



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



# Dynamika relatywistyczna

## Fizyka I (Mechanika)

### Wykład XI:

- relatywistyczna definicja pędu
- ruch pod wpływem stałej siły
- relatywistyczna definicja energii, zasady zachowania
- akceleratory cząstek
- transformacja Lorentza dla energii i pędu
- foton jako cząstka: efekt Dopplera i efekt Comptona

# Wprowadzenie

Zagadnienia ruchu ciał w mechanice **nierelatywistycznej** (Newtona/Galileusza) rozwiązywaliśmy w oparciu o

## Równania ruchu

Ruch ciała jest zadany przez działające na nie siły zewnętrzne + warunki początkowe

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R \quad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \quad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

lub

## Zasady zachowania

Dla układu izolowanego i ruchu pod wpływem sił zachowawczych

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const} \quad \vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

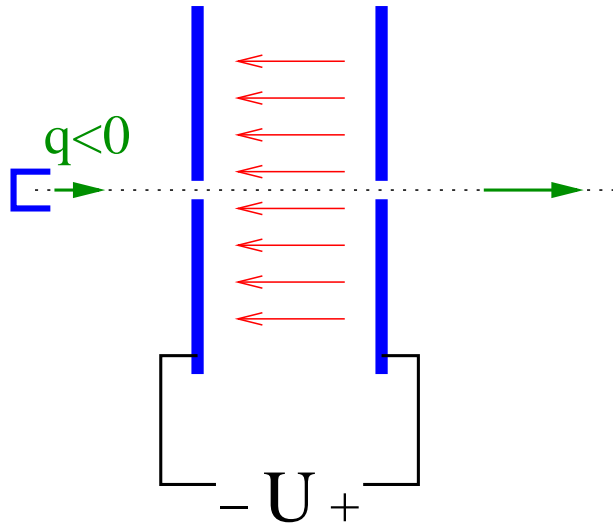
$$E = E_p + E_k = E_p + \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \text{const} \quad \vec{E}_{k,i} = \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Czy podejścia te można też wykorzystać w przypadku relatywistycznym?

# Pęd cząstki

## Granice podejścia klasycznego

Elektron w kondensatorze  
(najprostszy 'akcelerator' cząstek):



Klasycznie:

$$m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{E}$$

Potrafimy wytwarzać pola elektryczne

$$E \sim 10 \text{ MV/m} = 10^7 \text{ V/m}$$

Dla elektronu:

$$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 0.5 \text{ MeV}/c^2$$

$$|q_e| \equiv 1 e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\Rightarrow a \approx 20 \text{ m}^{-1} \cdot c^2 \approx 2 \cdot 10^{18} \text{ m/s}^2$$

W podejściu klasycznym elektron powinien osiągnąć prędkość światła już po przebyciu

$$\Delta x \approx 2.5 \text{ cm} !!!$$

$\Rightarrow$  konieczność modyfikacji praw ruchu

# Pęd cząstki

## Uogólnienie praw ruchu

Założmy, że chcemy zachować klasyczną definicję siły opartą na II prawie Newtona

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Oznacza to jednak, że musimy zmienić definicję pędu, bo Newtonowska definicja

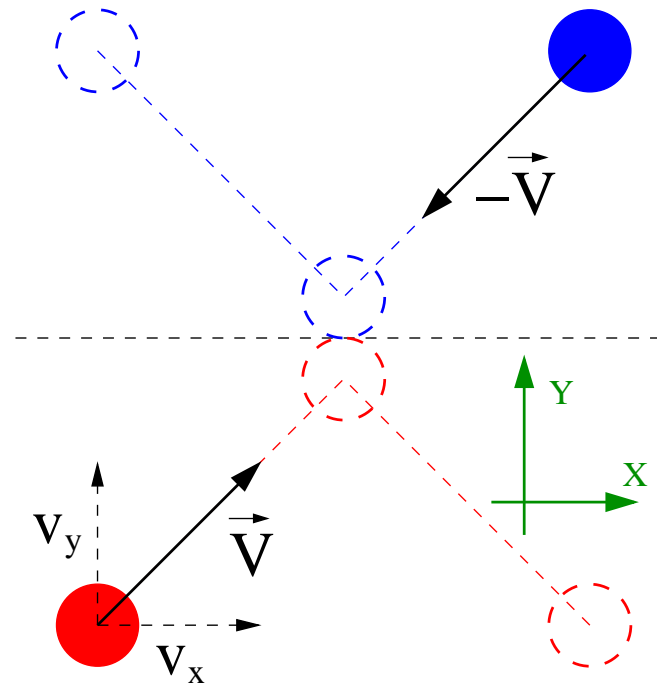
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

ogranicza wartość pędu od góry ( $v < c$ )  
a przecież wciąż mogą działać siły...

Ale może definicja pędu jest OK,  
a definicję siły trzeba zmienić?

## Doświadczenie myślowe

Zderzenie dwóch kul o jednakowej masie  $m$ :

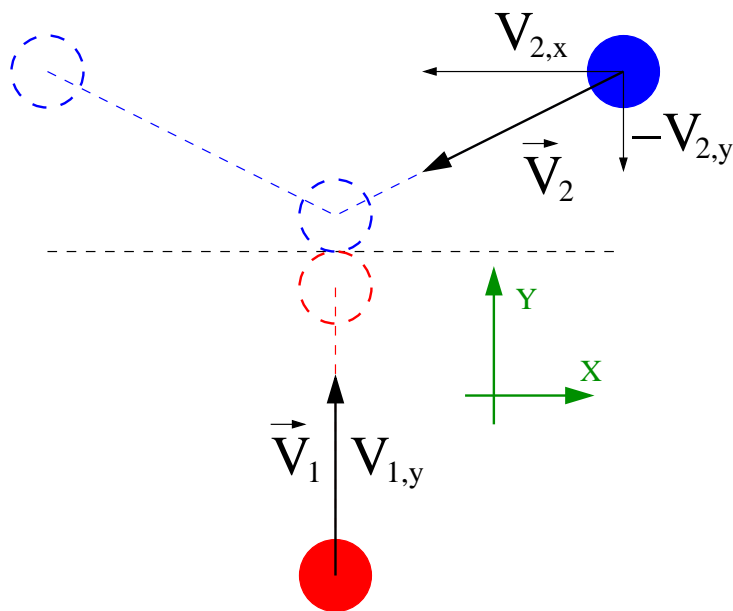


Pędy obu kul są równe co do wartości  
ale przeciwnie skierowane

# Pęd cząstki

## Doświadczenie myślowe

Przejdźmy do układu w którym jedna z kul porusza się tylko wzdłuż osi Y:



Pędy wzdłuż osi Y powinny być równe.

Dwie kule  $\Rightarrow$  dwa układy odniesienia

Wybór jednej z kul łamie symetrię zagadnienia !

Przesunięcia wzdłuż osi Y nie zmieniają się w transformacji Lorentza, ale zmienia się czas w jakim następują.

Prędkość wzdłuż osi Y **pierwszej kuli**:

$$V_{1,y} = \gamma V_y$$

Prędkość wzdłuż osi Y **drugiej kuli**:

$$V_{2,y} = \frac{V_y}{\gamma(1 + \beta^2)}$$
$$\beta = \frac{V_x}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}$$

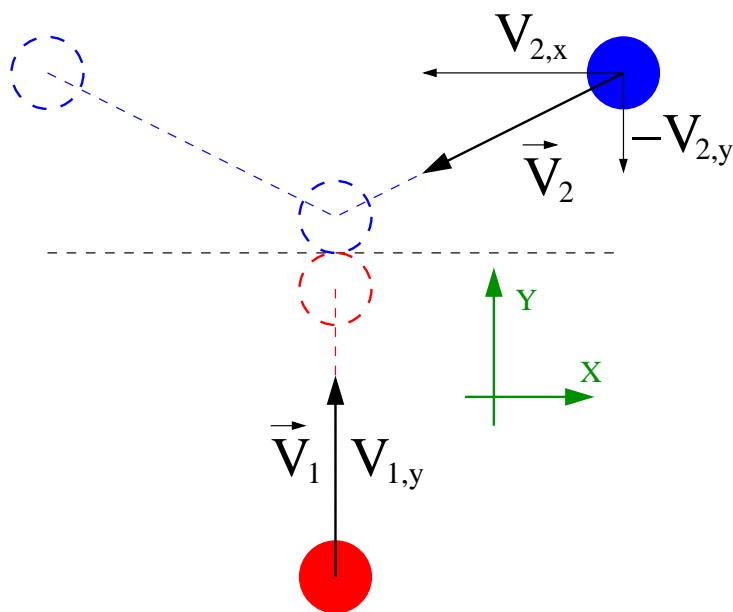
Czyli:

$$m V_{1,y} \neq m V_{2,y}$$

# Pęd cząstki

## Doświadczenie myślowe

Układ w którym jedna z kul porusza się tylko wzdłuż osi Y:



Z dodawania prędkości:

$$V_{2,x} = \frac{-2V_x}{\gamma(1 + \beta^2)}$$

Prędkość wzdłuż osi Y **drugiej** kuli jest zmniejszona na skutek dylatacji czasu:

$$V_{2,y} = \frac{V_{1,y}}{\gamma'} \quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - V_{2,x}^2/c^2}}$$

Przyjmijmy, że  $V_y \ll c$ , ale  $V_x \sim c$ , wtedy:

$$\begin{aligned} \gamma_1 V_{1,y} &= \gamma_2 V_{2,y} \\ \gamma_1 &= 1 \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - V_2^2/c^2}} \end{aligned}$$

Zasadę zachowania pędu możemy w naszym przypadku “uratować” modyfikując definicję:

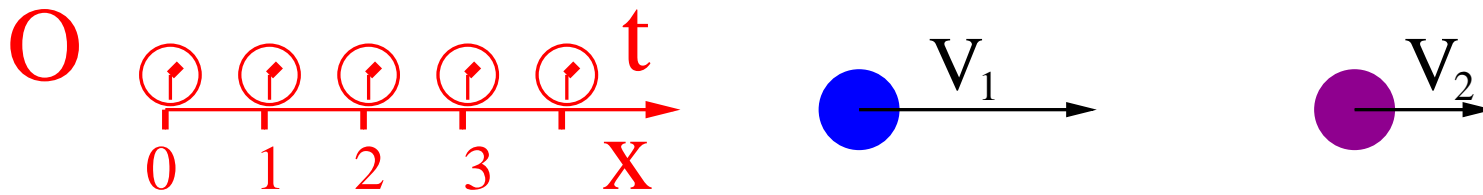
$$\vec{p} = m \cdot \gamma \cdot \vec{v}$$

Czy tak zdefiniowany pęd jest zachowany w ogólnym przypadku?

# Pęd cząstki

Wyrażenie na pęd dla cząstek relatywistycznych możemy też wyprowadzić z zasady względności (+ relatywistyczne składanie prędkości)

Wyobraźmy sobie dwie identyczne kule lecące (w układzie O) z prędkościami  $V_1$  i  $V_2$  wzdłuż osi X:



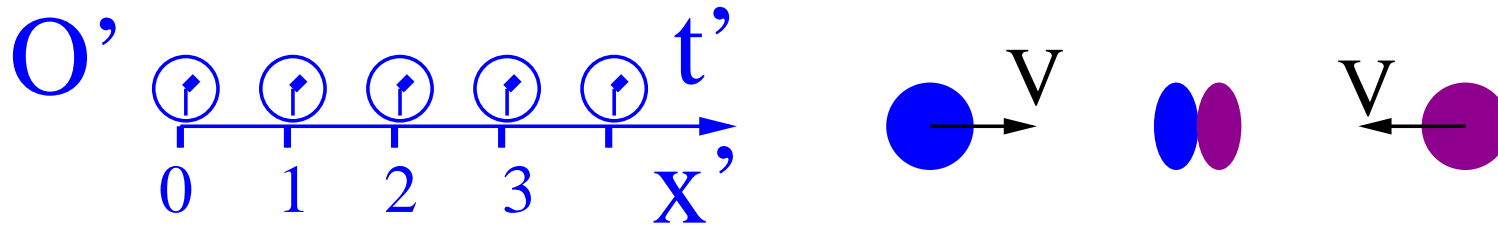
Przyjmijmy, że w którymś momencie ciało 1 dogania ciało 2 i zlepia się z nim. Jaka będzie prędkość ciał po zlepieniu?



Klasycznie byłoby to  $V_c = \frac{V_1 + V_2}{2}$ , co wynikało właśnie z zasady zachowania pędu...

## Pęd cząstki

Przejdźmy do układu odniesienia  $O'$  związanego z powstającym “zlepkiem”.



Ponieważ kule są identyczne z symetrii zagadnienia oczekujemy, że w układzie tym będą miały prędkości **równe** co do wartości, lecz **przeciwnie skierowane**.

**Wiemy już jednak jak składają się prędkości!**

Prędkości w układzie  $O'$  wyrażają się przez  $V_1$  i  $V_2$ , oraz prędkość  $O$  względem  $O'$  ( $-V_c$ )  
Ze wzoru na składanie prędkości:

$$V = \frac{V_1 - V_c}{1 - \frac{V_1 V_c}{c^2}} \quad \text{i} \quad -V = \frac{V_2 - V_c}{1 - \frac{V_2 V_c}{c^2}}$$

(wartość ujemna prędkości odpowiada zwrotowi przeciwnemu do osi X)

Rozwiązujemy ten układ równań, dla uproszczenia wprowadzając prędkości względne:

$$\beta_1 = \frac{V_1}{c}, \quad \beta_2 = \frac{V_2}{c}, \quad \beta_c = \frac{V_c}{c}$$



## Pęd cząstki

Ostatecznie otrzymujemy: (pomijając dość żmudne przekształcenia)

$$\beta_c = \frac{\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

Prędkość zlepionych kul poruszających się początkowo z prędkościami  $\beta_1$  i  $\beta_2$ .

Dla symetrii pomnóżmy licznik i mianownik po lewej stronie przez  $\gamma_c$ :

$$\frac{\beta_c \gamma_c}{\gamma_c} = \frac{\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

Wartość ułamka nie zmienia się jeśli licznik i mianownik pomnożymy przez tą samą liczbę ( $M$  dla lewej i  $m$  dla prawej strony):

$$\frac{\beta_c \gamma_c M}{\gamma_c M} = \frac{\beta_1 \gamma_1 m + \beta_2 \gamma_2 m}{\gamma_1 m + \gamma_2 m}$$

# Pęd relatywistyczny

Ale  $M$  i  $m$  są dowolne! Możemy zawsze tak dobrać stosunek ich wartości, żeby także liczniki i mianowniki po obu stronach równania były sobie równe:

$$\beta_c \gamma_c M = \beta_1 \gamma_1 m + \beta_2 \gamma_2 m$$

$$\gamma_c M = \gamma_1 m + \gamma_2 m$$

Wychodząc z bardzo ogólnych założeń otrzymaliśmy dwa prawa zachowania!

Symetria + zasada względności + właściwy dobór współczynników  $M$  i  $m$

Uogólniając na dowolną liczbę cząstek w stanie początkowym ( $ini$ ) i końcowym ( $fin$ ):

$$\sum_{i \in ini} \beta_i \gamma_i m_i = \sum_{j \in fin} \beta_j \gamma_j m_j$$

$$\sum_{i \in ini} \gamma_i m_i = \sum_{j \in fin} \gamma_j m_j$$

Czy możemy zidentyfikować poszczególne człony?

# Pęd relatywistyczny

W granicy małych prędkości ( $\beta \ll 1$ ,  $\gamma = 1$ ) równania te sprowadzają się do

$$c \sum_i \beta_i m_i = \sum_i m_i V_i = \text{const} \quad \text{zasada zachowania pędu}$$
$$\sum_i m_i = \text{const} \quad \text{zasada zachowania masy}$$

Jak poprzednio dochodzimy do wniosku, że relatywistyczne wyrażenie na pęd cząstki to

$$p = m c \gamma \beta = m \gamma V$$

Wprowadzone współczynniki  $m$  są miarą bezwładności ciał i nazywamy je masą.

Jedną z mas mogliśmy ustalić dowolnie - wybór wzorca masy.

Masy pozostałych cząstek można następnie wyznaczyć w oddziaływaniu ze wzorcem (z wyprowadzonych praw zachowania).

# Ruch pod wpływem stałej siły

## Równanie ruchu

Chcemy zachować klasyczną definicję siły opartą na II prawie Newtona:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

gdzie:  $\vec{p} = m \gamma \vec{v} = mc \gamma \vec{\beta}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

W przypadku ruchu prostoliniowego

$$\begin{aligned} F &= \frac{d}{dt} (mc \gamma \beta) \\ &= mc \gamma^3 \frac{d\beta}{dt} \end{aligned}$$

⇒ przyspieszenie maleje jak  $\gamma^{-3}$  !

Rozwiązanie ruchu pod wpływem stałej siły elektrycznej  $F = qE$ :

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{qE}{mc} (1 - \beta^2)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\beta}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \frac{qE}{mc} dt$$

Całkujemy podstawiając  $\beta = \sin u$ :

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{qE}{mc} \int dt$$

$$\Rightarrow \tan u = \frac{qE}{mc} \cdot t$$

przyjmując, że cząstka spoczywała w  $t = 0$

Tożsamość trygonometryczna:

$$\sin u = \frac{\tan u}{\sqrt{1 + \tan^2 u}}$$

# Ruch pod wpływem stałej siły

Otrzymujemy rozwiązanie w postaci:

$$\beta(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}}$$

gdzie:  $\alpha = \frac{qE}{mc}$

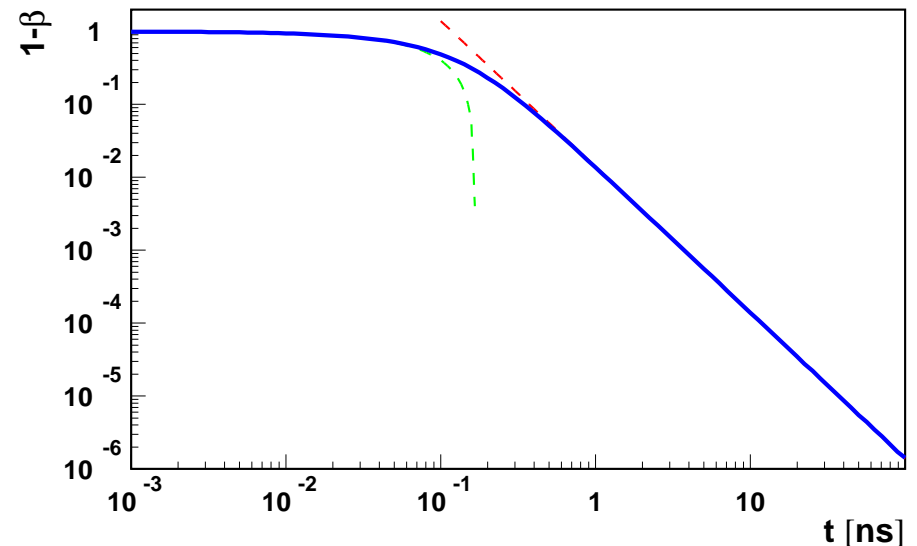
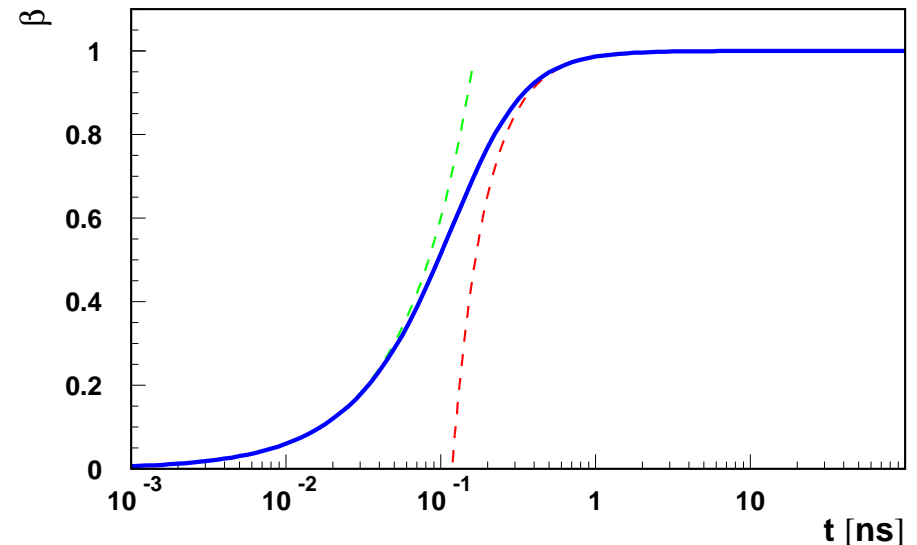
W naszym przykładzie ( $e^-$  w polu  $10 \frac{MV}{m}$ )  
 $\alpha \sim 6 \cdot 10^9 s^{-1}$ ,  $\alpha^{-1} \sim 0.17 ns$

W granicy  $\alpha t \gg 1$ :

$$1 - \beta(t) \approx \frac{1}{2\alpha^2 t^2}$$

nigdy nie osiągniemy  $\beta = 1$

Ale:  $p(t) = mc \alpha \cdot t$  – rośnie  $\sim t$ !



# Ruch pod wpływem stałej siły

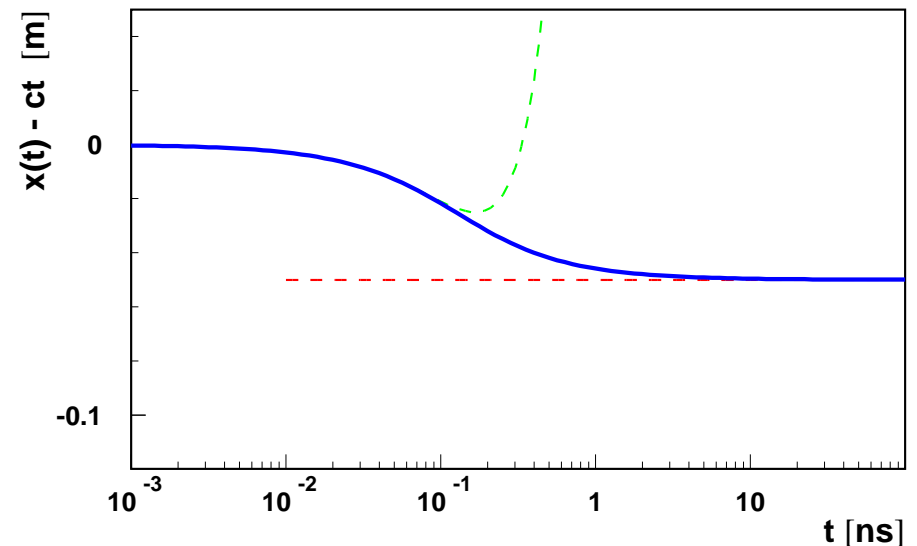
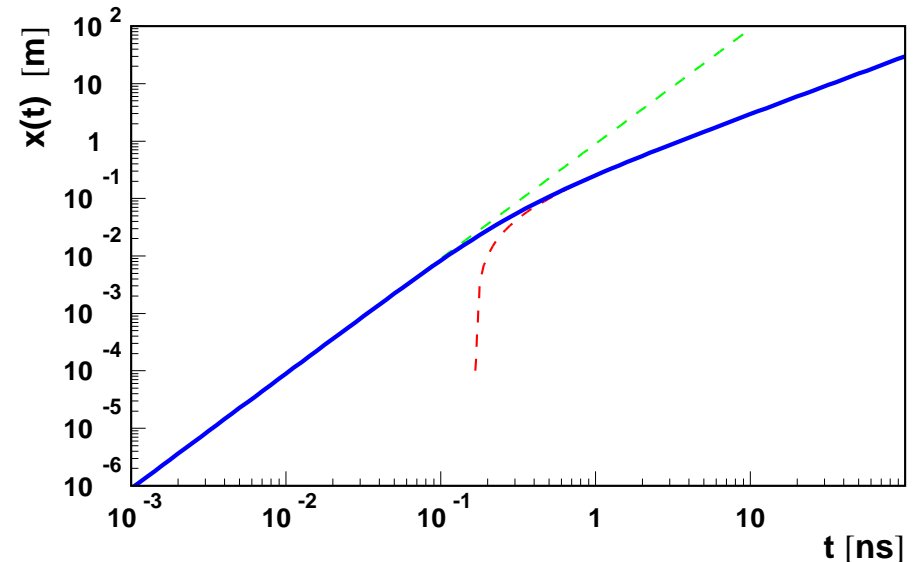
Rozwiązując dalej otrzymujemy:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c \alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}}$$
$$\Rightarrow x(t) = \int dx = \frac{c}{\alpha} \int \frac{\alpha t d(\alpha t)}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}}$$
$$= \frac{c}{\alpha} \left( \sqrt{1 + (\alpha t)^2} - 1 \right)$$

W granicy  $\alpha t \gg 1$ :

$$x(t) \approx ct - \frac{c}{\alpha}$$

W naszym przykładzie:  
światło wyprzedzi elektron tylko o 5 cm !!!



# Energia relatywistyczna

Dla ruchu ciała pod wpływem stałej siły otrzymaliśmy:

$$x(t) = \frac{c}{\alpha} \left( \sqrt{1 + (\alpha t)^2} - 1 \right)$$

$$\beta(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}} \quad \text{gdzie:} \quad \alpha = \frac{F}{mc}$$

Można zauważyć, że:  $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2(t)}} = \sqrt{1 + (\alpha t)^2}$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{mc^2}{F} (\gamma - 1)$$

**Energia kinetyczna** jest równa **pracy** wykonanej przez siłę:

$$E_k(t) = F \cdot x(t) = m c^2 (\gamma(t) - 1)$$

# Energia relatywistyczna

Uzyskaną zasadę zachowania:

$$\sum_i \gamma_i m_i c^2 = \text{const}$$

możemy więc przepisać w postaci:

$$\sum_i [m_i c^2 (\gamma_i - 1) + m_i c^2] = \text{const}$$

$$\sum_i [E_{k,i} + E_{0,i}] = \text{const}$$

Gdzie:  $E_k = m c^2 (\gamma - 1)$  - energia kinetyczna  
 $E_0 = m c^2$  - energia spoczynkowa ciała

Konieczność wprowadzenia energii spoczynkowej wynika z otrzymanej postaci zasady zachowania energii!

Energia całkowita:

$$E = E_k + E_0 = \gamma \cdot m c^2$$



# Energia relatywistyczna

Wyrażenie na energię kinetyczną

$$E_k = m c^2 (\gamma - 1) = m c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right)$$

W granicy małych prędkości ( $\beta \ll 1$ ) korzystamy ze wzorów na rozwinięcie w szereg:

$$\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \dots$$

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} \approx 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2$$

$$E_k = m c^2 (\gamma - 1) = \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - 1\right) = \frac{1}{2}m c^2 \beta^2 = \frac{1}{2}m V^2$$

Odtwarzamy klasyczne wyrażenie na energię kinetyczną

# Zasady zachowania energii i pędu

Energia całkowita ciała:

$$E = \gamma \cdot m c^2$$

pęd ciała:

$$\vec{p} = \gamma \cdot m \vec{V}$$

$$c \vec{\beta} = \vec{\beta} \gamma \cdot m c^2$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$$

Wychodząc z reguły **składania prędkości** (zasada bezwładności + zasada względności), wykorzystując **symetrię** rozważanego zagadnienia (zasada względności) oraz możliwość doboru współczynników opisujących **bezwładność** ciała (masę) otrzymaliśmy:

$$\sum_i E_i = \sum_i \gamma_i m_i c^2 = const$$

zasada zachowania energii

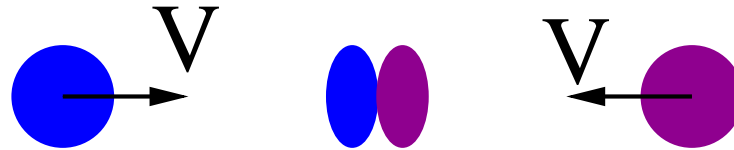
$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i \gamma_i \cdot m_i \vec{V}_i = const$$

zasada zachowania pędu

Zasady te wyprowadziliśmy dla procesu zderzenia, ale okazuje się, że są one dużo bardziej ogólne. **Zasady te obowiązują we wszystkich znanych nam procesach!!!**

# Zasady zachowania energii i pędu

Zasada zachowania energii ma jednak swoją “cenę”



Z zasady zachowania energii:

$$\begin{aligned}E_c &= E_1 + E_2 \\M c^2 &= \gamma m c^2 + \gamma m c^2 \\M &= 2 \gamma m\end{aligned}$$

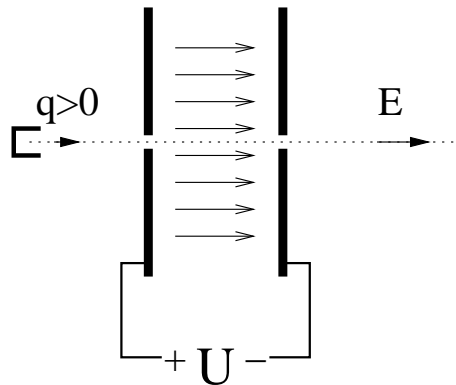
Masa “zlepka” jest większa niż suma mas cząstek!  $M > m + m$

W świecie relatywistycznym przestaje obowiązywać zasada zachowania masy!

Energia kinetyczna zderzających się cząstek została zamieniona na energię wewnętrzną, co jest równoważne ze wzrostem masy (energii spoczynkowej) “zlepka”.

# Energia relatywistyczna

## Jednostki



$$\Delta E = U \cdot q$$

Naturalną jednostką w fizyce cząstek jest **1 elektronowolt**  
**1 eV** - energia jaka zyskuje cząstka o ładunku **1 e** (ładunek elementarny) przy przejściu różnicy potencjału **1 V**.

$$1 e = 1.6 \cdot 10^{-19} C \Rightarrow 1 eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J$$

Jednostki pochodne:

$$1 keV = 10^3 eV, 1 MeV = 10^6 eV, 1 GeV = 10^9 eV.$$

Jednostkę energii możemy też przyjąć za jednostkę masy ( $E = mc^2$ ;  $c \equiv 1$ )

$$1 eV/c^2 \equiv 1 eV = 1.8 \cdot 10^{-36} kg$$

elektron	<b>e</b>	511 keV	$(9.1 \cdot 10^{-31} kg)$	kwark	<b>t</b>	173 GeV
proton	<b>p</b>	938 MeV	$(1.7 \cdot 10^{-27} kg)$	bozon	$W^\pm$	80.4 GeV
neutron	<b>n</b>	940 MeV			$Z^0$	91.2 GeV

# Akceleratory

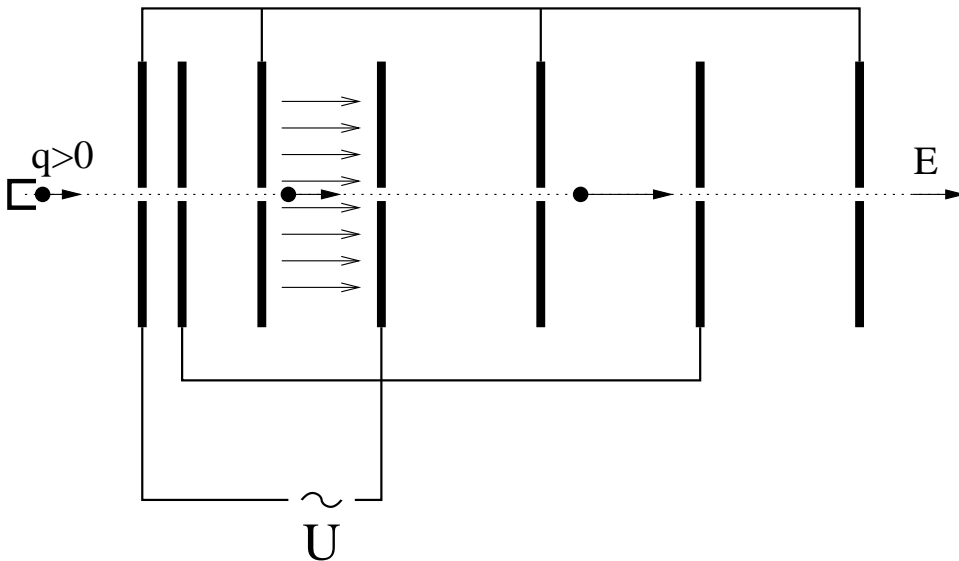
W 1919 roku Rutherford wskazał na korzyści z przyspieszania cząstek.

Pole elektrostatyczne (g. Cockrofta-Waltona, Van de Graaffa) ograniczone do  $\sim 30$  MV

## Akcelerator liniowy

Idea: **Gustav Ising 1924**. Pierwsze urządzenia: **Rolf Wideroe 1927**, Lawrence 1931.

Cząstka przechodzi przez kolejne  
“kondensatory”



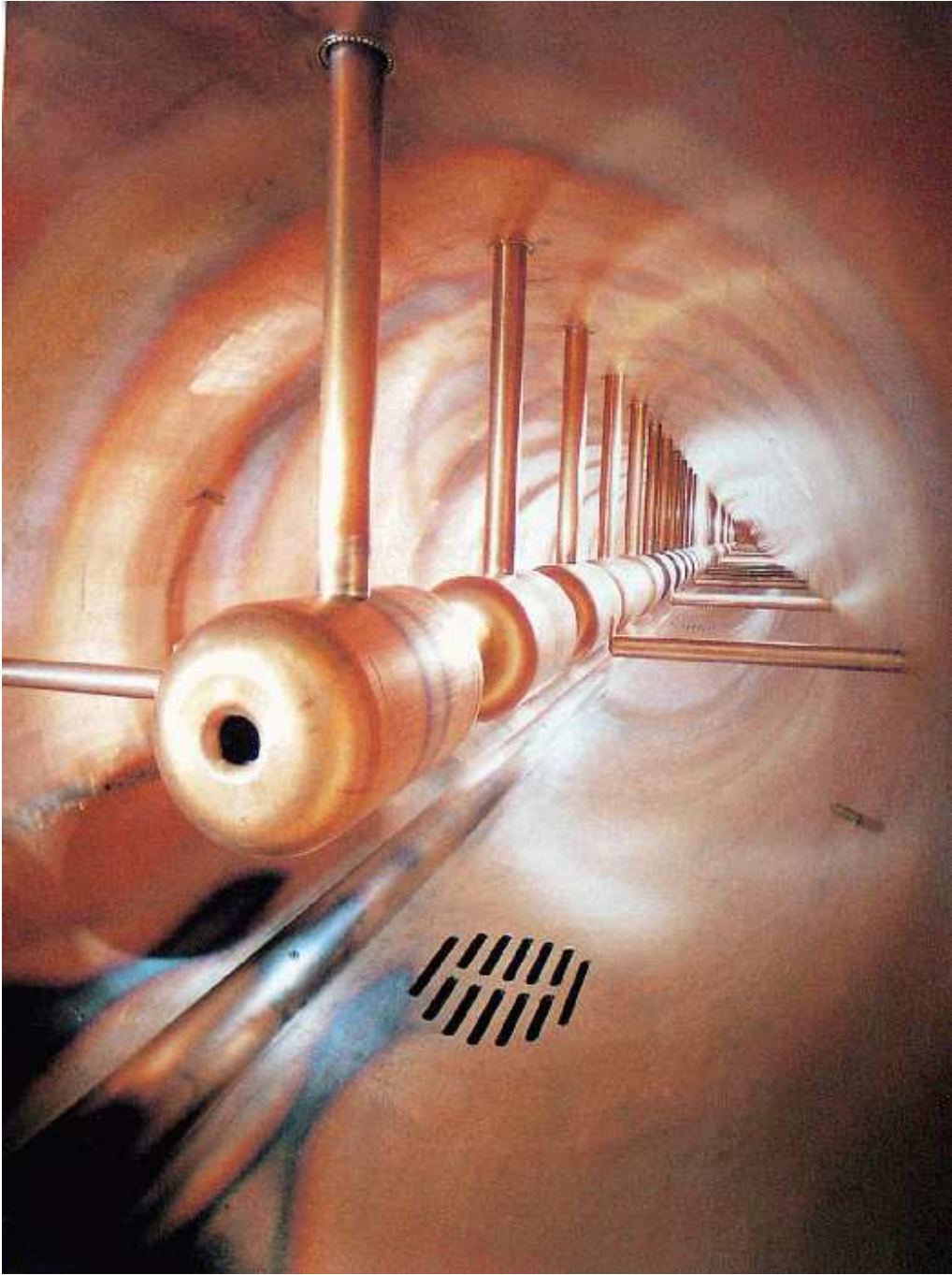
Przy odpowiednim dobraniu długości kolejnych elementów i częstości napięcia zasilającego, cząstka trafia zawsze na pole przyspieszające.

⇒ **zwielokrotnienie uzyskiwanych energii**

Częstość jest zazwyczaj stała. Długości kolejnych elementów rosną proporcjonalnie do prędkości cząstki.

**Dla  $E \gg m$ , prędkość  $\beta \rightarrow 1$ :  $L = \text{const.}$**

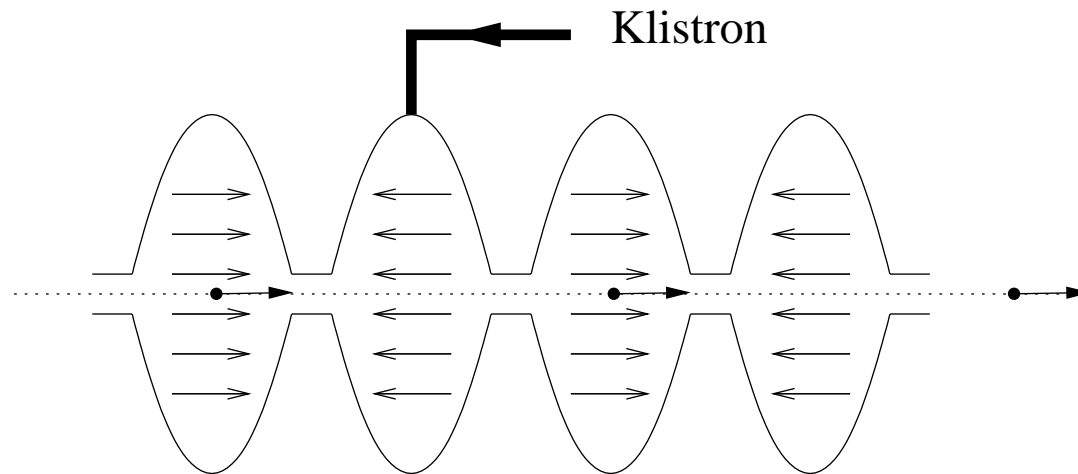
Liniowy akcelerator protonów  
w ośrodku Fermilab (USA)



# Akceleratory

## Wnęka rezonansowa

W praktyce do przyspieszania cząstek wykorzystujemy tzw. wnęki rezonansowe:



Wewnątrz wnęki wytwarzana jest stojąca fala elektromagnetyczna.

Długość fali/wnęki jest tak dobrana, że cząstka zawsze trafia na pole przyspieszające.

Częstości rzędu 1 GHz - mikrofałe.

Wnęki rezonansowe pozwalają uzyskiwać natężenia pola rzędu 10 MV/m

⇒ dla uzyskania energii 1 GeV potrzebny jest akcelerator liniowy o długości  $\sim 100$  m

## Wnęka rezonansowa





# Akceleratory

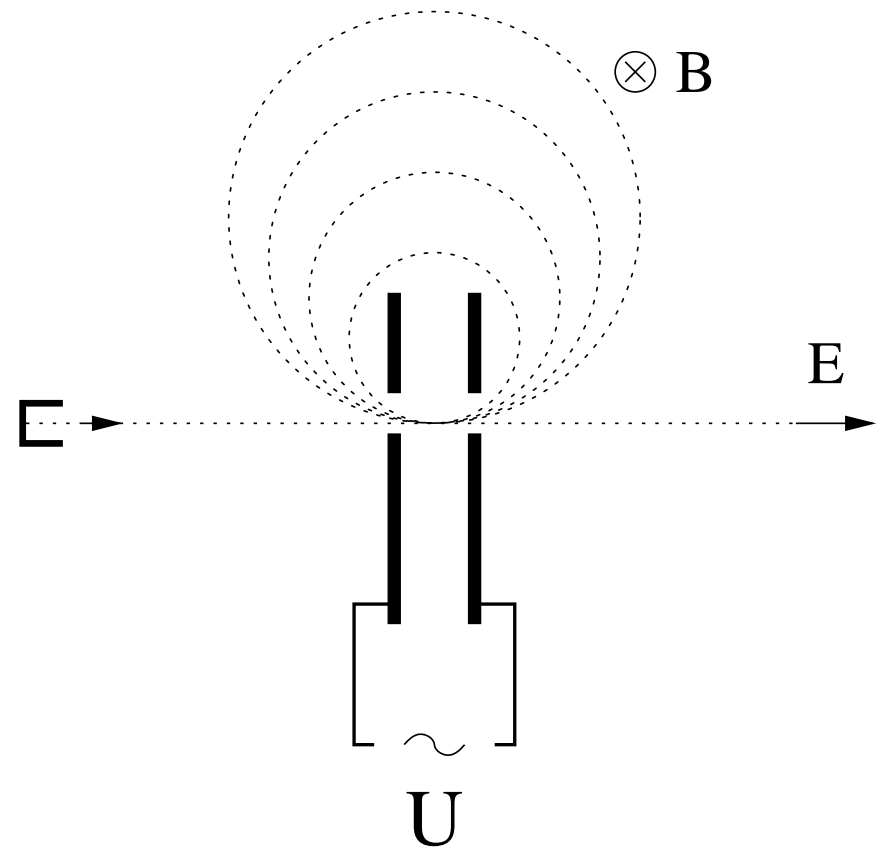
## Akcelerator kołowy

Zamiast używać wielu wnęk możemy wykorzystać pole magnetyczne do “zapętlenia” cząstki.

Cząstki mogą przechodzić przez wnękę przyspieszającą wiele razy...

Pierwszy tego typu akcelerator (**cyklotron**) zbudował w 1931 roku Ernest Lawrence

Schemat poglądowy:



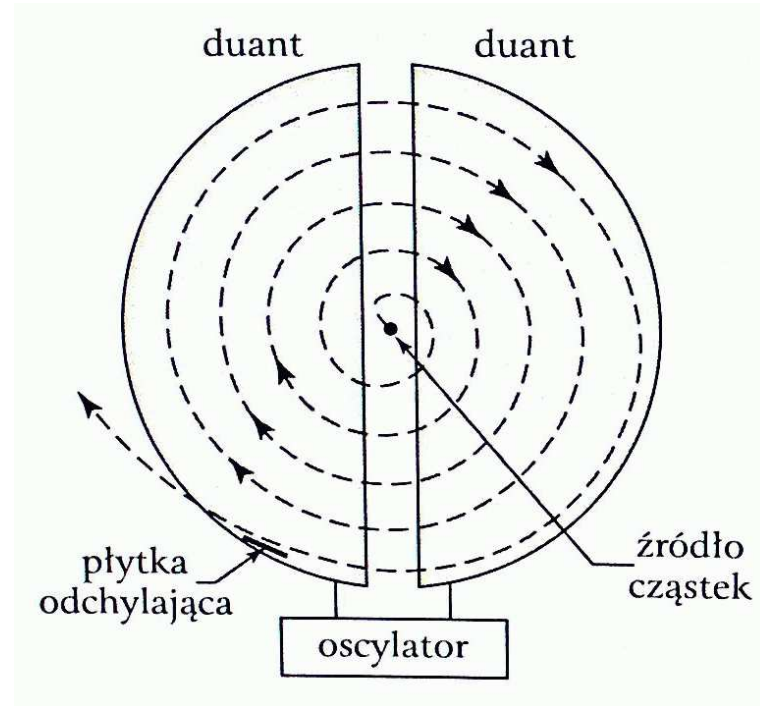
# Akcelerator

## Cyklotron

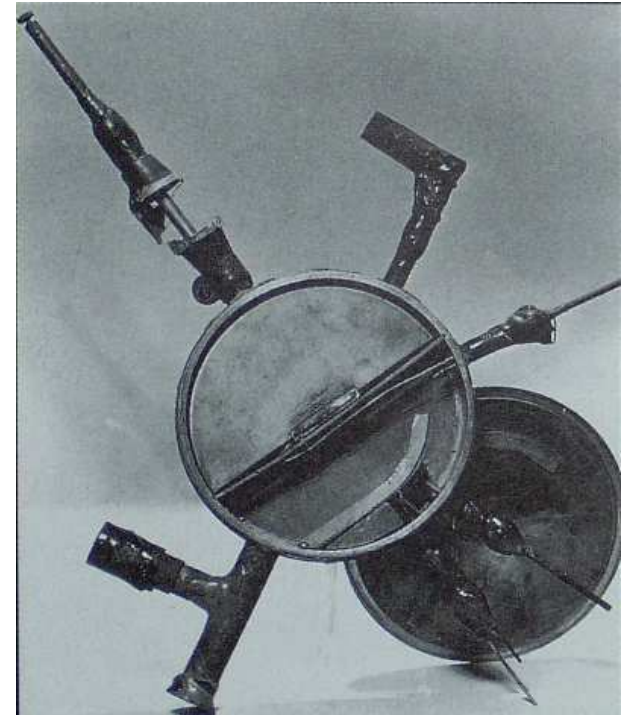
Ernest Lawrence



Schemat



Pierwszy cyklotron



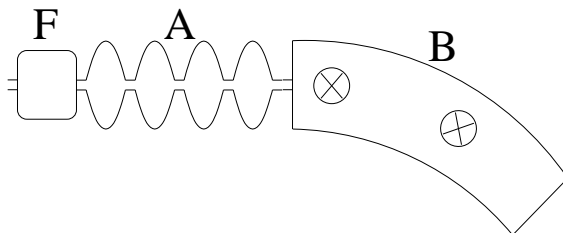
# Akceleratory

## Akcelerator kołowy

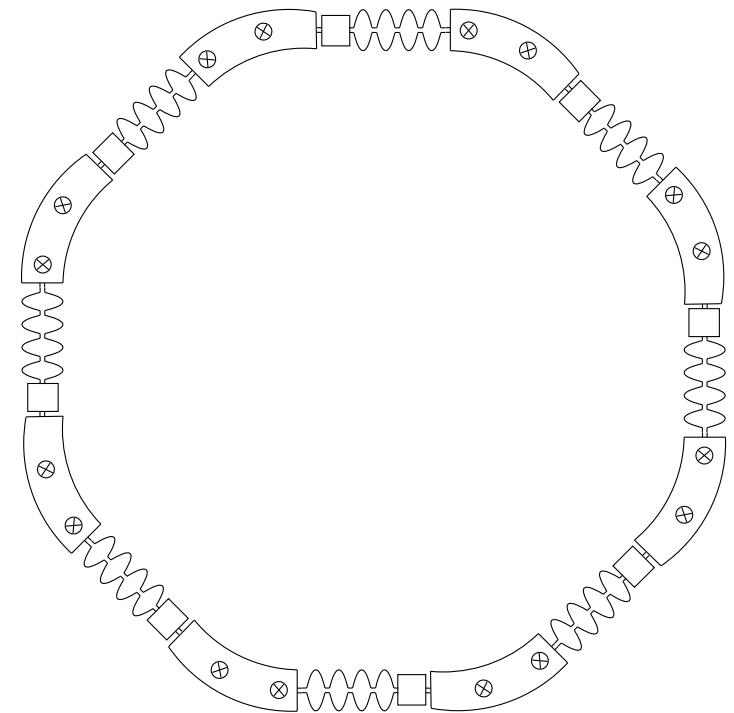
W praktyce akceleratory kołowe zbudowane są z wielu powtarzających się segmentów:

Każdy segment składa się z

- wnęk przyspieszających (A)
- magnesów zakrzywiających (B)
- układów ogniskujących (F)



Schemat akceleratora:



# Akceleratory

## LEP/LHC

Największym zbudowanym dotąd akceleratorem był **LEP**. Zbudowany w CERN pod Genewą miał obwód 27 km, przyspieszał **przeciwbieżne wiązki elektronów i pozytonów** do energii  $\sim 100$  GeV.

W tym samym tunelu zbudowano uruchomiony niedawno akcelerator **LHC**.

**Przeciwbieżne wiązki protonów o energii 7 TeV.**

W każdej 2800 "paczek" po  $10^{11}$  protonów.

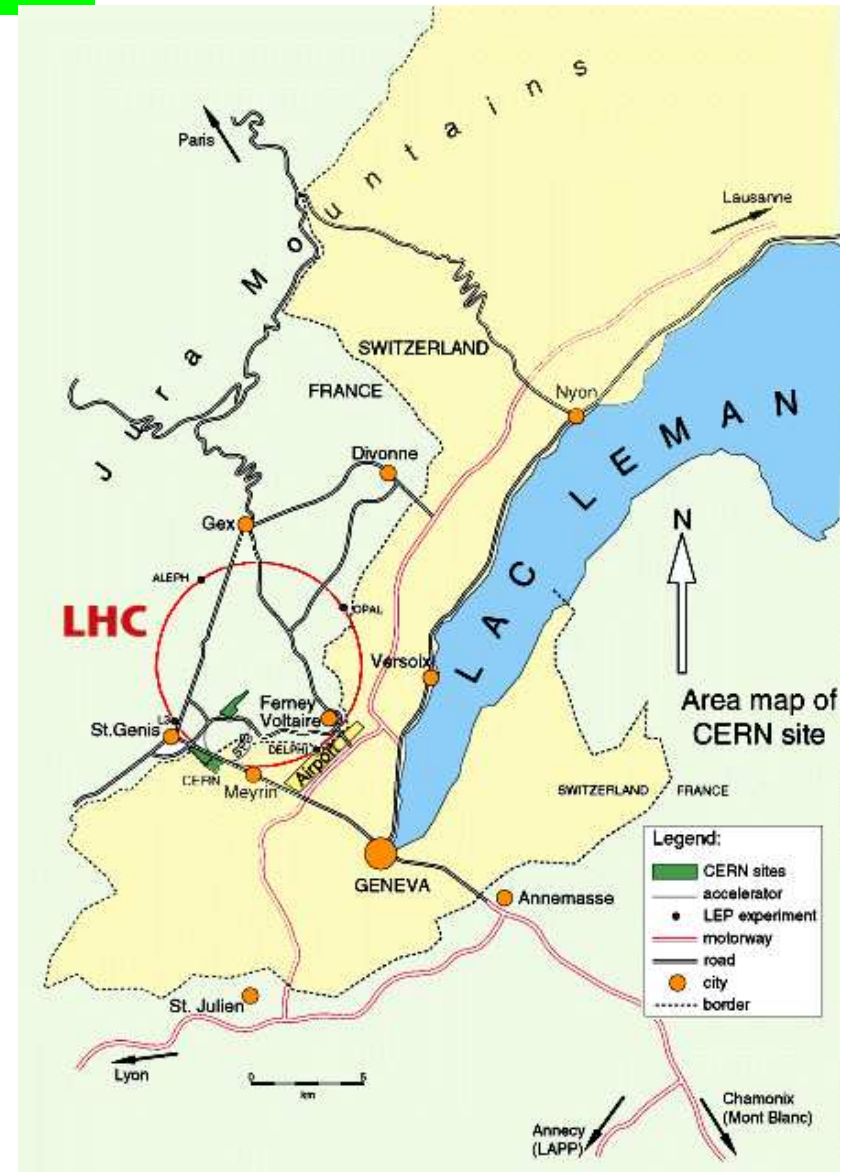
Energia jednej paczki:  $\sim 10^5$  J

**Samochód osobowy jadący ok. 60 km/h**

Całkowita energia wiązek:  $\sim 6 \cdot 10^8$  J

**Energia pola magnetycznego:  $\sim 10^{10}$  J**

**Airbus A380 lecący z prędkością 700 km/h.**



# LHC, CERN, Genewa



# Energia relatywistyczna

## Transformacja

Energia spoczynkowa cząstki:

$$E_0 = m c^2$$

Energia całkowita:

$$E = E_0 + E_k = m c^2 \cdot \gamma$$

Wyrażenie na pęd:

$$p = m c \cdot \beta \gamma$$

W układzie własnym cząstki:

$$p_0 = 0$$

Zgodnie z definicją układu środka masy.

Możemy zauważyć, że:

$$E = \gamma E_0$$

$$p c = \beta \gamma E_0$$

Jeśli cząstka porusza się wzdłuż osi  $X$ :

$$E = \gamma E_0$$

$$c p_x = \beta \gamma E_0$$

$$c p_y = 0$$

$$c p_z = 0$$

# Energia relatywistyczna

## Transformacja

Formalnie możemy zapisać:

$$(p_0 = p_{0,x} = p_{0,y} = p_{0,z} = 0)$$

$$\begin{pmatrix} E \\ c p_x \\ c p_y \\ c p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E_0 + \gamma \beta c p_{0,x} \\ \gamma \beta E_0 + \gamma c p_{0,x} \\ c p_{0,y} \\ c p_{0,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta & 0 & 0 \\ \gamma \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_0 \\ c p_{0,x} \\ c p_{0,y} \\ c p_{0,z} \end{pmatrix}$$

Okazuje się, że **energia** i **pęd** podlegają, przy zmianie układu odniesienia, transformacji **Lorenza** identycznej z transformacją **czasu i położenia**.

# Masa niezmiennicza

## Niezmiennik transformacji

Z definicji czynnika Lorentza

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\Rightarrow \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) = 1$$

$$\gamma^2 E_0^2 - \beta^2 \gamma^2 E_0^2 = E_0^2$$

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4$$

niezależnie od prędkości cząstki,  
czyli niezależnie od układu odniesienia

Wyrażenie:

$$s = M^2 c^4 = E^2 - c^2 p^2$$

jest niezmiennikiem transformacji Lorentza  
dla dowolnego układu fizycznego  
(nie zależy od wyboru układu odniesienia)

$M \equiv \sqrt{s}$  - masa niezmiennicza układu  
(masa inwariantna)

Kluczowa wielkość w opisie zderzeń  
relatywistycznych...



# Energia relatywistyczna

## Transformacja Lorentza

Transformacja Lorentza ma zastosowanie do wszystkich **czterowektorów**:

- czterowektor **położenia** (w czasoprzestrzeni):  $(ct, x, y, z)$
- czterowektor **energii-pędu** (“czteropęd”):  $(E, cp_x, cp_y, cp_z)$
- czteropotencjał **poła elektromagnetycznego**:  $(\Phi, A_x, A_y, A_z)$

$$\vec{E} = -\text{grad}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \text{rot}\vec{A}$$

- różnica dwóch czterowektorów (np. odstęp między zdarzeniami, przekaz czteropędu...)

Niezmiennikiem transformacji Lorentza jest “kwadrat” każdego czterowektora

$$|A^{(4)}|^2 = A_0^2 - |\vec{A}|^2 = A_0^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2$$

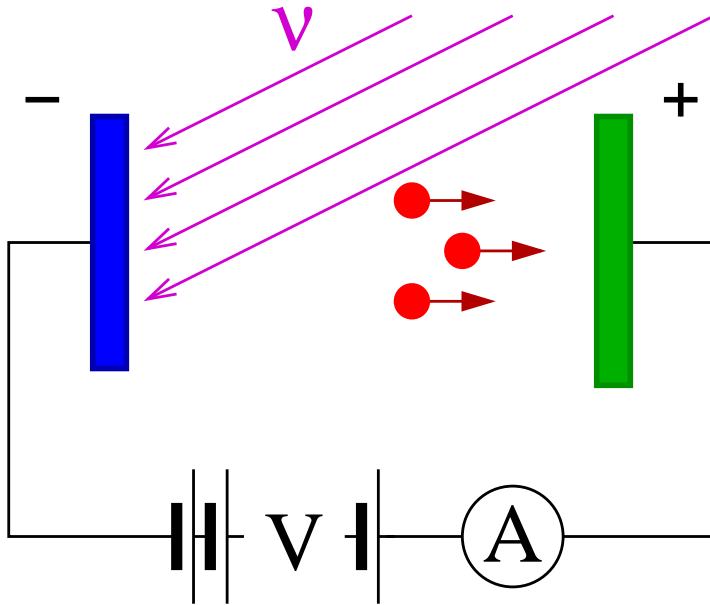
- zmiana położenia  $\Rightarrow$  interwał:  $s_{AB} = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$
- energia-pęd  $\Rightarrow$  masa niezmiennicza:  $M^2 = E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$

# Odkrycie fotonu

## Zjawisko fotoelektryczne

Odkryte przypadkowo przez Hertza w 1887 r.

Światło padając na metalową płytkę powoduje uwalnianie elektronów  $\Rightarrow$  przepływ prądu.



Doświadczenia wskazały, że energia uwolnionych elektronów zależy wyłącznie od **częstości światła** (długości fali) i **materiału katody**.

Opis falowy przewidywał, że prąd zależy wyłącznie od natężenia światła, a nie zależy od częstości!

Zjawisko fotoelektryczne wyjaśnił **Einstein (1905)** wprowadzając kwanty światła

**FOTONY**

**Energia foto-elektronów:**

$$E_e = E_\gamma - W = h\nu - W$$

$W$  - "praca wyjścia", minimalna energia potrzebna do uwolnienia elektronu z metalu.

# Odkrycie fotonu

## Natura światła

Fotony to **kwanty** promieniowania elektromagnetycznego.  
Przenoszą **oddziaływania** między cząstkami naładowanymi.

Mają naturę **korpuskularno-falową**:

- **fala** elektromagnetyczna, opisana równaniami Maxwella

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

podlega interferencji, dyfrakcji, załamaniu

- **cząstka** o ustalonej energii i pędzie, ale zerowej masie

$$m_\gamma \equiv 0 \Leftrightarrow \beta \equiv 1$$

może zderzać się z innymi cząstkami, być pochłaniana lub rozpraszana

Im **wyższa częstość** (mniejsza długość fali) promieniowania,

tym **wyższa energia** pojedynczego fotonu  $\Rightarrow$  **wyraźniejsze efekty korpuskularne**

$$E_\gamma = p_\gamma c = h \nu = \frac{hc}{\lambda} \quad \lambda \cdot \nu = c$$

W zjawisku fotoelektrycznym, foton “zderza się” z elektronem,  $\gamma + e^- \rightarrow e^-$

(proces typu  $2 \rightarrow 1$ ), i przekazuje mu energię konieczną do opuszczenia metalu.

# Efekt Dopplera

Klasycznie mamy dwa przypadki:

## Ruchome źródło

Źródło o częstotliwości  $\nu$  poruszające się z prędkością  $v$  względem ośrodka. **Częstość** dźwięku mierzona przez nieruchomego obserwatora

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{v}{c}}$$

## Ruchomy obserwator

Obserwator porusza się z prędkością  $v$  względem ośrodka i źródła dźwięku

Mierzona **częstość**:

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

Jeśli źródło i/lub obserwator poruszają się z dużymi prędkościami

⇒ należy uwzględnić dylatację czasu

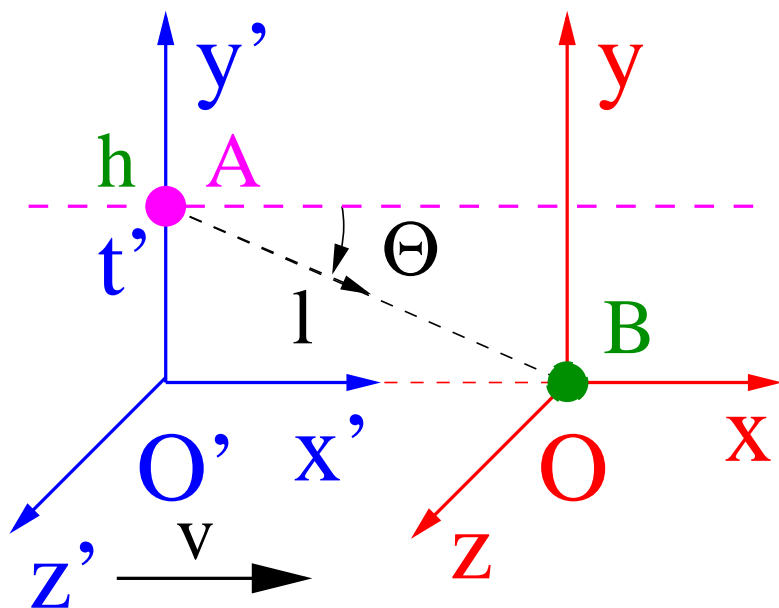
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)}}$$

⇒ Pełna symetria !

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

# Efekt Dopplera

## Przypadek ogólny



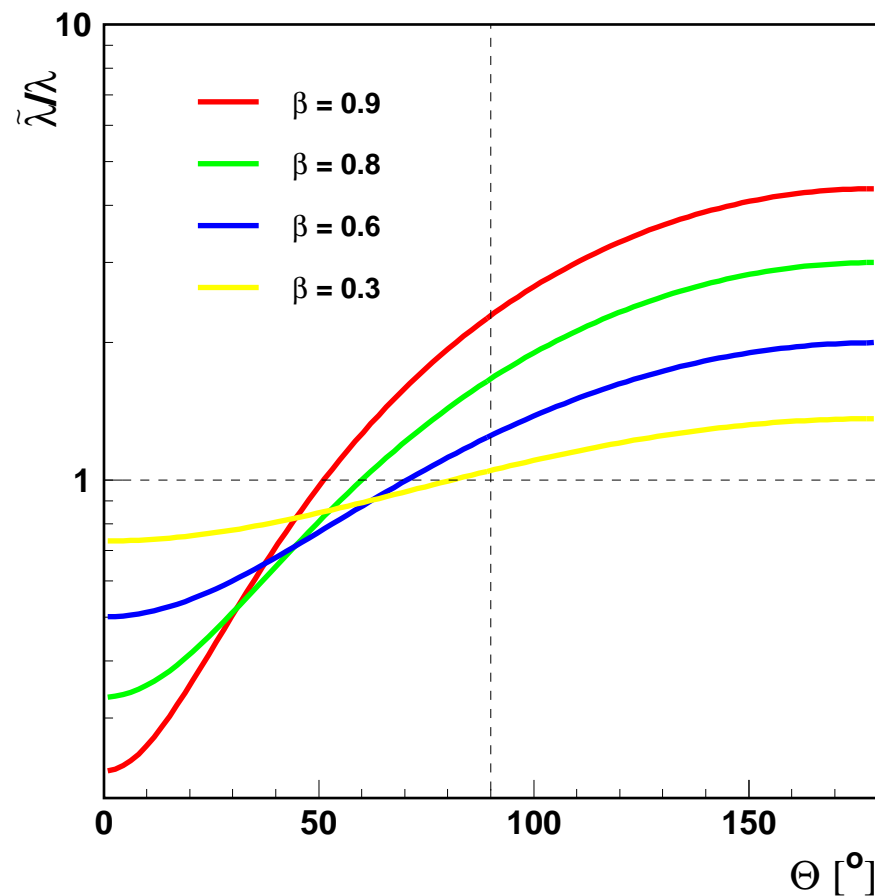
Przesunięcie długości fali:

mierzona  $\tilde{\lambda}$   
 emitowana  $\lambda$ 

$$\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = \frac{\tilde{T}}{T} = \gamma(1 - \beta \cos \Theta)$$

$\Theta$  - rejestrowany w O kąt lotu fotonu (!)

$(\pi - \Theta)$  - kierunek obserwacji



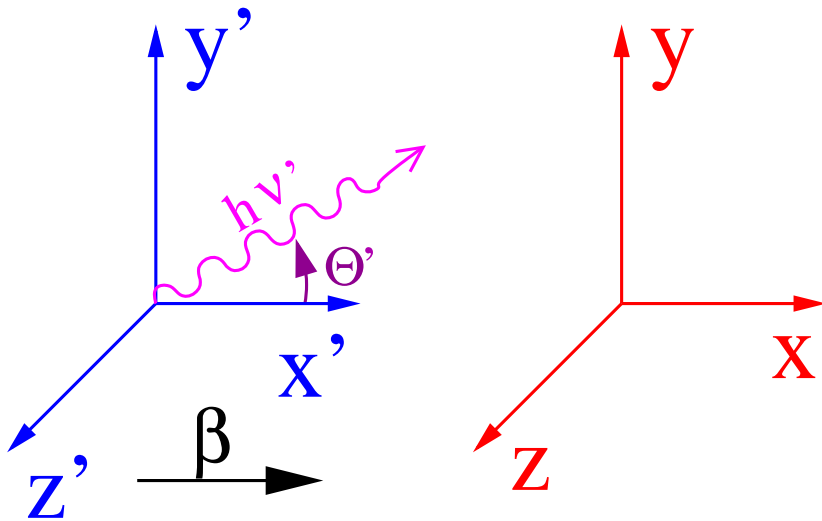
Zmiana częstości także dla  $\Theta = 90^\circ$  !!!

Klasycznie nie ma zmiany częstości...

# Efekt Dopplera

## Alternatywne podejście

Wyrażenia na **relatywistyczny efekt Dopplera (dla światła)** wynikają wprost z **transformacji Lorentza** !



Foton o energii  $E' = h\nu'$  emitowany jest pod kątem  $\theta'$  w układzie  $O'$ .

$$p'_x = E' \cos \theta' \quad p'_y = E' \sin \theta'$$

W układzie  $O$  z transformacji Lorentza:

$$\begin{aligned} h\nu = E &= \gamma E' + \beta \gamma p'_x \\ &= h\nu' \gamma (1 + \beta \cos \theta') \end{aligned}$$

Dla  $\theta' = 0$  mamy:

$$\nu = \nu' \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \nu' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

częstość (energia) rośnie

Dla  $\theta' = \pi$  mamy:

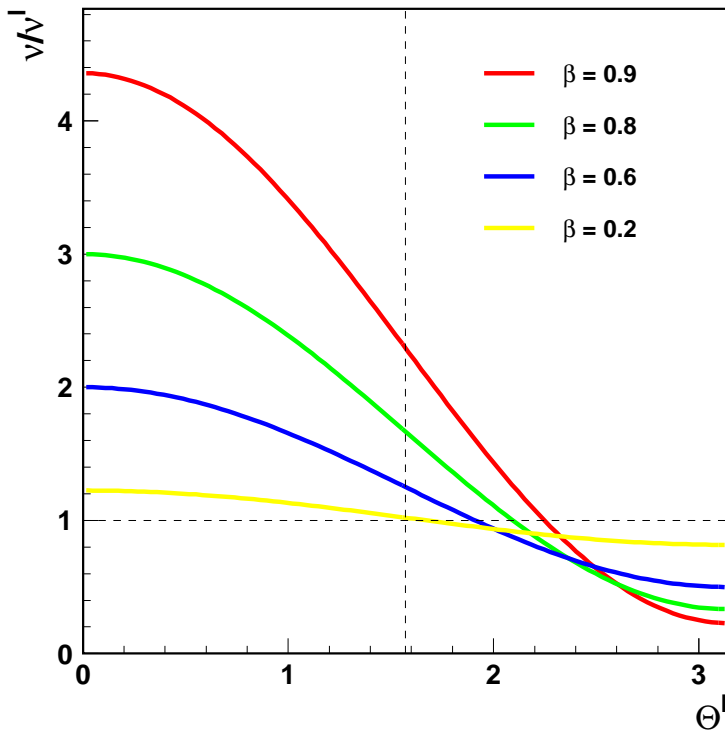
$$\nu = \nu' \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \nu' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

częstość (energia) maleje

# Efekt Dopplera

## Rozkłady kątowe

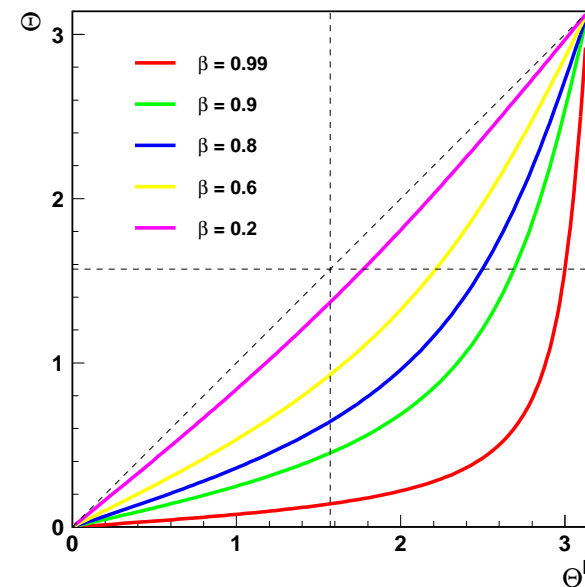
Zależność częstości od kąta **emisji**



Dla  $\theta' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \nu = \gamma \nu' > \nu'$   
 poprzeczny efekt Dopplera

Obserwowany kąt lotu fotonu:

$$\cos \theta = \frac{p_x}{E} = \frac{\beta + \cos \theta'}{1 + \beta \cos \theta'}$$



Dla  $\theta' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta = \beta \Rightarrow \theta < \frac{\pi}{2}$

Izotropowe promieniowanie szybko poruszającego się ciała jest skolimowane w kierunku ruchu...

# Efekt Dopplera

## Rozkłady kątowe

Mamy:

$$\nu = \nu' \gamma (1 + \beta \cos \theta')$$

Możemy jednak zastosować odwrotną transformację Lorentza ( $\beta \Leftrightarrow -\beta$ )

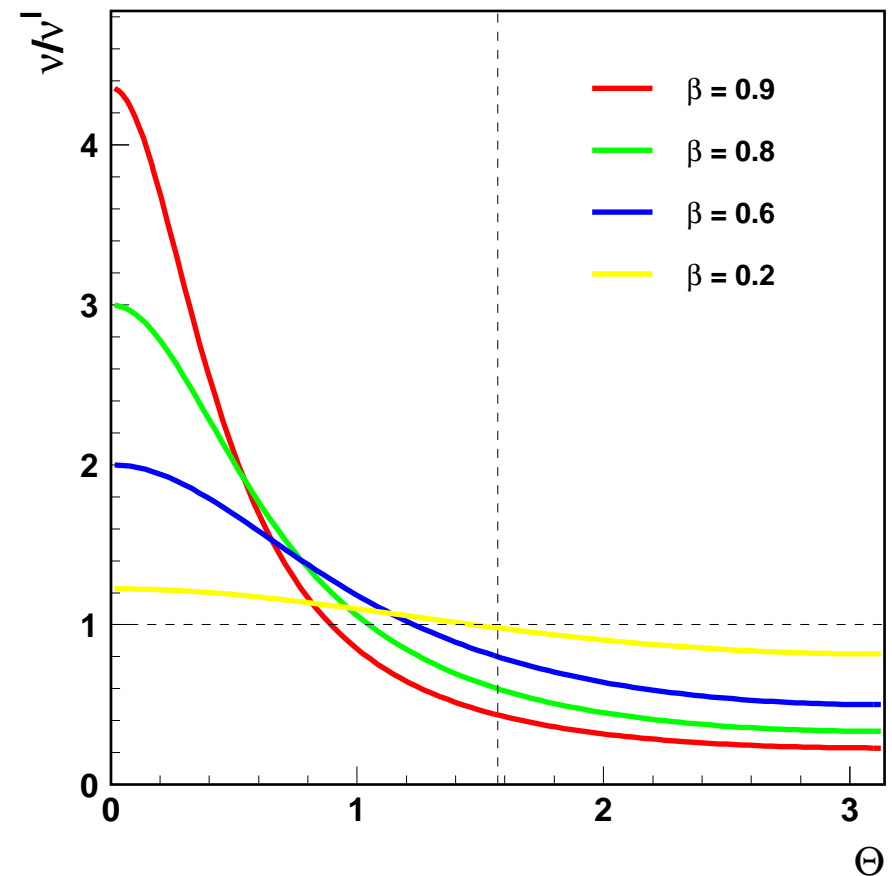
$\Rightarrow$  energia w funkcji kąta **detekcji**:

$$\nu = \frac{\nu'}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)}$$

Fotony rejestrowane pod kątem  $\theta = \frac{\pi}{2}$  mają

częstość:  $\nu = \frac{\nu'}{\gamma} < \nu'$  !!!

Zależność częstości od kąta **detekcji**





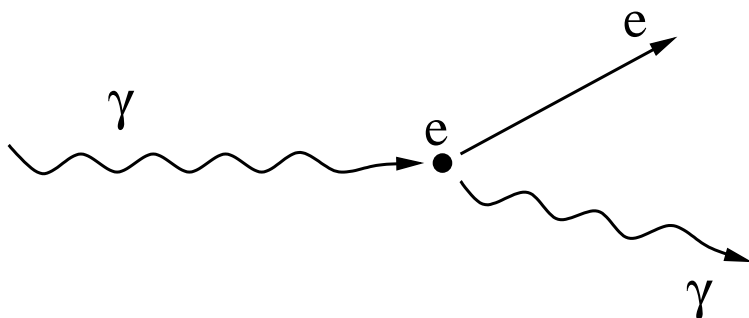
# Efekt Comptona

## Rozpraszanie fotonów

W wyniku rozpraszania w materii, promieniowanie X stawało się mniej przenikliwe  $\Rightarrow$  zmieniało długości fali

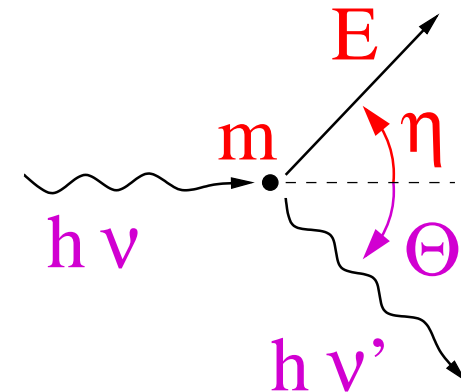
Opis tego zjawiska zaproponował w 1923 roku A.H.Compton.

Fotony promieniowania X rozpraszają się na elektronach w atomie



oddając im część swojej energii.

Relatywistyczne zderzenie dwóch ciał tak samo jak w przypadku cząstek



Zasady zachowania:

$$E : h\nu + m = h\nu' + E$$

$$p_{\parallel} : h\nu = h\nu' \cos \theta + p \cos \eta$$

$$p_{\perp} : 0 = h\nu' \sin \theta - p \sin \eta$$

# Efekt Comptona

Przekształcając otrzymujemy:

$$\begin{aligned}E &= h(\nu - \nu') + m c^2 \\p \cos \eta &= h(\nu - \nu' \cos \theta) \\p \sin \eta &= h\nu' \sin \theta\end{aligned}$$

Podnosząc stronami do kwadratu i zestawiając do masy elektronu:

$$\begin{aligned}m^2 c^4 &= E^2 - p^2 c^2 \\&= (h(\nu - \nu') + m c^2)^2 - h^2 (\nu - \nu' \cos \theta)^2 c^2 - (h\nu' \sin \theta)^2 c^2 \\&= m^2 c^4 + h^2 \nu^2 c^2 + h^2 \nu'^2 c^2 - 2h^2 \nu \nu' c^2 + 2m h c^3 (\nu - \nu') \\&\quad - h^2 \nu^2 c^2 + 2h^2 \nu \nu' c^2 \cos \theta - h^2 \nu'^2 c^2 \cos^2 \theta - h^2 \nu'^2 c^2 \sin^2 \theta\end{aligned}$$

$$\Rightarrow m h \nu c^2 = h\nu' (m c^2 + h\nu(1 - \cos \theta))$$

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m c^2}(1 - \cos \theta)}$$

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m c}(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{h}{m c} = 2.43 \cdot 10^{-12} m = 2.43 \text{ pm}$$

# Efekt Comptona

## Małe energie fotonów

W granicy małych energii fotonu  $h\nu \ll m$

$$h\nu' = h\nu \frac{m}{m + h\nu(1 - \cos\theta)} \approx h\nu$$

⇒ foton rozprasza się bez straty energii.

Odpowiada to klasycznemu zderzeniu “pocisku”,  $m_1$ , z dużo cięższą “tarczą”,  $m_2 \gg m_1$ .

Foton zachowuje energię, ale **zmienia się wektor pędu** (kierunek !)

Przykład: odbicie światła widzialnego  
 $h\nu = 1.8 - 3.1 eV$  (700 nm - 400 nm)

Energia rozproszonego elektronu:

$$\begin{aligned} E &= h\nu - h\nu' + m \\ &= \frac{h\nu(h\nu + m)(1 - \cos\theta) + m^2}{h\nu(1 - \cos\theta) + m} \end{aligned}$$

W granicy  $h\nu \ll m$ :

• energia elektronu:

$$E \approx m$$

• pęd rozproszonego elektronu:

$$p \approx h\nu \sqrt{2(1 - \cos\theta)}$$

# Efekt Comptona

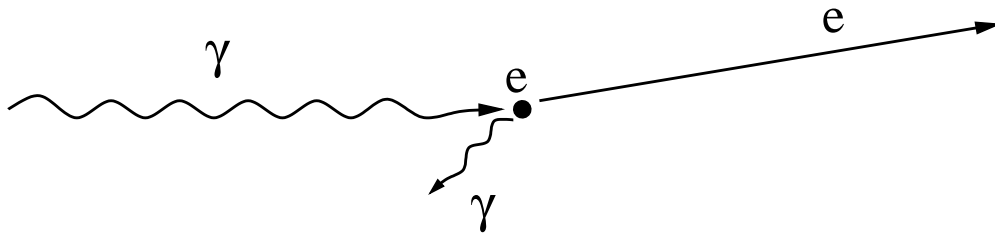
## Duże energie fotonów

W granicy dużych energii fotonu  $h\nu \gg m$  (przyjmując  $\cos \theta \neq 1$ , czyli  $\theta \neq 0$ )

$$h\nu' \approx \frac{m}{1 - \cos \theta} \rightarrow 0$$

$$E \approx h\nu + m$$

⇒ foton przekazuje **spoczywającemu** elektronowi praktycznie całą swoją energię



Odpowiada to klasycznemu zderzeniu ciał o równych masach (zakładając zderzenie centralne i elastyczne)

Dla  $h\nu \gg m$  masę elektronu można pominąć - **elektron**, tak jak foton, można traktować jako **cząstkę bezmasową**.

# Efekt Comptona

## Rozpraszanie do tyłu

W rozpraszaniu na spoczywającym elektronie najniższą energię będzie miał foton rozproszony “do tyłu” ( $\cos \theta = -1$ ):

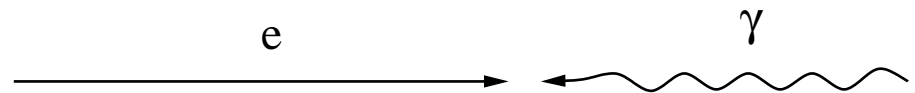
$$h\nu' = \frac{h\nu \cdot m}{2h\nu + m} < h\nu$$

To, że foton zawsze traci energię związane jest jednak z wyborem układu odniesienia!

(układ związany z elektronem)

## Rozpraszanie na wiązce elektronów

Możemy jednak rozważyć rozpraszanie fotonów o energii  $h\nu$  na przeciwbieżnej wiązce elektronów o energii  $E_e \gg m$ .



Transformacja Lorentza do układu elektronu:

$$\gamma = \frac{E_e}{m}$$
$$\beta \approx 1$$

Energia fotonu w układzie elektronu:

$$h\nu^* = \gamma(1 + \beta)h\nu$$
$$\approx \frac{2E_e}{m} \cdot h\nu \gg h\nu$$

# Photon Collider

## Rozpraszanie na wiązce elektronów

Przyjmijmy, że foton rozprasza się “do tyłu” ( $\cos \theta = -1$ ). Energia rozproszonego fotonu w **układzie elektronu**:

$$h\nu^{*'} = \frac{h\nu^* \cdot m}{2h\nu^* + m} \\ \approx \frac{2E_e h\nu \cdot m}{4E_e h\nu + m^2}$$

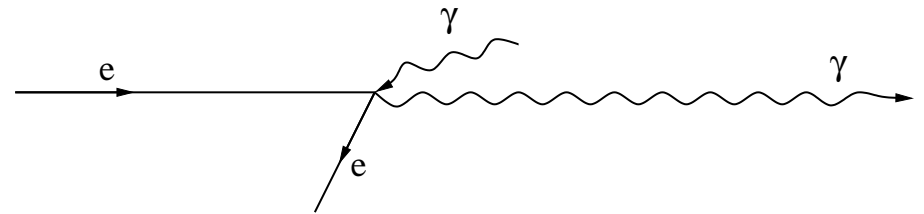
Wracając do **układu laboratoryjnego**:  
(transformacja taka sama, bo pęd foton zmienił kierunek)

$$h\nu' \approx \frac{2E_e}{m} \cdot h\nu^{*'}$$

Otrzymujemy:

$$h\nu' \approx E_e \cdot \frac{4E_e h\nu}{4E_e h\nu + m^2}$$

Wysokie energia wiązki,  $4E_e h\nu \gg m^2$   
 $\Rightarrow$  elektron może przekazać fotonowi **większość swojej energii**.



Przykład: dla  $E_e = 250\text{GeV}$  i  $h\nu = 1\text{eV}$   
 $h\nu' \approx 200\text{GeV}$



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt **Fizyka wobec wyzwań XXI w.**  
współfinansowany przez Unię Europejską  
ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego  
w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki