



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Dynamika relatywistyczna

Fizyka I (Mechanika)

Wykład XII:

- masa niezmiennicza i układ środka masy
- zderzenia elastyczne
- cząstki elementarne
- rozpady cząstek
- rozpraszanie nieelastyczne

Dynamika relatywistyczna

Zasady zachowania

Relatywistyczne wyrażenie na pęd cząstki:

$$\vec{p} = m c \gamma \vec{\beta} = m \gamma \vec{V} \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$$

Relatywistyczne wyrażenia na energię cząstki:

energia kinetyczna	$E_k = m c^2 (\gamma - 1)$
energia spoczynkowa	$E_0 = m c^2$
energia całkowita	$E = m c^2 \gamma$

Dla dowolnego izolowanego układu obowiązują zawsze:

$$\sum_i E_i = \sum_i \gamma_i m_i c^2 = \text{const} \quad \text{zasada zachowania energii}$$

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i \gamma_i \cdot m_i \vec{V}_i = \text{const} \quad \text{zasada zachowania pędu}$$

Dynamika relatywistyczna

Transformacja

Zamiast rozważać niezależnie energię i pęd układu, wygodnie jest wprowadzić czterowektor energii-pędu:

$$\mathcal{E} = (E, c\vec{p}) = (E, cp_x, cp_y, cp_z)$$

Przy zmianie układu odniesienia, czterowektor energii-pędu podlega transformacji Lorentza identycznej z transformacją dla współrzędnych czasoprzestrzennych zdarzeń.

$$\begin{pmatrix} E \\ cp_x \\ cp_y \\ cp_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E_o + \gamma \beta cp_{o,x} \\ \gamma \beta E_o + \gamma cp_{o,x} \\ cp_{o,y} \\ cp_{o,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta & 0 & 0 \\ \gamma \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_o \\ cp_{o,x} \\ cp_{o,y} \\ cp_{o,z} \end{pmatrix}$$

energia \Leftrightarrow czas
pęd \Leftrightarrow położenie

Dynamika relatywistyczna

Masa niezmiennicza

Niezmiennik transformacji Lorentza, (nie zależy od wyboru układu odniesienia)

$$M^2 c^4 = s = E^2 - p^2 c^2$$

Dla dowolnego izolowanego układu fizycznego masa niezmiennicza jest zachowana (nie zmienia się w czasie). Wynika to z zasady zachowania energii i pędu.

⇒ podstawowe pojęcie w analizie zderzeń relatywistycznych, zwłaszcza w procesach nieelastycznych (produkcja nowych cząstek)

Masa niezmiennicza jest tożsama z energią układu w układzie środka masy ($P^* = 0$). Dla zderzających się cząstek mówimy o energii dostępnej w układzie środka masy.

Dla pojedynczej cząstki masa niezmiennicza jest tożsama z masą cząstki (energią spoczynkową).

Dynamika relatywistyczna

Przykład

Rakieta lecąca w kierunku Ziemi z prędkością $v = 0.6 c$ wystrzeliwuje w jej kierunku wiązkę protonów o energii $E = 100 \text{ GeV}$. Masa protonu $m = 1 \text{ GeV}/c^2$.

Jaką energię protonów zmierzy obserwator na Ziemi?

Pęd protonu w układzie rakiety (z definicji masy niezmienniczej):

$$pc = \sqrt{E^2 - m^2 c^4} = 99.9950 \text{ GeV} \quad pc \approx E = 100 \text{ GeV}$$

Współczynniki transformacji:

$$\beta = 0.6 \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1.25 \quad \beta\gamma = 0.75$$

Energia w układzie Ziemi:

$$E' = \gamma E + \beta\gamma pc \approx (\gamma + \beta\gamma)E = 2E = 200 \text{ GeV}$$

Dynamika relatywistyczna

Przykład II

Jaka jest masa cząstki, która poruszając się z energią kinetyczną $E_k = 1.6 \text{ GeV}$ ma pęd $p = 2.4 \text{ GeV}/c$?

Z definicji masy niezmienniczej dla pojedynczej cząstki:

$$m^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2$$

Energię całkowitą wyrażamy przez energię kinetyczną:

$$m^2 c^4 = (m c^2 + E_k)^2 - p^2 c^2$$

$$m^2 c^4 = m^2 c^4 + 2E_k m c^2 + E_k^2 - p^2 c^2$$

Otrzymujemy:

$$m c^2 = \frac{p^2 c^2 - E_k^2}{2E_k} = \frac{(pc + E_k)(pc - E_k)}{2E_k} = \frac{4\text{GeV} \cdot 0.8\text{GeV}}{2 \cdot 1.6\text{GeV}} = 1\text{GeV}$$

Dynamika relatywistyczna

Układ środka masy

Energia układu cząstek: $E = \sum_i E_i$

Pęd układu cząstek: $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$

Masa niezmiennicza: M

Jak znaleźć układ środka masy $\vec{P}^* = 0$?

Wiemy, że w CMS $E^* = M$, $P^* \equiv 0$

Energia i pęd wiążą się z E^* i P^* przez transformacje Lorentza:

$$\begin{aligned} \Rightarrow E &= \gamma M \\ cP &= \beta \gamma M \end{aligned}$$

Otrzymujemy związki na współczynniki transformacji do układu środka masy:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{cP}{E} \\ \gamma &= \frac{E}{M c^2} \\ \beta \gamma &= \frac{P}{M c} \end{aligned}$$

obowiązują zarówno dla pojedynczej cząstki jak i dowolnego układu cząstek

Dynamika relatywistyczna

Przykład

Z jaką prędkością porusza się elektron o energii $E = 1\text{GeV}$ ($m_e \approx 0.5\text{MeV}$)?

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E}{m} = 2000 \quad c \equiv 1$$

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} = \frac{m^2}{E^2} \ll 1$$

Widać, że $\beta \approx 1$, policzmy więc różnicę:

$$1 + \beta \approx 2 \quad \Rightarrow \quad 1 - \beta = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta} \approx \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{m^2}{2E^2} = 1.25 \cdot 10^{-7}$$

Pęd elektronu:

$$p = \beta\gamma m = \beta E \approx E \quad E - p = (1 - \beta)E \approx 10^{-7}E$$

Energia kinetyczna:

$$E_k = (\gamma - 1)m = E - m \approx E \quad E - E_k = m = \frac{1}{\gamma}E = 5 \cdot 10^{-4}E$$

Przybliżenie ultrarelatywistyczne: $\gamma \gg 1$, $E \gg m \Rightarrow E \approx pc \approx E_k$

Zderzenia relatywistyczne

W przypadku **nierelatywistycznym** zderzenia dzieliliśmy na:

- **zderzenia elastyczne**

Zachowany **pęd** i **energia kinetyczna**.

- **zderzenia nieelastyczne**

Zachowany **pęd**.

Energia kinetyczna zamieniana (częściowo) na inne formy energii (zazwyczaj ciepło).

W przypadku **relatywistycznym** **energia całkowita** i **pęd** są **zawsze zachowane** !

Musimy zmodyfikować klasyfikację zderzeń:

- **Zderzenia elastyczne** $2 \rightarrow 2$

Cząstki po zderzeniu takie same jak cząstki zderzające się.

W szczególności: $m'_1 = m_1$ i $m'_2 = m_2$ np. $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$

- **Zderzenia nieelastyczne**

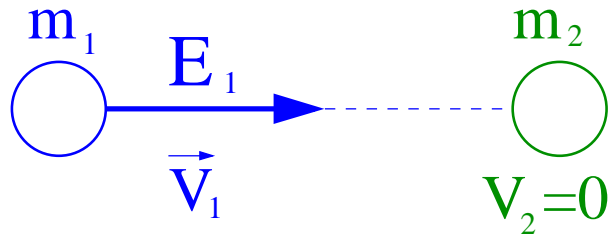
Gdy cząstki w stanie końcowym są inne niż przed zderzeniem.

np. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Zderzenia relatywistyczne

Rozpraszanie elastyczne

Rozważmy zderzenie “pocisku” o masie m_1 i energii E_1 z “tarczą” o masie m_2 .



Dla układu dwóch ciał mamy: ($c \equiv 1$)

$$E = E_1 + E_2 = E_1 + m_2$$

$$P = P_1 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$$

$$\begin{aligned} M^2 &= E^2 - P^2 = (E_1 + m_2)^2 - P_1^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2 E_1 m_2 \end{aligned}$$

Transformacja do układu środka masy:

$$\beta = \frac{P}{E} = \frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2}}{E_1 + m_2}$$

$$\gamma = \frac{E}{M} = \frac{E_1 + m_2}{\sqrt{2 E_1 m_2 + m_1^2 + m_2^2}}$$

$$\beta\gamma = \frac{P}{M} = \sqrt{\frac{E_1^2 - m_1^2}{2 E_1 m_2 + m_1^2 + m_2^2}}$$

Zderzenia relatywistyczne

Rozpraszanie elastyczne

Pęd obu ciał w układzie środka masy:

$$p_1^* = p_2^* = \beta \gamma m_2 = \frac{P}{M} m_2$$

$$(p^*)^2 = \frac{(E_1^2 - m_1^2) m_2^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2 E_1 m_2}$$

Energie w układzie środka masy:

$$\begin{aligned} E_2^* &= \gamma m_2 = \frac{E}{M} m_2 \\ &= \frac{(E_1 + m_2) m_2}{\sqrt{2 E_1 m_2 + m_1^2 + m_2^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1^* &= M - E_2^* \\ &= \frac{E_1 m_2 + m_1^2}{\sqrt{2 E_1 m_2 + m_1^2 + m_2^2}} \end{aligned}$$

Jeśli spełniona ma być zasada zachowania pędu i zasada zachowania energii to tak jak w przypadku klasycznym:

$$p_1^* = p_2^* = p_1'^* = p_2'^*$$

W układzie środka masy wartości pędów nie ulegają zmianie.

Warunek: $m_1' = m_1$ i $m_2' = m_2$!!!

Rozpraszanie elastyczne

Zderzenia relatywistyczne

$$\underline{m_1 = m_2}$$

Dla zderzeń cząstek o równej masie:

$$E = E_1 + m$$

$$P = P_1 = \sqrt{E_1^2 - m^2}$$

$$M^2 = E^2 - P^2 = 2 E_1 m + 2 m^2$$

⇒ współczynniki transformacji:

$$\gamma = \sqrt{\frac{E_1 + m}{2m}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{E_1 - m}{E_1 + m}}$$

$$\beta \gamma = \sqrt{\frac{E_1 - m}{2m}}$$

Energia i pęd obu ciał w układzie środka masy:

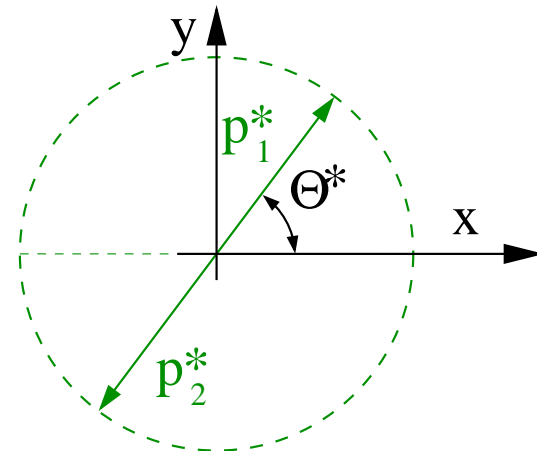
(z transformacji Lorentza dla spoczywającego ciała)

$$p^* = \gamma \beta m$$

$$E^* = \gamma m$$

$$(p^*)^2 = \frac{1}{2} m (E_1 - m)$$

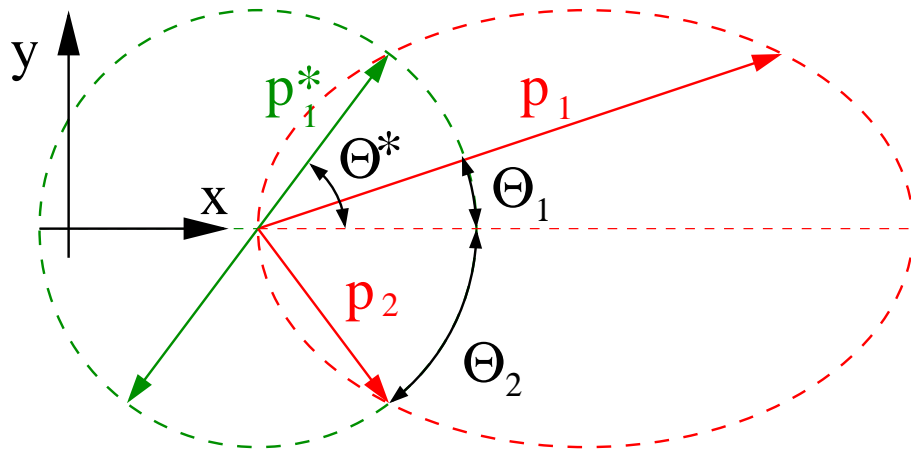
$$(E^*)^2 = \frac{1}{2} m (E_1 + m)$$



Zderzenia relatywistyczne

$$\underline{m_1 = m_2}$$

W układzie środka masy rozproszenie opisuje kąt θ^* :



$$p_{1,x}^* = \gamma \beta m \cos \theta^*$$

$$p_{1,y}^* = \gamma \beta m \sin \theta^*$$

$$E_1^* = \gamma m$$

Transformacja do układu laboratoryjnego:

$$\begin{aligned} p_{1,x} &= \gamma p_{1,x}^* + \gamma \beta E_1^* \\ &= \gamma^2 \beta m (1 + \cos \theta^*) \end{aligned}$$

$$p_{1,y} = \gamma \beta m \sin \theta^*$$

$$\gamma^2 \beta m = \frac{1}{2} P$$

Możliwe wartości $p_{1,x}$ i $p_{1,y}$ spełniają:

$$\gamma^2 p_{1,y}^2 + \left(p_{1,x} - \frac{P}{2} \right)^2 = \left(\frac{P}{2} \right)^2$$

⇒ elipsa

transformacja Lorentza “spłaszcza” rozkład pędów wzdłuż kierunku ruchu pocisku.

Zderzenia relatywistyczne

$$\underline{m_1 = m_2}$$

Kąty rozproszenia mierzone w LAB:

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta^*}{\gamma(1 + \cos \theta^*)}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{\sin \theta^*}{\gamma(1 - \cos \theta^*)}$$

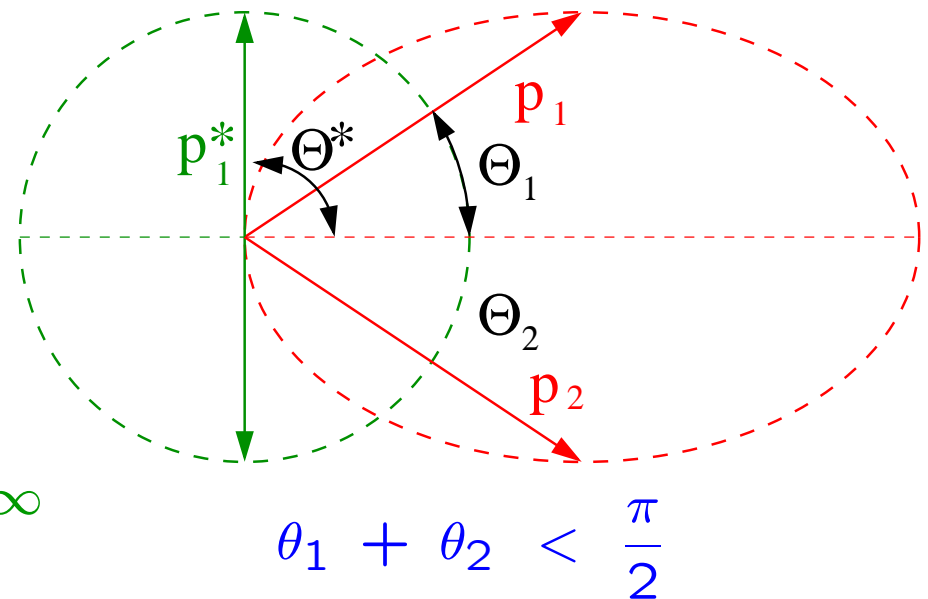
Kąt pomiędzy cząstkami:

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{2\gamma}{\sin \theta^* (\gamma^2 - 1)}$$

$$\rightarrow \frac{2}{\gamma \sin \theta^*} \rightarrow 0 \quad \text{dla } \gamma \rightarrow \infty$$

Dla rozproszenia z $\theta^* = \frac{\pi}{2}$

$$\tan \theta = \frac{1}{\gamma} < 1$$



W granicy ultrarelatywistycznej rozproszenie zachodzi pod bardzo małymi kątami

Zderzenia relatywistyczne

Przykład

Elektron o energii $E = 10 \text{ GeV}$ rozprasza się elastycznie na spoczywającym elektronie ($m_e = 0.5 \text{ MeV}$). Jaki **kąt rozproszenia** zostanie zmierzony w układzie laboratoryjnym jeśli w CMS rozproszenie nastąpiło pod kątem prostym?

Masa niezmiennicza układu

$$M = \sqrt{2 E m + 2 m^2} \approx \sqrt{2 E m} = 100 \text{ MeV}$$

Współczynnik transformacji:

$$\gamma = \frac{E + m}{M} \approx \frac{E}{M} = 100 \quad \beta \approx 1 \quad 1 - \beta \approx 5 \cdot 10^{-5}$$

Energia i pęd w CMS:

$$E^* = \gamma m = 50 \text{ MeV} \quad p^* \approx E^*$$

Transformacja do LAB:

$$(p_x^* = 0, p_y^* = p^*)$$

$$p_x = \beta \gamma E^* + \gamma p_x^* \approx \gamma E^*$$

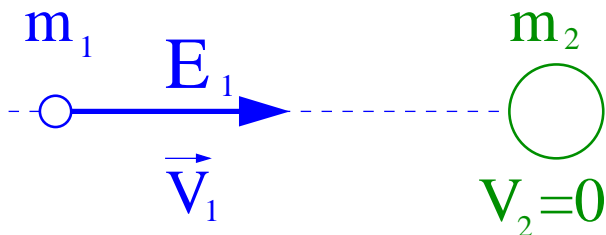
$$p_y = p_y^* \approx E^*$$

$$\tan \theta = \frac{p_y}{p_x} = \frac{1}{\gamma} = 0.01 \quad \theta \approx 0.6^\circ$$

Zderzenia relatywistyczne

$$\underline{m_1 \ll E_1 \sim m_2}$$

Rozważmy zderzenie elastyczne z ciężką
“tarczą” lekkiego “pocisku” ($m_1 \ll m_2$)
o wysokiej energii ($E_1 \sim m_2$)



Sytuacja z jaką często mamy do
czynienia w zderzeniach fizyki cząstek
(rozpraszanie elektronów, mionów lub
neutrino na tarczach jądrowych).

Pomijając wyrazy z m_1 mamy:

$$E = E_1 + m_2$$

$$P = \sqrt{E_1^2 - m_1^2} \approx E_1$$

$$\begin{aligned} M^2 &= m_1^2 + m_2^2 + 2 E_1 m_2 \\ &\approx 2 E_1 m_2 + m_2^2 \end{aligned}$$

Zderzenia relatywistyczne

$$\underline{m_1 \ll E_1 \sim m_2}$$

Współczynniki transformacji do układu
środkła masy: ($m_1 \rightarrow 0$)

$$\gamma = \frac{E_1 + m_2}{\sqrt{2E_1m_2 + m_2^2}}$$

$$\beta = \frac{E_1}{E_1 + m_2}$$

$$\beta \gamma = \frac{E_1}{\sqrt{2E_1m_2 + m_2^2}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p^* &= \beta \gamma m_2 \\ &= \frac{E_1 m_2}{\sqrt{2E_1m_2 + m_2^2}} \end{aligned}$$

Transformacja rozproszonego pocisku do
układu laboratoryjnego:

$$\begin{aligned} p_{1,x} &= \gamma p_{1,x}^* + \gamma \beta E_1^* \\ &= \gamma p^* (\beta + \cos \theta^*) \end{aligned}$$

$$p_{1,y} = p^* \sin \theta^*$$

Możliwe wartości $p_{1,x}$ i $p_{1,y}$ spełniają:

$$(\gamma p_{1,y})^2 + (p_{1,x} - \gamma \beta p^*)^2 = (\gamma p^*)^2$$

\Rightarrow elipsa

W granicy $\beta \rightarrow 1$ ($E_1 \gg m_2$) pocisk
rozprasza się zawsze “do przodu”!

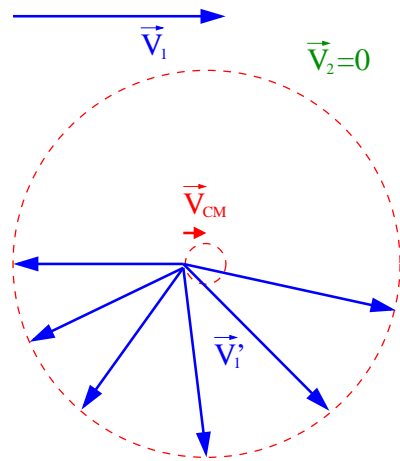
$$(p_{1,x} \geq 0)$$

Zderzenia elastyczne

Nierelatywistyczne

W granicy $m_1 \ll m_2$ tarcza przyjmuje bardzo niewielką część energii pocisku.

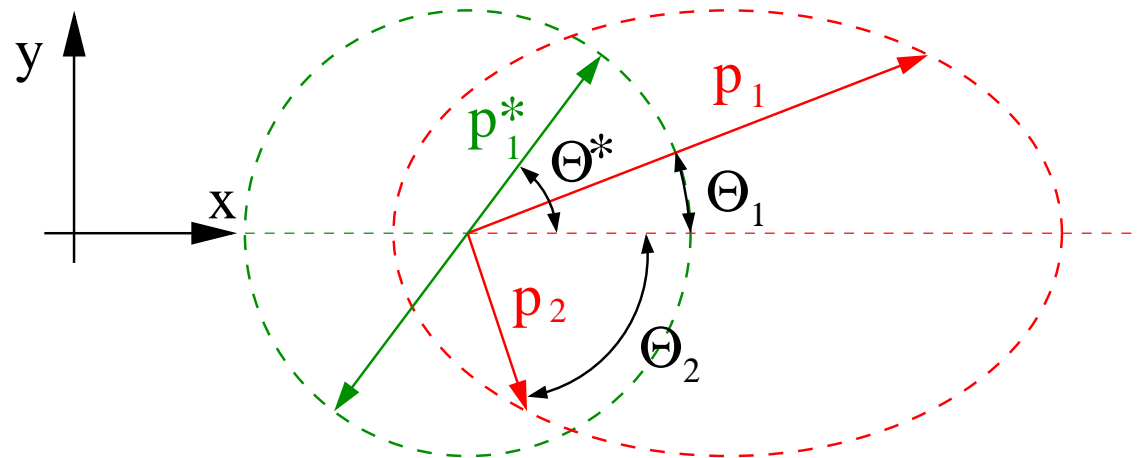
Rozproszony pocisk ma praktycznie niezmienną energię i wartość pędu.



Rysunek dla $m_2 = 10 m_1$

Relatywistyczne

Nawet dla $m_1 \ll m_2$, jeśli $E_1 \sim m_2$ pocisk może przekazać tarczy znaczną część swojej energii.



Rysunek dla $E_1 = 3 m_2$, $m_1 = 0$.

Dla $E_1 \gg m_2$ nawet bardzo lekka sonda może “wybić” cząstkę tarczy...

Zderzenia relatywistyczne

Przykład

Elektron o energii $E_e = 50 \text{ GeV}$ rozprasza się na spoczywającym protonie ($m_p = 1 \text{ GeV}$). Jaka jest maksymalna energia jaką może uzyskać proton?

Masa niezmiennicza układu

$$M = \sqrt{2 E_e m_p + m_p^2} \approx \sqrt{2 E_e m_p} = 10 \text{ GeV} \quad 10.05 \text{ GeV}$$

Współczynnik transformacji:

$$\gamma = \frac{E_e + m_p}{M} = 5.1 \quad 5.075 \quad \beta\gamma = \frac{p_e}{M} = 5 \quad 4.975$$

Energia i pęd protonu w CMS:

$$E_p^* = \gamma m_p = 5.1 \text{ GeV} \quad p^* = \beta\gamma m = 5 \text{ GeV}$$

Transformacja do LAB: (maksymalna energia gdy $p_x^* = p^*$)

$$E' = \gamma E^* + \beta\gamma p_x^* = \gamma^2 m_p + \beta^2 \gamma^2 m_p \approx 51 \text{ GeV} \quad 50.50 \text{ GeV}$$

Zderzenia relatywistyczne

Zderzenia elastyczne $2 \rightarrow 2$

Cząstki rozproszone takie same jak cząstki zderzające się.

W szczególności: $m'_1 = m_1$ i $m'_2 = m_2$

W zderzeniach cząstek wysokiej energii jest to jednak wyjątek (!)

Zderzenia nieelastyczne

W oddziaływaniach cząstek elementarnych, zwłaszcza przy wysokiej energii, obserwujemy bardzo wiele reakcji, w których powstają nowe cząstki:

- Rozpady cząstek: $a \rightarrow b + c$
- Produkcja pojedynczej cząstki (tzw. “rezonansu”): $a + b \rightarrow c$
- Rozproszenie nieelastyczne dwóch cząstek: $a + b \rightarrow c + d$
jedna z cząstek na końcu może być cząstką stanu początkowego
- Produkcja wielu cząstek: $a + b \rightarrow X$
gdzie X oznacza dowolny stan wielocząstkowy

Świat cząstek elementarnych

Fermiony

świat “codzienny” zbudowany jest z 3 “cegielek” (elektron oraz kwarki u i d)

Nukleony składają się z 3 kwarków: proton (uud), neutron (udd).

Fizyka cząstek znalazła już jednak 12 fundamentalnych “cegielek” materii, **fermionów** (cząstek o spinie $1/2$)

	leptony		kwarki	
pokolenie 1	e <i>elektron</i>	ν_e <i>neutrino el.</i>	d <i>down</i>	u <i>up</i>
pokolenie 2	μ <i>mion</i>	ν_μ <i>neutrino mionowe</i>	s <i>strange</i>	c <i>charm</i>
pokolenie 3	τ <i>taon</i>	ν_τ <i>neutrino taonowe</i>	b <i>beauty</i> <i>(bottom)</i>	t <i>top</i> <i>(truth)</i>
ładunek [e]	-1	0	-1/3	+2/3

Wszystkie **leptony** obserwujemy jako cząstki swobodne

Kwarki są zawsze “uwięzione” w **hadronach** (cząstkach oddziałujących silnie)

Świat cząstek elementarnych

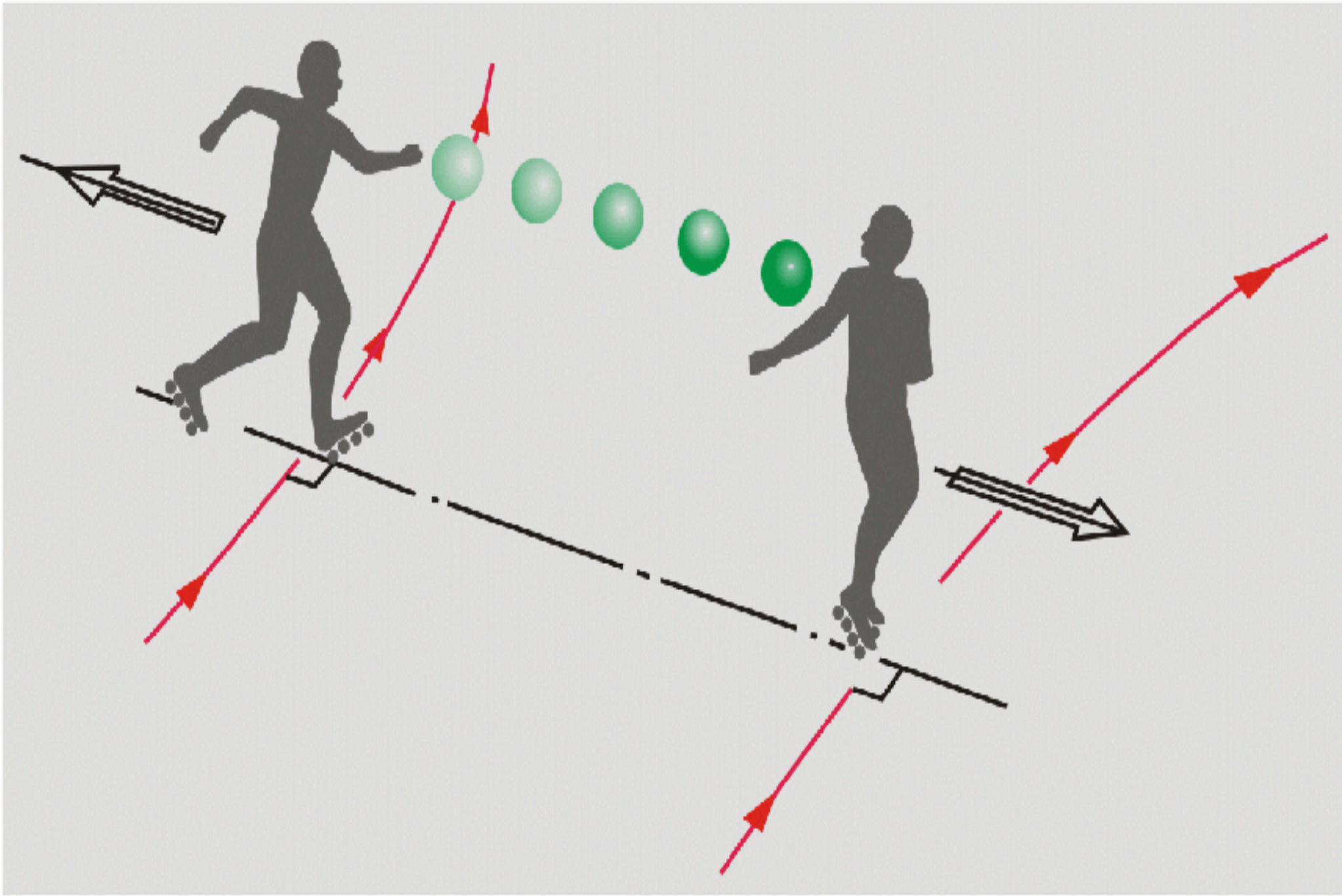
Bozony

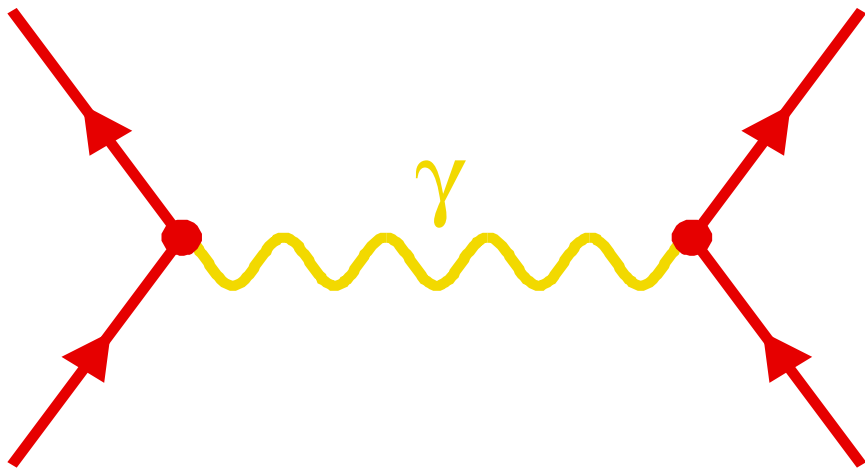
“Cegielki” materii oddziałują ze sobą poprzez wymianę **nośników oddziaływań**

Nośnik przekazuje część energii i/lub pędu jednej cząstki drugiej cząstce

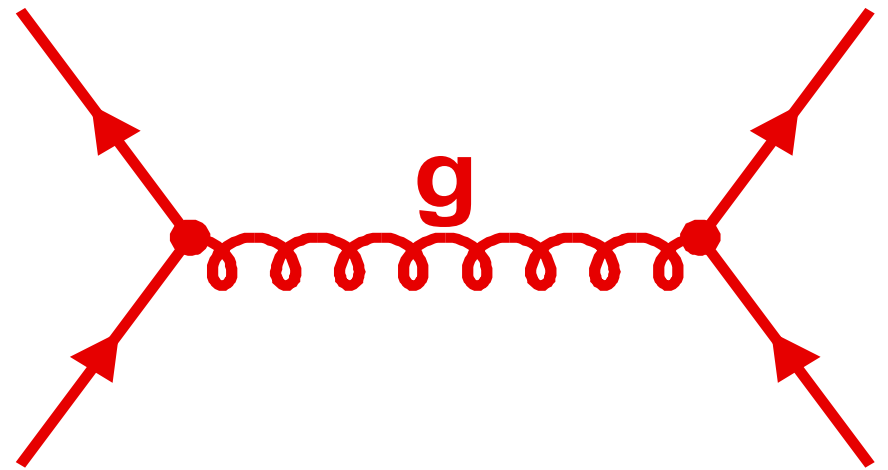
<i>oddziaływanie</i>	<i>źródło</i>	<i>nośnik</i>	<i>moc</i>
grawitacyjne	masa	gawiton	G 10^{-39}
elektromagnetyczne	ładunek	foton	γ 10^{-2}
silne	“kolor”	gluony	g 1
słabe	“ładunek słaby”	“bozony pośredniczące”	W^{\pm}, Z^0 10^{-7}

“moc” - przykładowe porównanie wielkości oddziaływań dla dwóch sąsiadujących protonów

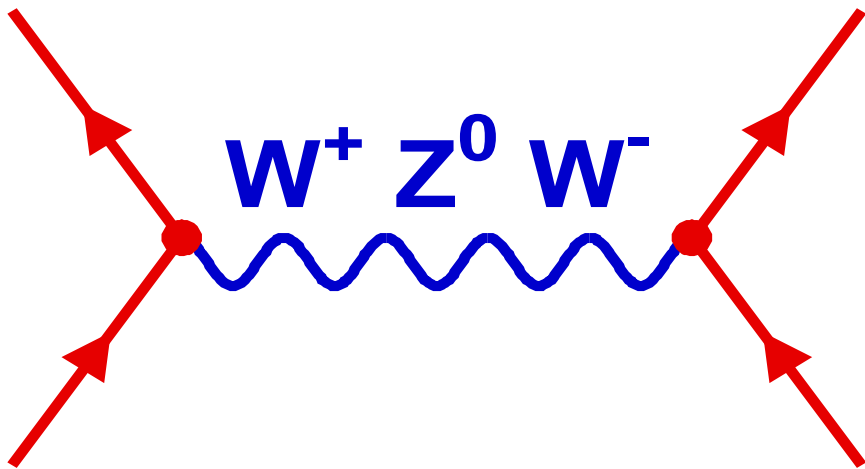




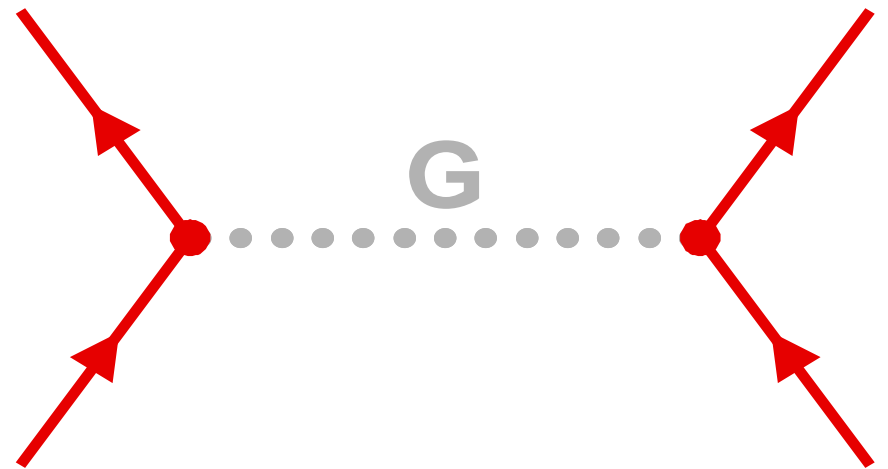
elektromagnetyczne



silne



slabe



grawitacyjne

Rozpady cząstek

Rozważmy rozpad cząstki o masie M na n cząstek o masach m_i ($i = 1 \dots n$).

Masa niezmiennicza przed rozpadem: $\mathcal{M}_i = M$. Masa niezmiennicza po rozpadzie:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f^2 &= \left(\sum_i E_i \right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i \right)^2 \\ &= \sum_i E_i^2 + 2 \sum_i \sum_{j>i} E_i E_j - \sum_i p_i^2 - 2 \sum_i \sum_{j>i} \vec{p}_i \vec{p}_j\end{aligned}$$

Dla dowolnej pary cząstek i, j mamy: $E_i^2 = p_i^2 + m_i^2$

$$\begin{aligned}E_i E_j &= \sqrt{(p_i^2 + m_i^2)(p_j^2 + m_j^2)} = \sqrt{(p_i p_j + m_i m_j)^2 + (p_i m_j - p_j m_i)^2} \\ &\geq p_i p_j + m_i m_j \\ \Rightarrow E_i E_j - \vec{p}_i \vec{p}_j &\geq E_i E_j - p_i p_j \geq m_i m_j\end{aligned}$$

$$\text{Ostatecznie: } \mathcal{M}_f^2 \geq \sum_i m_i^2 + 2 \sum_i \sum_{j>i} m_i m_j = \left(\sum_i m_i \right)^2 = s_{min}$$

Rozpady cząstek

Warunek konieczny, aby mógł mieć miejsce rozpad:

$$M \geq \sum_i m_i = \sqrt{s_{min}}$$

Dla rozpadu dwuciałowego, w układzie cząstki: $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$

Jaka będzie wartość pędu produktów rozpadu: $p = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$?

$$M^2 = (E_1 + E_2)^2 - (p_1 - p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\sqrt{(p^2 + m_1^2)(p^2 + m_2^2)} + 2p^2$$

$$(M^2 - m_1^2 - m_2^2 - 2p^2)^2 = 4(p^2 + m_1^2)(p^2 + m_2^2)$$

$$\Rightarrow 4M^2 p^2 = (M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2$$

$$p = \frac{\sqrt{(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)}}{2M}$$

Rozpady cząstek

Przypadek równych mas: $m_1 = m_2 = m$

$$p = \frac{\sqrt{(M^2 - 4m^2)M^2}}{2M} = \sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - m^2} \quad E = \frac{M}{2}$$

W granicy, gdy jeden z produktów rozpadu jest bardzo lekki: $m_1 \ll m_2 \sim M$

$$p \approx \frac{\sqrt{(M^2 - m_2^2)^2}}{2M} = \frac{M}{2} - \frac{m_2^2}{2M} \approx E_1$$

$\frac{m_2^2}{2M}$ - energia “tracona” na odrzut drugiego ciała

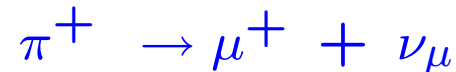
Energie cząstek po rozpadzie **nie są równe** !

Mierząc pęd (lub energię) jednego z produktów rozpadu, możemy wnioskować o **masach** pozostałych cząstek.

Rozpady cząstek

Przykład

Pion π^+ o masie $m_\pi = 140 \text{ MeV}$ rozpada się na mion μ^+ ($m_\mu = 106 \text{ MeV}$) i bezmasowe neutrino:



Pędy produktów rozpadu:

$$p = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2 m_\pi} \approx 30 \text{ MeV}$$

Energie liczymy z definicji masy niezmienniczej:

$$\begin{aligned} m^2 &= E^2 - p^2 \\ \Rightarrow E_\mu &= \sqrt{p^2 + m_\mu^2} \approx 110 \text{ MeV} & E_\mu^k &= 4 \text{ MeV} \\ E_\nu &= \sqrt{p^2 + m_\nu^2} = p = 30 \text{ MeV} & &= E_\nu^k \end{aligned}$$

Neutrino wynosi większość energii kinetycznej!

Rozpady cząstek

Wszystkie cząstki danego rodzaju (np. elektrony lub neutrony) są **identyczne**.

Nie mają też “**pamięci**” - ich własności **nie zależą od czasu**.

Dla cząstek nietrwałych oznacza to, że **prawdopodobieństwo** ich **rozpadu** w zadany przedziale czasu jest zawsze takie samo.

Rozważmy bardzo mały przedział czasu dt (znacznie mniejszy niż typowy czas rozpadu).

Jeśli próbka zawiera N cząstek to liczba oczekiwanych rozpadów musi być proporcjonalna do N i do dt :

$$dN = N(t + dt) - N(t) = -\alpha N dt$$

Całkując to równanie otrzymujemy:

$$\frac{dN}{N} = -\alpha dt$$

$$\ln N = -\alpha t + C$$

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\alpha t} \quad \text{prawo rozpadu promieniotwórczego}$$

Rozpady cząstek

Prawdopodobieństwo rozpadu na jednostkę czasu (dla pojedynczej cząstki):

$$p(t) = \alpha e^{-\alpha t}$$

Parametr α wiąże się ze średnim czasem życia cząstki:

$$\tau = \langle t \rangle = \int_0^{\infty} t \cdot p(t) dt = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow p(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

Jeśli cząstka o masie m i średnim czasie życia τ (zawsze definiowanym w układzie cząstki) ma w układzie obserwatora O' energię E i pęd p , to obserwator zmierzy:

$$N(t') = N_0 \cdot e^{-\frac{t'}{\gamma\tau}} = N_0 \cdot e^{-\frac{mt'}{E\tau}}$$

$$\langle t' \rangle = \gamma \tau = \frac{E}{m} \tau$$

$$\text{średnia droga swobodna} \quad \lambda = \langle vt' \rangle = \beta \gamma c \tau = \frac{p}{m} c \tau$$

Rozpady cząstek

Przykład

Jaki powinien być pęd mionu produkowanego w górnych warstwach atmosfery ($h = 20 \text{ km}$), żeby mógł dolecieć do powierzchni Ziemi zanim się rozpadnie?

Prawdopodobieństwo rozpadu w funkcji odległości:

$$p(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \quad \lambda = \frac{p}{m} c\tau$$

Prawdopodobieństwo, że mion doleci do powierzchni Ziemi:

$$P(x > h) = \int_h^{\infty} p(x) dx = e^{-h/\lambda}$$

jest formalnie niezerowe dla dowolnego pędu. Duże szanse dolecieć mają jednak tylko miony, dla których $\lambda > h$:

$$\frac{p}{m} c\tau > h \quad \Rightarrow \quad p > \frac{h}{c\tau} m$$

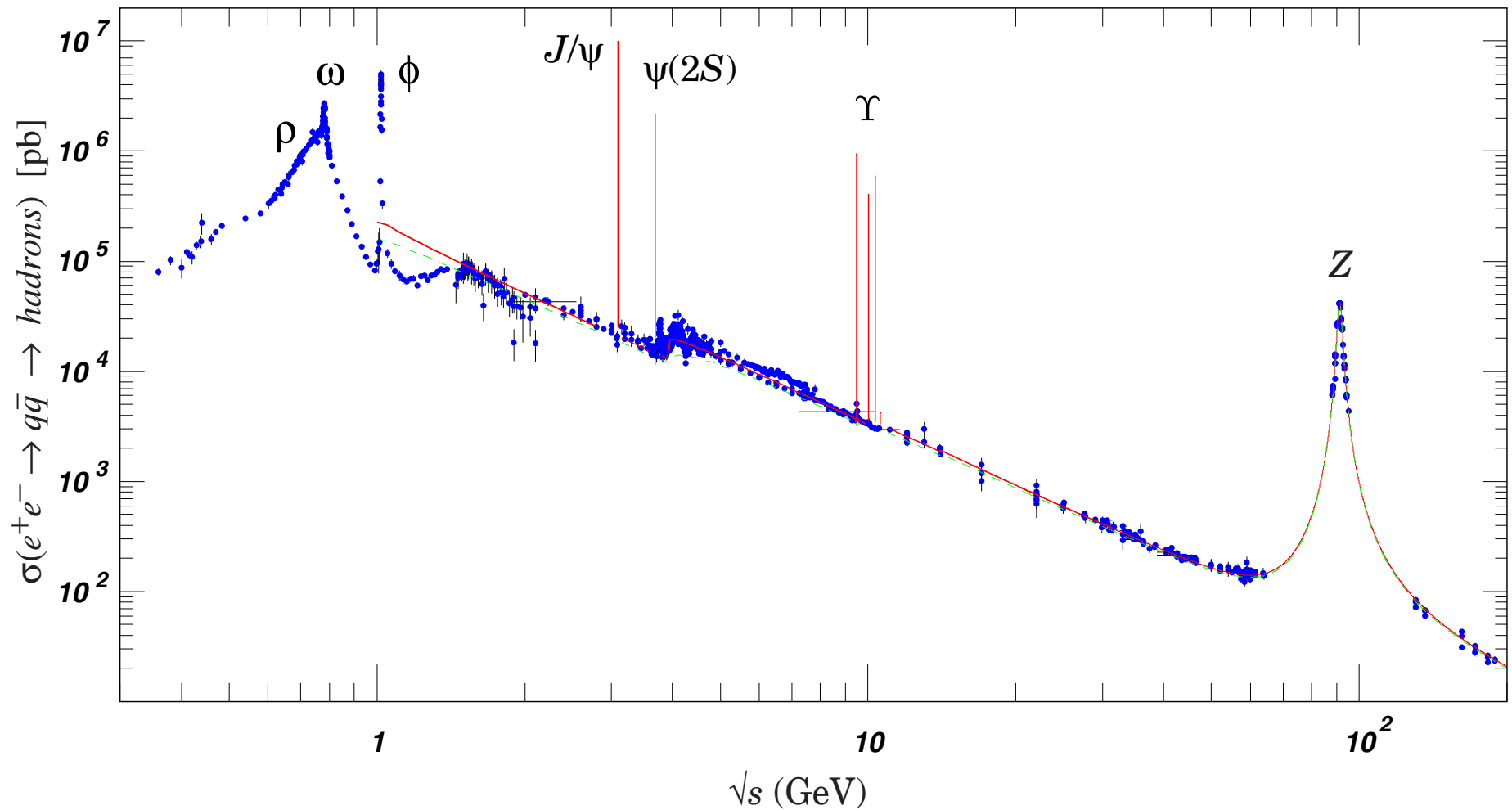
Dla mionu: $\tau = 2.2 \mu\text{s}$ ($c\tau \approx 660 \text{ m}$), $m \approx 100 \text{ MeV}$:

$$p > \frac{h}{c\tau} m \approx 30 \cdot m = 3 \text{ GeV}$$

Zderzenia relatywistyczne

Zderzenia e^+e^-

Przekrój czynny na produkcję hadronów w funkcji dostępnej energii:

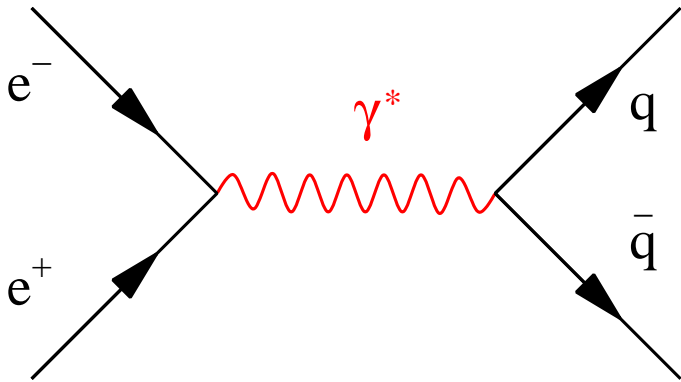


Zderzenia relatywistyczne

Zderzenia e^+e^-

W całym zakresie zbadanych energii mamy niezerowy przekrój czynny na produkcję kwarków.

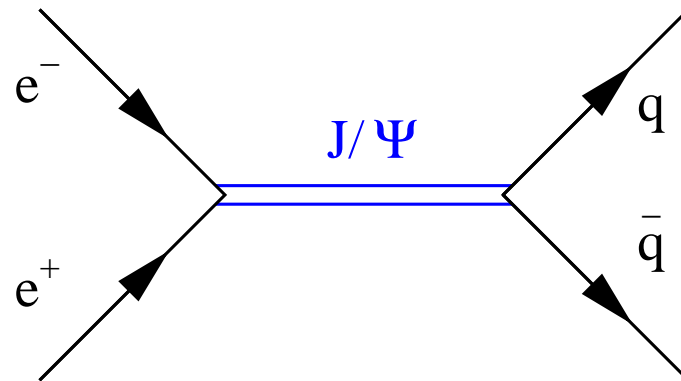
Proces ten opisujemy jako **anihilację** e^+e^- w **wirtualny foton**, który następnie rozpada się na parę $q\bar{q}$



Produkcja rezonansów

Przy pewnych wartościach \sqrt{s} obserwujemy wzrost produkcji kwarków o kilka rzędów wielkości.

Jest to efekt **rezonansowej** produkcji cząstek



Aby w zderzeniu dwóch cząstek powstała jedna, (np: $e^+e^- \rightarrow J/\psi \rightarrow q\bar{q}$) **masa niezmiennicza** zderzających się cząstek musi być równa **masie cząstki** którą produkujemy ($\sqrt{s} = m_{J/\psi}$)

Zderzenia relatywistyczne

Produkcja rezonansów

Produkcja bozonu Z^0 w eksperymencie L3 (LEP)

$$e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow q\bar{q}$$

Maksimum przekroju czynnego obserwujemy dla

$$\sqrt{s} = m_Z$$

ale ma ono skończoną szerokość:

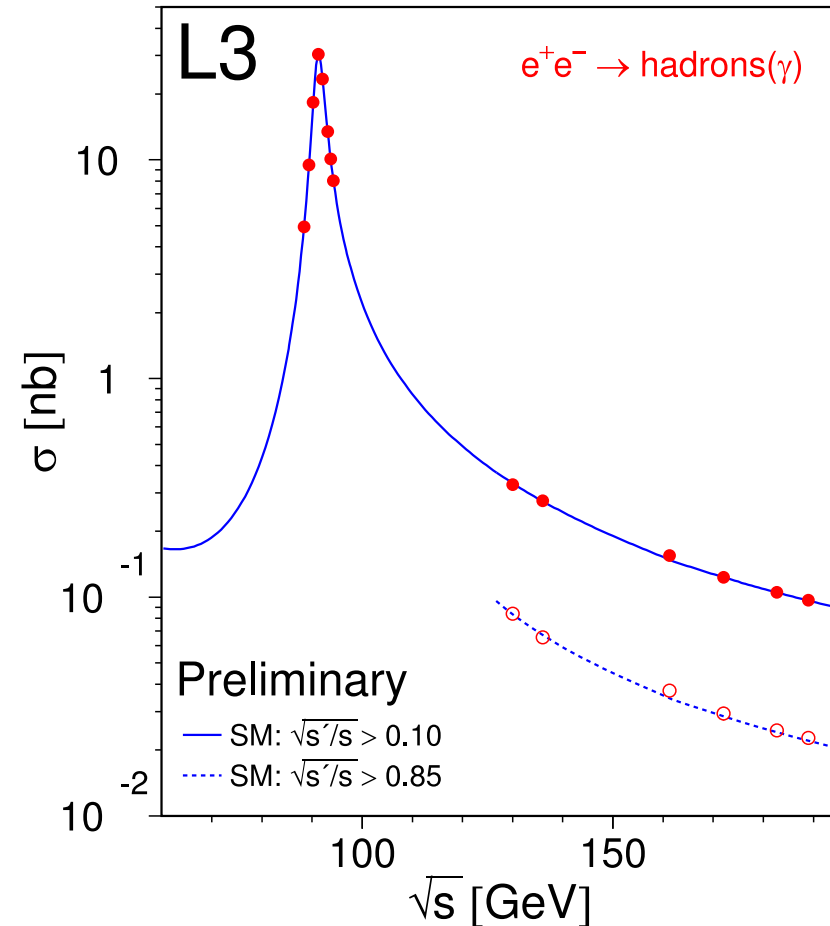
(rozkład Breita-Wignera)

$$\sigma(s) \sim \frac{M_Z^2 \Gamma^2}{(s - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma^2}$$

Szerokość rezonansu wiąże się z czasem życia:

$$\Gamma \cdot \tau = h$$

(zasada nieoznaczoności)



Zderzenia relatywistyczne

Produkcja wielu cząstek

Aby w zderzeniu dwóch cząstek powstały dwie lub więcej nowych cząstek, np:

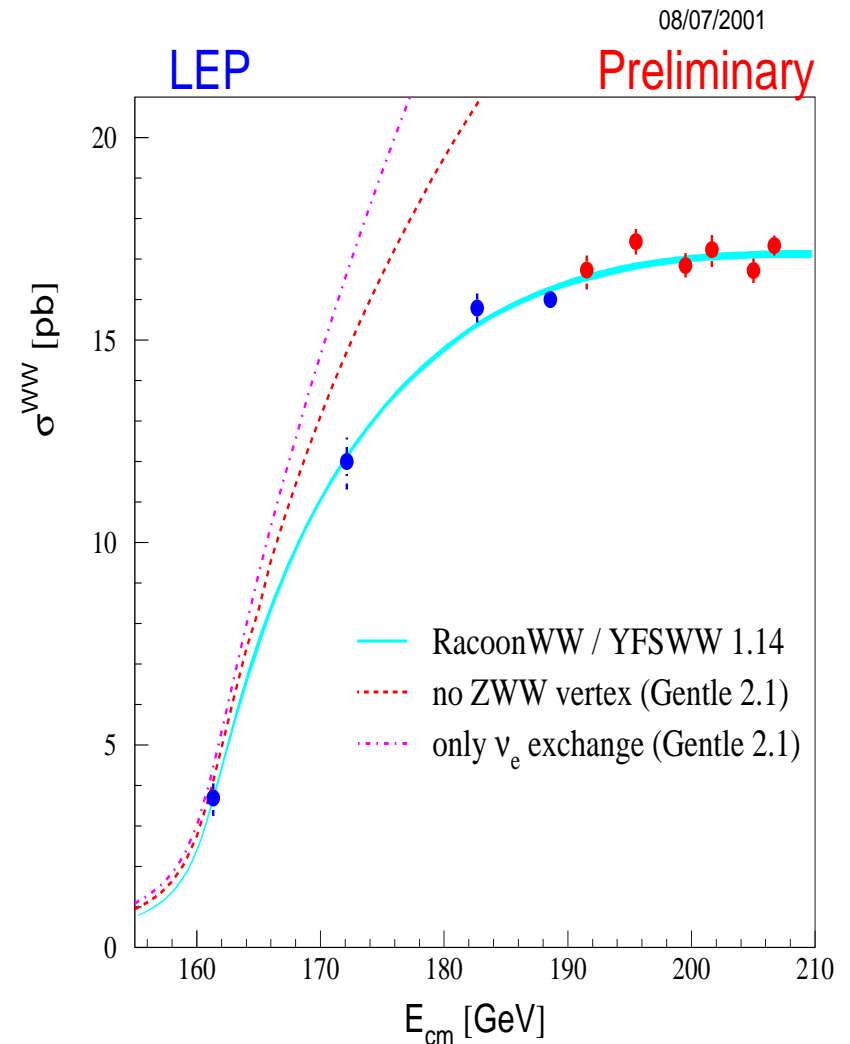


masa niezmiennicza zderzających się cząstek musi być większa lub równa **sumie mas** produkowanych cząstek:

$$\sqrt{s} \geq \sum_i m_i$$

Mierzony przekrój czynny $e^+ e^- \rightarrow W^+ W^- \Rightarrow$

$$\sqrt{s} \geq 2 m_W \approx 160 \text{ GeV}$$



Zderzenia relatywistyczne

Energia dostępna

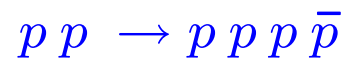
Masę niezmienniczą zderzających się cząstek \sqrt{s} określamy też jako **energię dostępną** w układzie środka masy.

Energia dostępna jest to część energii kinetycznej, która może zostać zamieniona na masę (energię spoczynkową) nowych cząstek.

\sqrt{s} mówi nam ile energii możemy zużyć na wyprodukowanie nowych cząstek.

Przykład

Aby wyprodukować antyproton w reakcji



musimy mieć

$$\sqrt{s} \geq 4 m_p$$

⇐ liczymy wszystkie cząstki w stanie końcowym, także cząstki pierwotne

Zderzenia relatywistyczne

Określoną wartość energii dostępnej możemy uzyskać na różne sposoby:

Zderzenia z tarczą

Cząstka “pocisk” o energii E uderza w nieruchomą tarczę:

$$s = 2 E_1 m_2 + m_1^2 + m_2^2$$

w granicy $E_1 \gg m_1 \sim m_2$

$$s \approx 2 E_1 m_2$$

Wiązki przeciwbieżne

Zderzenia wiązek o energiach E_1 i E_2 :

$$s = 2 E_1 E_2 + 2 p_1 p_2 + m_1^2 + m_2^2$$

w granicy $E_1 \sim E_2 \gg m_1 \sim m_2$

$$s \approx 4 E_1 E_2$$

Dużo wyższe wartości !!!

Przykład

Wiązka protonów o energii 50 GeV ($\approx 50 m_p$)

- na **tarczy** wodorowej (protony): $\sqrt{s} \approx \sqrt{2 E m_p} \approx 10 \text{ GeV} \approx 10 m_p$
- dwie **wiązki przeciwbieżne**: $\sqrt{s} \approx \sqrt{4 E \cdot E} = 2 E = 100 \text{ GeV} \approx 100 m_p$

Energia progowa

Zderzenia z tarczą

Minimalna energia wiązki E_{min} przy której możliwa jest dana reakcja.

Minimalna masa niezmiennicza:

$$s_{min} = \left(\sum_i m_i \right)^2$$

W zderzeniach z nieruchomą tarczą:

$$s_{min} = 2 E_{min} m_2 + m_1^2 + m_2^2$$

⇒ minimalna energia całkowita pocisku:

$$E_{min} = \frac{s_{min} - (m_1^2 + m_2^2)}{2 m_2} = \frac{(\sum_i m_i)^2 - (m_1^2 + m_2^2)}{2 m_2}$$

⇒ minimalna energia kinetyczna pocisku:

$$E_{k,min} = E_{min} - E_0 = \frac{(\sum_i m_i)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2 m_2}$$

Energia progowa

Zderzenia z tarczą

Związek minimalnej energii kinetycznej pocisku z przyrostem masy:

$$2 m_2 E_{k,min} = \left(\sum_i m_i \right)_{\text{końcowe}}^2 - \left(\sum_i m_i \right)_{\text{początkowe}}^2$$

⇒ energia kinetyczna pocisku jest “zużywana” na zwiększenie masy układu...

Przykład 1

Produkcja anty-protonów w reakcji $pp \rightarrow ppp\bar{p}$ $\sum_i m_i = 4m_p$ $\Delta M = 2m_p$

$$E_{min} = \frac{(4 m_p)^2 - (m_p^2 + m_p^2)}{2 m_p} = 7 m_p$$

$$E_{k,min} = E_{min} - m_p = 6 m_p \approx 5.63 \text{ GeV}$$

Energia progowa

Wiązki przeciwbieżne

Dla wiązek przeciwbieżnych: dla uproszczenia przyjmujemy $E_1 = E_2, m_1 = m_2$

$$s_{min} \approx 4 E_1 E_2 = 4 E_{min}^2$$

$$E_{min} = \frac{1}{2} \sqrt{s_{min}} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sum_i m_i\right)^2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i$$

$$E_{k,min} = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_i m_i\right)_{\text{końcowe}} - \left(\sum_i m_i\right)_{\text{początkowe}} \right]$$

⇒ energia rośnie liniowo z masą produkowanego stanu (na tarczy: kwadratowo)

⇒ dużo niższe energie potrzebne do wytworzenia tego samego stanu

Przykład 1 (c.d.)

Produkcja anty-protonów w reakcji $p p \rightarrow p p p \bar{p}$ $\sum_i m_i = 4 m_p$

$$E_{k,min} = \frac{1}{2} [4m_p - 2m_p] = m_p \approx 0.94 \text{ GeV} \quad \text{na tarczy: } 5.63 \text{ GeV}$$

Energia progowa

Wiązki przeciwbieżne

Przykład 2

Produkcja par bozonów W^+W^- w zderzeniach elektron-pozyton: $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$

Gdybyśmy chcieli użyć pojedynczej wiązki pozytonów i tarczy $\sum_i m_i = 2 m_W$

$$E_{min} = \frac{(2 m_W)^2 - (m_e^2 + m_e^2)}{2 m_e} \approx \frac{2 m_W^2}{m_e} \approx 25\,300\,000 \text{ GeV}$$

$$m_W = 80.4 \text{ GeV} \quad m_e = 0.000511 \text{ GeV}$$

Tak ogromnych energii nie jesteśmy w stanie wytworzyć !

Dotychczas wiązki pozytonów $E \approx 100 \text{ GeV}$, projektowane $E \approx 1000 - 5000 \text{ GeV}$...

Dla przeciwbieżnych wiązek elektron-pozyton: $s \approx 4 E^2$

$$E_{min} = \frac{1}{2} \sqrt{s_{min}} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sum_i m_i\right)^2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i = m_W \approx 80 \text{ GeV}$$

Takie energie to już nie problem...



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt **Fizyka wobec wyzwań XXI w.**
współfinansowany przez Unię Europejską
ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki