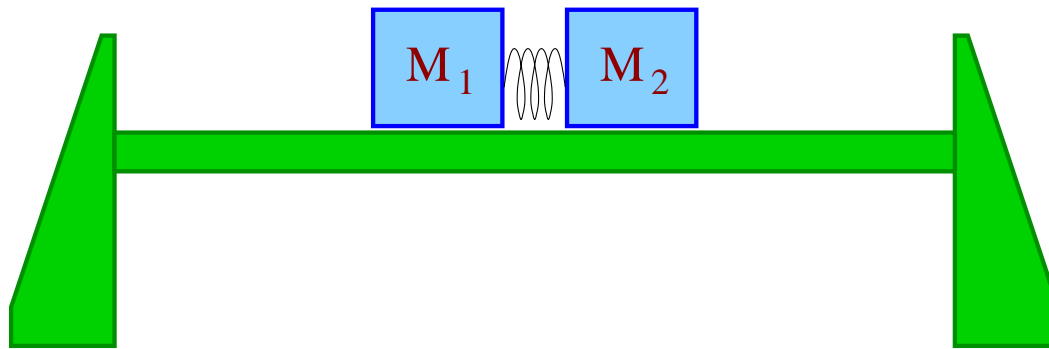
$$\begin{aligned}\vec{F}_{tot} &= \sum_i \vec{F}_i^\Sigma = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i\end{aligned}$$

$$\vec{F}_{tot} = 0 \Rightarrow \sum_i \vec{p}_i = \text{const}$$

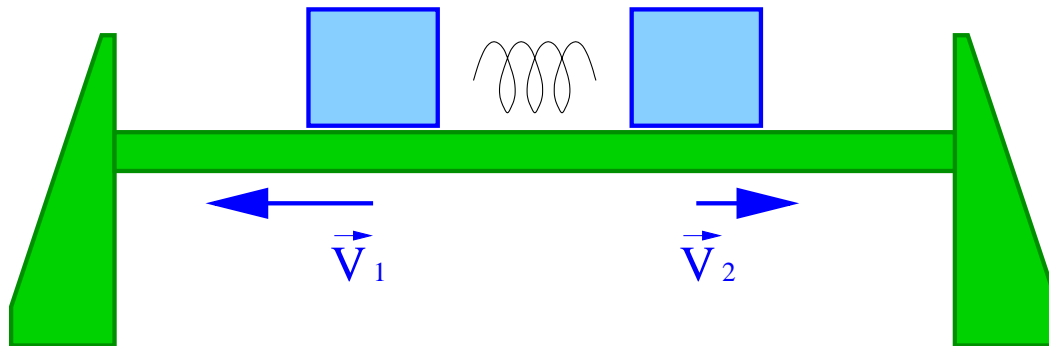
Dla dowolnego układu **izolowanego**, **suma pędów** wszystkich elementów układu pozostaje **stała**.

Zasada zachowania pędu

Oddziaływanie dwóch ciał



$$M_1 < M_2$$



Układ “rozpada się” pod wpływem **sił wewnętrznych**.

Jeśli na początku wszystkie obiekty spoczywają

$$\sum_i \vec{p}_i = 0$$

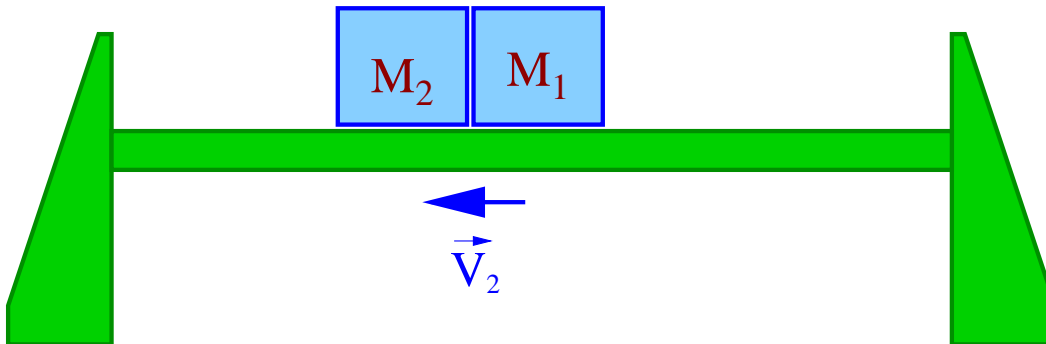
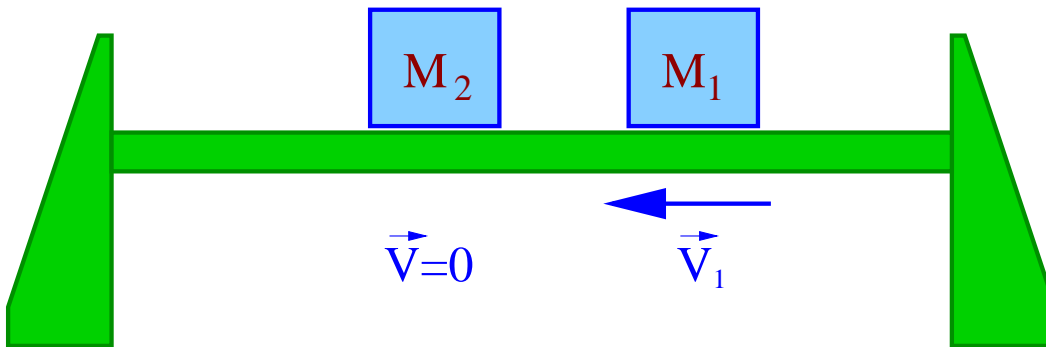
to i po “rozpadzie” **suma pędów** musi być **równa 0**.

Dwa ciała: $(v_i \ll c)$

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= 0 \\ \Rightarrow \vec{v}_2 &= -\frac{m_1}{m_2} \cdot \vec{v}_1 \\ \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} &= \frac{m_1}{m_2} \end{aligned}$$

Zasada zachowania pędu

Oddziaływanie dwóch ciał



Zderzenie całkowicie niesprężyste
(po zderzeniu ciała trwale połączone)

Pęd początkowy: $\vec{p}_i = m_1 \vec{v}_1$

Pęd końcowy: $\vec{p}_f = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_2$

Zasada zachowania pędu:

$$\begin{aligned} \vec{p}_i &= \vec{p}_f \\ \Rightarrow \vec{v}_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_1 \end{aligned}$$

Zasada zachowania momentu pędu

Siły centralne

Jeśli układ ciał (lub pojedyncze ciało) działa jakaś siła zewnętrzna $\vec{F}_{tot} \neq 0$ to pęd układu musi się zmieniać: $\sum \vec{p}_i \neq \text{const.}$

Siły które działają na układ często są

siłami centralnymi - działają w kierunku ustalonego źródła siły.

Jeśli położenie źródła przyjmiemy za środek układu $\Rightarrow \vec{F}_{tot} = F(r, \dots) \cdot \vec{i}_r$

Przykład:

- siła grawitacyjna $F(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}$
- siła kulombowska $F(r) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2}$
- siła sprężysta $F(r) = -k \cdot r$

Czy można coś “uratować” z zasady zachowania pędu ?...

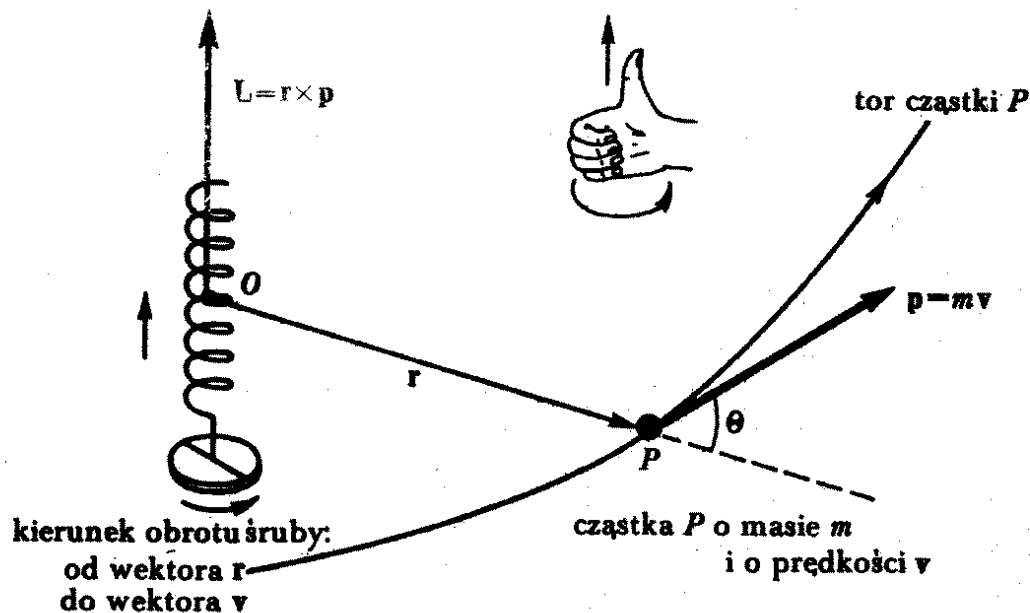
Zasada zachowania momentu pędu

Moment pędu

Zdefiniujemy dla punktu materialnego:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

⇐ moment pędu **względem O**
zależy od wyboru początku układu



Dla $v \ll c$

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$$

$$L = m r v \sin \theta$$

Zasada zachowania momentu pędu

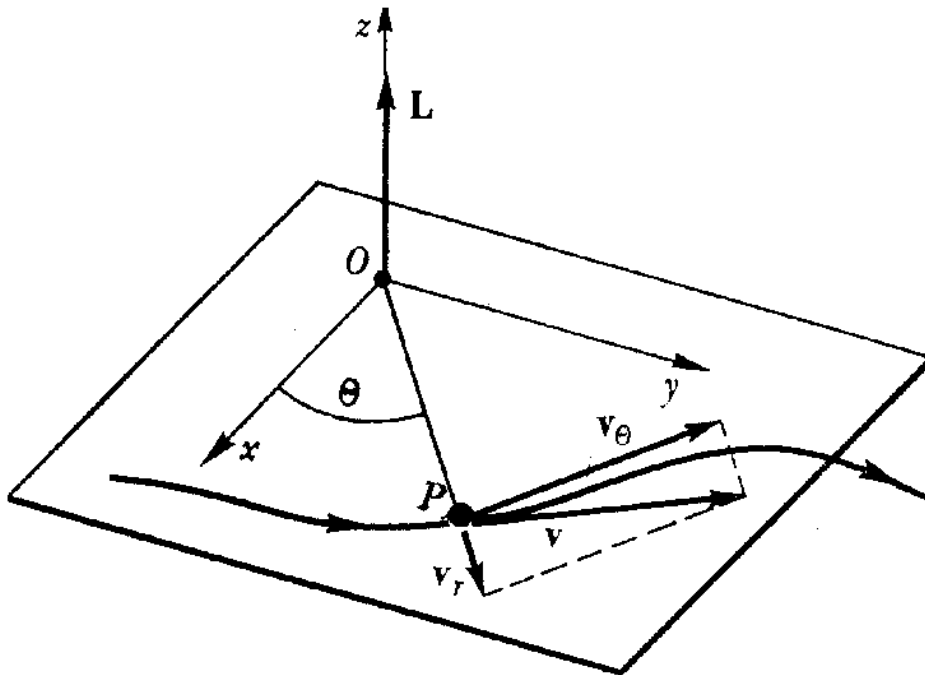
Moment pędu

Ruch po płaszczyźnie:

$$\vec{L} = m \vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta)$$

$$L = m r v_\theta$$

$$\Rightarrow L = m r^2 \frac{d\theta}{dt} = m r^2 \omega$$



Przypadek szczególny:
ruch po okręgu - $r = \text{const}$

Moment bezwładności

$$I = m r^2$$

\Rightarrow moment pędu możemy przedstawić
w ogólnej postaci

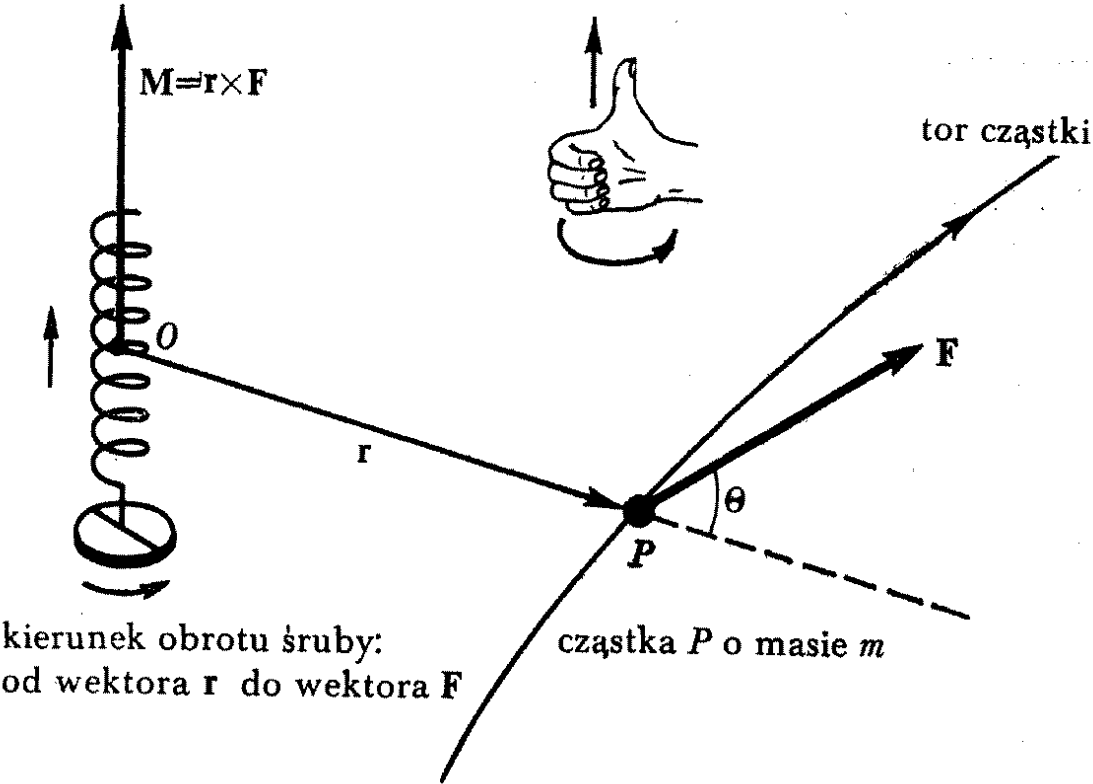
$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

Zasada zachowania momentu pędu

Moment siły

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

← moment siły **względem O**



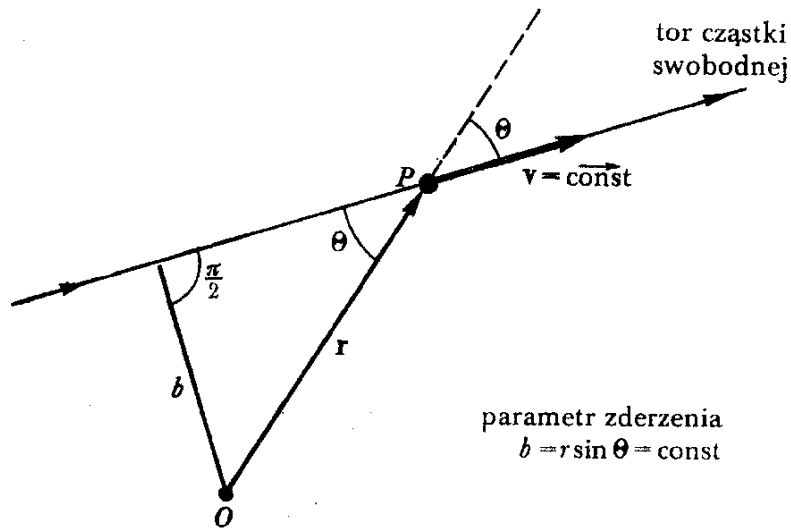
Równanie ruchu

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} \\ &= 0 + \vec{M} \end{aligned}$$

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

Zasada zachowania momentu pędu

Cząstka swobodna



Moment pędu względem **dowolnego punktu 0** pozostaje stały:

$$L = m v r \sin \theta = m v b = \text{const}$$

b - parametr zderzenia
odległość najmniejszego zbliżenia do O

Siła centralna

Moment siły: (względem źródła)

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \vec{r} \times \vec{i}_r \cdot F(r, \dots) = 0\end{aligned}$$

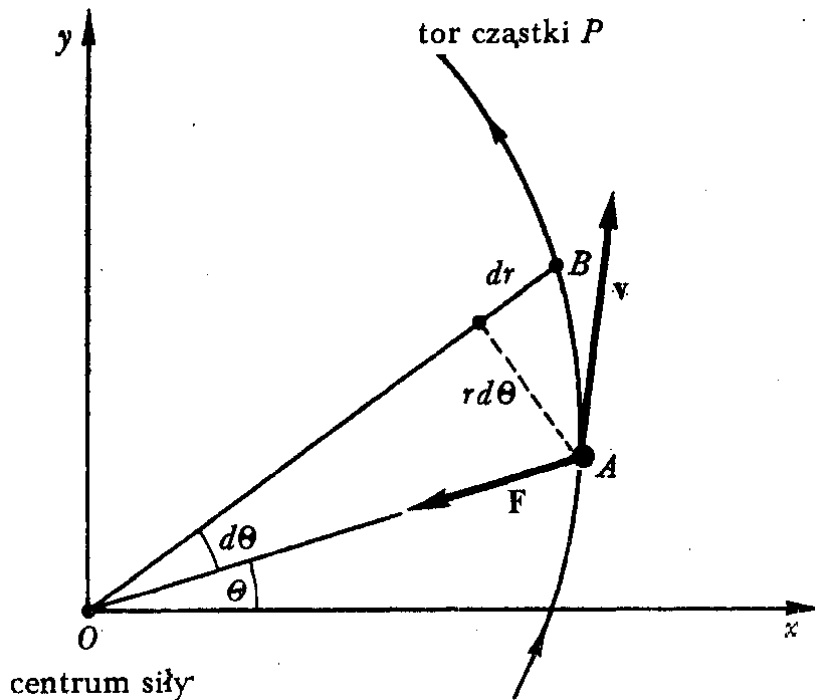
$$\vec{L} = \text{const}$$

Moment pędu, liczony **względem źródła** siły centralnej pozostaje stały.

Zasada zachowania momentu pędu

Prędkość polowa

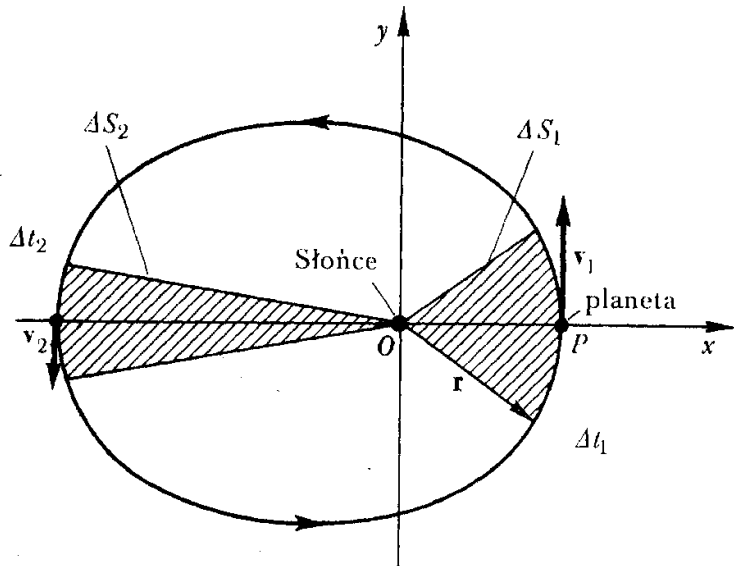
Pole jakie wektor wodzący punktu zakreśla w jednostce czasu: $\frac{dS}{dt}$



$$dS_{OAB} = \frac{1}{2} r r d\theta = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt$$

II prawo Keplera

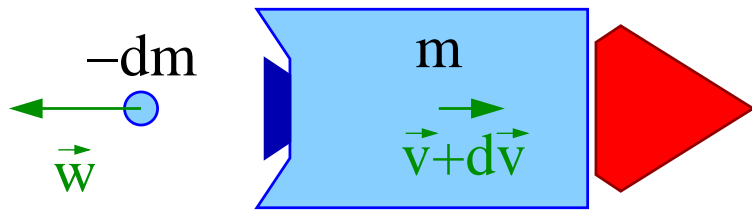
$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{L}{2m} = \text{const}$$



W ruchu pod działaniem sił centralnych prędkość polowa jest stała.

Ruch ciała o zmiennej masie

Rozważmy ruch ciała o zmiennej masie. W ogólnym przypadku: $m = m(\vec{r}, \vec{v}, t)$



Od ciała o masie $m - dm$ poruszającego się z prędkością \vec{v} odłącza się element $-dm > 0$ poruszający się z prędkością \vec{w} ($dm < 0$ bo masa ciała maleje)

Z zasady zachowania pędu:

$$\begin{aligned} (m - dm) \vec{v} &= m (\vec{v} + d\vec{v}) - dm \vec{w} \\ \Rightarrow d\vec{p} = m d\vec{v} &= (m - dm) \vec{v} - m \vec{v} + dm \vec{w} \\ &= dm (\vec{w} - \vec{v}) \equiv dm \vec{v}_{odrz} \end{aligned}$$

Siła odrzutu (siła ciągu rakiety):

$$\vec{F}_{odrz} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v}_{odrz} \quad \frac{dm}{dt} < 0$$

Ruch ciał o zmiennej masie

Równanie ruchu

Ruch ciała pod wpływem siły odrzutu:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{zewn} + \frac{dm}{dt} \vec{v}_{odrz}$$

Zaniedbując wpływ sił zewnętrznych
(np. pola grawitacyjnego):

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{dm}{dt} \vec{v}_{odrz} \\ m \frac{d\vec{v}}{dm} \cdot \frac{dm}{dt} &= \frac{dm}{dt} \vec{v}_{odrz} \\ m \frac{d\vec{v}}{dm} &= \vec{v}_{odrz} \end{aligned}$$

Całkując stronami:

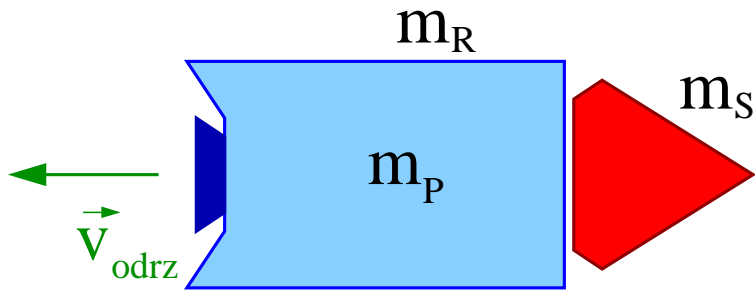
$$\begin{aligned} \int_{v_0}^{v_k} \frac{d\vec{v}}{\vec{v}_{odrz}} &= \int_{m_0}^{m_k} \frac{dm}{m} \\ \Rightarrow \vec{v}_k &= \vec{v}_0 + \vec{v}_{odrz} \cdot \ln \left(\frac{m_k}{m_0} \right) \end{aligned}$$

wzór Ciotkowskiego

Ruch ciał o zmiennej masie

Rakieta jednostopniowa

Rakieta o masie m_R ma wynieść satelitę o masie m_S , zużywając paliwo o masie m_P :



Aby uzyskać II prędkość kosmiczną $v_k \approx 11 \text{ km/s}$ (np. lot na Księżyc) przy silniku raketowym o $v_o = 3 \text{ km/s}$

Możliwa do uzyskania prędkość końcowa:

$$v_k = v_{odrz} \cdot \ln \left(\frac{m_S + m_R + m_P}{m_S + m_R} \right) \\ \approx v_{odrz} \cdot \ln(1 + f)$$

gdzie: $f = \frac{m_P}{m_R} \quad m_S \ll m_R$

stosunek masy paliwa do masy rakiety

$$f = \exp \left(\frac{v_k}{v_o} \right) - 1 \approx 38$$

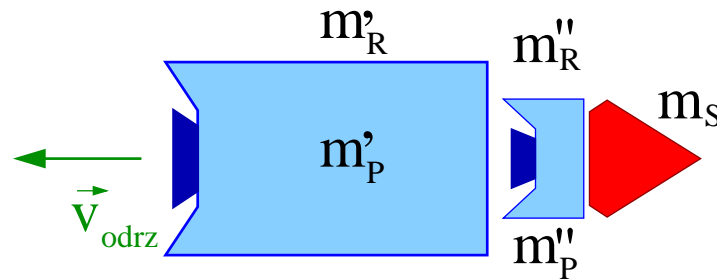
Teoretycznie możliwe,
praktycznie niewykonalne (?)...
i nieopłacalne !...

Ruch ciał o zmiennej masie

Rakieta dwustopniowa

Raketę dzielimy na dwa człony o masach m'_R i m''_R ,
w których znajduje się paliwo o masie m'_P i m''_P :

$$\begin{aligned} m'_R + m''_R &= m_R \\ m'_P + m''_P &= m_P \end{aligned}$$



Prędkość końcowa:

$$v_k = v_{odrz} \cdot \left[\ln \left(\frac{m_S + m_R + m_P}{m_S + m_R + m''_P} \right) + \ln \left(\frac{m_S + m''_R + m''_P}{m_S + m''_R} \right) \right]$$

W przybliżeniu $m_S \ll m''_R \ll m'_R$: $v_k \approx v_{odrz} \cdot 2 \ln(1 + f)$

Aby uzyskać II prędkość kosmiczną $v_k \approx 11 \text{ km/s}$ przy $v_o = 3 \text{ km/s}$:

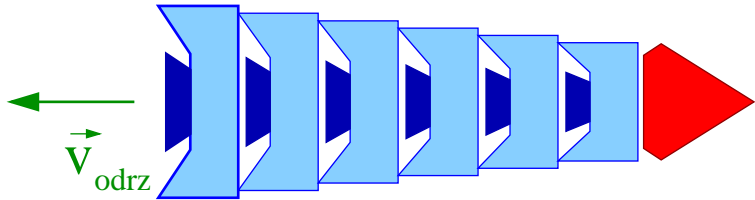
$$f = \exp \left(\frac{v_k}{2 v_o} \right) - 1 \approx 5.3$$

Dla $f \approx 10$ (dla obu członów) można wystrzelić w kosmos $m_S \approx 0.6\% (m_R + m_P)$
przy optymalnym wyborze $m''_R \approx 7\% m_R$

Ruch ciał o zmiennej masie

Rakieta wielostopniowa

Rakieta składa się z wielu członów.
W każdym z nich stosunek masy paliwa do “obudowy” wynosi f



W granicy wielu bardzo małych członów:

$$m d\vec{v} = dm \vec{v}_{odrz} \cdot \frac{f}{f+1}$$

Co sprowadza się do:

$$v_k = v_{odrz} \cdot \frac{f}{f+1} \cdot \ln \left(1 + \frac{m_R}{m_S} (1+f) \right)$$

Aby uzyskać II prędkość kosmiczną dla $m_S \approx 100 \text{ kg}$ przy rakiemie o $f = 10$:

$$m_R = \frac{m_S}{1+f} \left[\exp \left(\frac{v_k (1+f)}{v_o f} \right) - 1 \right]$$

$$m_R \approx 500 \text{ kg}$$

$$m_P \approx 5000 \text{ kg}$$

Przy rakiemie jednoczłonowej, przy tych samych m_S i m_R potrzebaby 228'000 kg paliwa !!!

Dla rakiety dwuczłonowej:
 $m_R \approx 1600 \text{ kg}$, $m_P \approx 16'000 \text{ kg}$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt **Fizyka wobec wyzwań XXI w.**
współfinansowany przez Unię Europejską
ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki