

Fizyka I 2010/2011

Rozwiązania zadań egzaminacyjnych

Zadanie 1

1. **Wersja A dla medyków** Na stacji kolejowej znajduje się peron, z którym wiążemy układ odniesienia U . Po szynach, z prędkością $V = c/\sqrt{2}$ względem peronu, przejeżdża pociąg, z którym wiążemy układ odniesienia U' . Osie X i X' są równoległe i mają zwroty w tę samą stronę, zgodnie ze zwrotem wektora prędkości pociągu. Osie Y i Y' są prostopadłe do torów. W pociągu znajduje się laser emitujący fotony o energii $E_0 = 2$ eV prostopadłe do osi pociągu czyli w kierunku dodatnim osi Y' .

- (a) Podaj składowe czterowektora energii-pędu fotonu w układzie pociągu, $p' = (E', p'_x, p'_y, p'_z)$;
(b) podaj składowe czterowektora energii-pędu fotonu w układzie peronu, $p = (E, p_x, p_y, p_z)$;
(c) wyprowadź wzór na energię fotonu w układzie peronu i podaj wartość liczbową; (d) wyprowadź wzór na kąt α względem osi X pod jakim porusza się foton w układzie peronu i podaj wartość liczbową.

Rozwiązanie:

(a) $p' = (E_0, 0, E_0, 0)$

- (b) Transformujemy czterowektor p' do układu U (mamy oczywiście: $p'_x = 0, p'_z = 0$):

$$\begin{aligned} E &= \gamma E_0 + \beta \gamma p'_x \\ p_x &= \gamma p'_x + \beta \gamma E_0 \\ p_y &= p'_y \\ p_z &= p'_z \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc czterowektor: $p = (E, p_x, p_y, 0)$ gdzie: $E = \gamma E_0$, $p_x = \beta \gamma E_0$ oraz $p_y = E_0$. Łatwo pokazać, że $E^2 - p_x^2 - p_y^2 = 0$

- (c) energia fotonu w układzie peronu wynosi: $E = \gamma E_0 = 2\sqrt{2}$ eV

- (d) foton w układzie peronu emitowany jest pod kątem: $\tan \alpha = p_y/p_x = 1/(\beta \gamma) = 1$,
 $\alpha = 45^\circ$.

2. **Wersja B dla medyków** Na stacji kolejowej znajduje się peron, z którym wiążemy układ odniesienia U . Po szynach, z prędkością $V = c\sqrt{3}/2$ względem peronu, przejeżdża pociąg, z którym wiążemy układ odniesienia U' . Osie X i X' są równoległe i mają zwroty w tę samą stronę, zgodnie ze zwrotem wektora prędkości pociągu. Osie Y i Y' są prostopadłe do torów. W pociągu znajduje się laser emitujący fotony o energii $E_0 = 2$ eV prostopadłe do osi pociągu czyli w kierunku dodatnim osi Y' .

- (a) Podaj składowe czterowektora energii-pędu fotonu w układzie pociągu, $p' = (E', p'_x, p'_y, p'_z)$;
 (b) podaj składowe czterowektora energii-pędu fotonu w układzie peronu, $p = (E, p_x, p_y, p_z)$;
 (c) wyprowadź wzór na energię fotonu w układzie peronu i podaj wartość liczbową; (d) wyprowadź wzór na kąt α względem osi X pod jakim porusza się foton w układzie peronu i podaj wartość liczbową.

Rozwiązanie:

(a) $p' = (E_0, 0, E_0, 0)$

(b) Transformujemy czterowektor p' do układu U (mamy oczywiście: $p'_x = 0, p'_z = 0$):

$$\begin{aligned} E &= \gamma E_0 + \beta \gamma p'_x \\ p_x &= \gamma p'_x + \beta \gamma E_0 \\ p_y &= p'_y \\ p_z &= p'_z \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc czterowektor: $p = (E, p_x, p_y, 0)$ gdzie: $E = \gamma E_0$, $p_x = \beta \gamma E_0$ oraz $p_y = E_0$. Łatwo pokazać, że $E^2 - p_x^2 - p_y^2 = 0$

(c) energia fotonu w układzie peronu wynosi: $E = \gamma E_0 = 4 \text{ eV}$

(d) foton w układzie peronu emitowany jest pod kątem: $\tan \alpha = p_y/p_x = 1/(\beta \gamma) = \sqrt{3}$, $\alpha = 60^\circ$.

3. **Wersja A dla fizyków** Na stacji kolejowej znajduje się peron, z którym wiążemy układ odniesienia U . Po szynach, z prędkością $V = c/\sqrt{2}$ względem peronu, przejeżdża pociąg, z którym wiążemy układ odniesienia U' . Osie X i X' są równoległe i mają zwroty w tę samą stronę, zgodnie ze zwrotem wektora prędkości pociągu. Osie Y i Y' są prostopadłe do torów. W pociągu znajduje się laser emitujący fotony o energii $E_0 = 2 \text{ eV}$ pod kątem $\delta = \pi/4$ do osi pociągu.

- (a) Podaj składowe czterowektora energii-pędu fotonu w układzie pociągu, $p' = (E', p'_x, p'_y, p'_z)$;
 (b) podaj składowe czterowektora energii-pędu fotonu w układzie peronu, $p = (E, p_x, p_y, p_z)$;
 (c) oblicz wartość energii fotonu w układzie peronu; (d) wyprowadź wzór na tangens kąta α względem osi X pod jakim porusza się foton w układzie peronu i wyznacz jego wartość liczbową.

Rozwiązanie:

(a) $p' = (E_0, E_0 \cos \delta, E_0 \sin \delta, 0)$

(b) Transformujemy czterowektor p' do układu U :

$$\begin{aligned} E &= \gamma E_0 + \beta \gamma p'_x \\ p_x &= \gamma p'_x + \beta \gamma E_0 \\ p_y &= p'_y \\ p_z &= p'_z \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc czterowektor: $p = (E, p_x, p_y, 0)$ gdzie: $E = \gamma E_0 + \beta \gamma E_0 \cos \delta$, $p_x = \gamma E_0 \cos \delta + \beta \gamma E_0$ oraz $p_y = E_0 \sin \delta$. Łatwo pokazać, że $E^2 - p_x^2 - p_y^2 = 0$

(c) $E = \gamma E_0(1 + \beta \cos \delta) = 3\sqrt{2} \text{ eV}$ ($\gamma = \sqrt{2}$)

(d) foton w układzie peronu emitowany jest pod kątem:

$$\tan \alpha = p_y/p_x = \sin \delta / [\gamma(\beta + \cos \delta)] = 1/(2\sqrt{2}).$$

4. **Wersja B dla fizyków** Na stacji kolejowej znajduje się peron, z którym wiążemy układ odniesienia U . Po szynach, z prędkością $V = c/\sqrt{2}$ względem peronu, przejeżdża pociąg, z którym wiążemy układ odniesienia U' . Osie X i X' są równoległe i mają zwroty w tę samą stronę, zgodnie ze zwrotem wektora prędkości pociągu. Osie Y i Y' są prostopadłe do torów. W pociągu znajduje się laser emitujący fotony o energii $E_0 = 1 \text{ eV}$ pod kątem $\delta = \pi/4$ do osi pociągu.

(a) Podaj składowe czterowektora energii-pędu fotonu w układzie pociągu, $p' = (E', p'_x, p'_y, p'_z)$;

(b) podaj składowe czterowektora energii-pędu fotonu w układzie peronu, $p = (E, p_x, p_y, p_z)$;

(c) oblicz wartość energii fotonu w układzie peronu; (d) wyprowadź wzór na tangens kąta α względem osi X pod jakim porusza się foton w układzie peronu i wyznacz jego wartość liczbową.

Rozwiązanie:

(a) $p' = (E_0, E_0 \cos \delta, E_0 \sin \delta, 0)$

(b) Transformujemy czterowektor p' do układu U :

$$\begin{aligned} E &= \gamma E_0 + \beta \gamma p'_x \\ p_x &= \gamma p'_x + \beta \gamma E_0 \\ p_y &= p'_y \\ p_z &= p'_z \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc czterowektor: $p = (E, p_x, p_y, 0)$ gdzie: $E = \gamma E_0 + \beta \gamma E_0 \cos \delta$, $p_x = \gamma E_0 \cos \delta + \beta \gamma E_0$ oraz $p_y = E_0 \sin \delta$. Łatwo pokazać, że $E^2 - p_x^2 - p_y^2 = 0$

(c) $E = \gamma E_0(1 + \beta \cos \delta) = 3/\sqrt{2} \text{ eV}$ ($\gamma = \sqrt{2}$)

(d) foton w układzie peronu emitowany jest pod kątem:

$$\tan \alpha = p_y/p_x = \sin \delta / [\gamma(\beta + \cos \delta)] = 1/(2\sqrt{2}).$$

Zadanie 2

Na wózek o masie $M = 50$ kg, poruszający się poziomo z prędkością $v = 1$ m/s wrzucono paczkę o masie $m = 5$ kg w taki sposób, że przed zetknięciem się z wózkiem nie miała ona poziomej składowej prędkości. Po zetknięciu się z wózkiem paczka przez pewien czas przesuwała się względem wózka po jego powierzchni aż do zatrzymania. Od tego czasu wózek i paczka poruszały się razem. Znaleźć:

1. pracę siły tarcia pomiędzy wózkiem i paczką,
2. drogę przebytą przez paczkę względem wózka od momentu zetknięcia się jej z wózkiem do zatrzymania.

Współczynnik tarcia dynamicznego pomiędzy wózkiem i paczką wynosi $\mu = 0,2$, przyspieszenie ziemskie $g = 10$ m/s². Założyć, że wózek porusza się po podłożu bez oporów oraz, że przez cały czas kontaktu paczki z wózkiem siła nacisku paczki jest stała.

Rozwiązanie.

Zmiana energii kinetycznej ciała równa się pracy siły wypadkowej:

$$\Delta E_k = W \quad (1)$$

Od momentu zetknięcia się paczki z wózkiem jedynymi niezrównoważonymi siłami działającymi na wózek i paczkę są siły tarcia pomiędzy nimi. Siła tarcia działa na wózek spowalniając jego ruch, zaś (zgodnie z III zasadą dynamiki) siła działająca na

paczkę będzie przeciwnie skierowana i będzie powodowała ruch przyspieszony paczki. Wartość siły tarcia jest stała i wynosi:

$$F_T = mg\mu \quad (2)$$

Całkowita praca sił tarcia będzie sumą pracy siły tarcia działającej na wózek (praca ta jest ujemna, bo ruch wózka i zwrot siły tarcia działającej na wózek są przeciwne) oraz pracy siły tarcia działającej na paczkę (ta praca będzie dodatnia, bo siła tarcia działa na paczkę zgodnie z kierunkiem jej ruchu). Całkowita praca sił tarcia wynosi więc:

$$W_T = mg\mu(\Delta s_p - \Delta s_w) = -mg\mu \cdot \Delta s \quad (3)$$

gdzie Δs_p i Δs_w są drogami przebytymi przez paczkę i wózek (liczonymi w układzie obserwatora stojącego na ziemi), zaś Δs jest drogą przebytą przez paczkę względem wózka od momentu wrzucenia jej na wózek do momentu jej zatrzymania. Jak widać, praca W_T jest *ujemna*.

Ze względu na to, że na układ obu mas nie działają żadne niezrównoważone siły zewnętrzne, to całkowity pęd układu będzie zachowany:

$$Mv = (M + m)v' \quad (4)$$

gdzie v' jest końcową prędkością układu wózek-paczka.

Wykorzystując teraz równanie (1) mamy:

$$W_T = \frac{(M + m)v'^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = -\frac{mMv^2}{2(m + M)} \quad (5)$$

Stąd łatwo można znaleźć drogę Δs przebytą przez paczkę na wózku:

$$\Delta s = \frac{Mv^2}{2g\mu(m + M)} \quad (6)$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$W_T = -2,27 \text{ J}$$

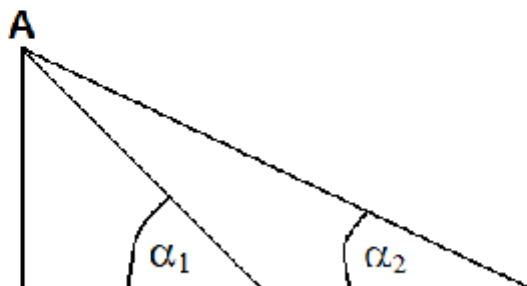
$$\Delta s = 22,7 \text{ cm}$$

Zadanie 2 (FMiNI)

Z punktu A po dwóch różnych równiach pochyłych (rys) ześlizgują się bez prędkości początkowej dwa jednakowe ciała. Jaki jest stosunek prędkości v_1/v_2 ciał u podstawy równi pochyłej w dwóch sytuacjach:

- bez uwzględnienia tarcia,
- jeżeli tarcie występuje, przy czym współczynnik tarcia dla obu równi jest jednakowy i równy μ .

W czasie ruchu ciał, równie pozostają nieruchome względem podłoża.



Rozwiązanie:

- Naturalnie prędkości końcowe obu ciał u podstaw równi będą w tym wypadku identyczne. Studenci mogą to wywnioskować natychmiast z zasady zachowania energii. Mogą też pracowicie rozwiązać równania ruchu i dojść do takiego samego wyniku.
- Dwie metody rozwiązania tego punktu to:

1) Rozwiązanie kinematyczne.

Orientując oś x zgodnie z kierunkiem ruchu ciała otrzymujemy przyspieszenie ciał w ruchu po równi pochyłej zadane jako:

$$a_1 = g (\sin \alpha_1 - \mu \cos \alpha_1)$$

$$a_2 = g (\sin \alpha_2 - \mu \cos \alpha_2)$$

Oznaczmy przez L_1 i L_2 odcinki drogi, jaką pokonają ciała na równi pochyłej:

$$L_1 = H / \sin \alpha_1 \quad L_2 = H / \sin \alpha_2$$

W ruchu jednostajnie przyspieszonym na tym odcinku mamy następujące zależności:

$$x_1(t) = a_1 t^2 / 2 \quad x_2(t) = a_2 t^2 / 2$$

$$v_1(t) = a_1 t \quad v_2(t) = a_2 t$$

Skąd dla momentów odpowiadających znalezieniu się ciał na dole równi jest:

$$L_1 = a_1 t_{L1}^2 / 2 \quad L_2 = a_2 t_{L2}^2 / 2$$

$$v_{L1} = a_1 t_{L1} \quad v_{L2} = a_2 t_{L2}$$

Wyznaczając z powyższego prędkości ciał na dole równi jest:

$$v_{L1}^2 = 2L_1 a_1 = 2a_1 H / \sin \alpha_1 \quad v_{L2}^2 = 2L_2 a_2 = 2a_2 H / \sin \alpha_2$$

Stąd mamy stosunek prędkości dany jako:

$$v_{L1}/v_{L2} = \sqrt{\frac{a_1 \sin \alpha_2}{a_2 \sin \alpha_1}} = \sqrt{\frac{(\sin \alpha_1 - \mu \cos \alpha_1) \sin \alpha_2}{(\sin \alpha_2 - \mu \cos \alpha_2) \sin \alpha_1}} = \sqrt{\frac{1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha_1}{1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha_2}}$$

2) Rozwiązanie z zasady zachowania energii.

Na początku oba ciała mają energię całkowitą daną:

$$E_{\text{początkowa}} = mgH$$

Na końcu ciała mają energie całkowite tożsame z ich energiami kinetycznymi (zero energii potencjalnej zakładamy u podstawy równi):

$$E_{\text{końcowa1}} = \frac{mv_{L1}^2}{2} \quad E_{\text{końcowa2}} = \frac{mv_{L2}^2}{2}$$

Zasada zachowania energii po uwzględnieniu pracy dysypatywnej siły tarcia daje:

$$mgH - mg \mu \cos \alpha_1 L_1 = \frac{mv_{L1}^2}{2} \quad mgH - mg \mu \cos \alpha_2 L_2 = \frac{mv_{L2}^2}{2}$$

Stąd:

$$v_{L1}^2 = 2Hg(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha_1) \quad v_{L2}^2 = 2Hg(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha_2)$$

Czyli:

$$v_{L1}/v_{L2} = \sqrt{\frac{1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha_1}{1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha_2}}$$

Zadanie 3a (Fizyka)

Galileuszowe księżycy Jowisza, Io i Europa krążą po eliptycznych orbitach o dużych półosiach orbity odpowiednio $a_I = 422$ tys. km i $a_E = 671$ tys. km. Okres obiegu Io wynosi 1,77 dnia ziemskiego.

1. Oblicz okres obiegu Europy wokół Jowisza
2. Oblicz Masę Jowisza.
3. Oblicz przyspieszenie grawitacyjne na biegunie i równiku Jowisza, jeśli jego przybliżona wartość promienia wynosi $\sim 70\,000$ km, a okres rotacji ~ 10 godz.
4. Oblicz prędkość ucieczki z powierzchni Jowisza w okolicy bieguna (II prędkość kosmiczną).

Przyjmij, że stosunek mas Jowisza i Ziemi $\frac{M_J}{M_Z} \cong 317$, a stosunek promieni tych planet wynosi $\frac{R_J}{R_Z} \cong 11$, stała grawitacji wynosi $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, a przyspieszenie ziemskie $g_Z \cong 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Jeśli nie obliczyłeś masy Jowisza w punkcie 2, przyjmij do rachunków w punkcie 3 i 4 masę $M_J = 2 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

Rozwiązanie:

Ad1,2) Zarówno do obliczenia okresu obiegu Europy wokół Jowisza jak i masy Jowisza skorzystamy z III prawa Keplera.

$$\frac{T_E^2}{a_E^3} = \frac{T_{Io}^2}{a_{Io}^3} \rightarrow T_E = T_{Io} \sqrt{\frac{a_E^3}{a_{Io}^3}} \rightarrow T_E = 1,77 \text{ dnia} \sqrt{\frac{6,71^3}{4,22^3}} = 1,77 \text{ dnia} \sqrt{\frac{302}{75,1}} \cong 3,55 \text{ dnia}$$

$$\frac{T_{Io}^2}{a_{Io}^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \rightarrow M = \frac{4\pi^2 a_{Io}^3}{T_{Io}^2 G} \rightarrow M \cong 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

Ad3) Przyspieszenie na biegunie pochodzi jedynie od grawitacji

$$m \cdot g = \frac{GMm}{(R)^2} \rightarrow g = \frac{GM}{R^2}$$

Przyspieszenia: ziemskie i jowiszowe odpowiednio to:

$$g_Z = \frac{GM_Z}{R_Z^2} \quad \text{ i } \quad g_J = \frac{GM_J}{R_J^2}$$

Stosunek przyspieszeń pozwala wyznaczyć przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Jowisza:

$$g_J = g_Z \frac{M_J \cdot R_Z^2}{M_Z \cdot R_J^2} \cong 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{317}{121} = 26 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Przyspieszenie na równiku Jowisza jest pomniejszone o wartość przyspieszenia dośrodkowego wynikającego z rotacji Jowisza

$$a_d = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{3,6^2 \cdot 10^8 s^2} \cdot 7 \cdot 10^7 m = 2,1 \frac{m}{s^2}$$

Wypadkowe przyspieszenie na równiku to różnica $g - a_d = 23,9 m/s^2$.

Ad4) II prędkość kosmiczna z równania: $\frac{GMm}{R} + \frac{mv_H^2}{2} = 0 \rightarrow v_H = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$, pozwala wyznaczyć wartość liczbową w oparciu o wartość przyspieszenia grawitacyjnego na Jowiszu $g = \frac{GM}{R^2} \rightarrow gR = \frac{GM}{R}$ więc $v_H = \sqrt{2gR}$, podstawiając wartości przyspieszenia wyliczonego w punkcie 3 i promienia Jowisza mamy:

$$v_H = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 26 \frac{m}{s^2} \cdot 70 \cdot 10^6 m} = 60 \frac{km}{s}$$

II prędkość kosmiczna z równania możemy też wyznaczyć korzystając ze stałej grawitacji i parametrów planety: $\frac{GMm}{R} + \frac{mv_H^2}{2} = 0 \rightarrow v_H = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$,

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,9 \cdot 10^{27} N \cdot m^2}{7 \cdot 10^7 m \cdot kg}} = \sqrt{36,2 \cdot 10^8 \frac{m^2}{s^2}} \cong 60 km/s$$

Zadanie 3b (Fizyka)

Mars ma dwa księżyce – Fobos i Deimos, które krążą po eliptycznych orbitach o dużych półosiach orbity odpowiednio $a_F = 9400$ km i $a_D = 23500$ km. Okres obiegu Deimosa 30 godzin.

1. Oblicz okres obiegu Fobosa wokół Marsa
2. Oblicz Masę Marsa.
3. Oblicz przyspieszenie grawitacyjne na biegunie i równiku Jowisza, jeśli jego przybliżona wartość promienia wynosi ~ 3400 km, a okres rotacji $\sim 24,5$ godz.
4. Oblicz prędkość ucieczki z powierzchni Marsa (II prędkość kosmiczną).

Przyjmij, że stosunek mas Marsa Ziemi $\frac{M_M}{M_Z} \cong 0,1$ a stosunek promieni tych planet wynosi

$\frac{R_M}{R_Z} \cong 0,5$ stała grawitacji wynosi $G = 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$, a przyspieszenie ziemskie

$g_Z \cong 10 \frac{m}{s^2}$. Jeśli nie obliczyłeś masy Marsa w punkcie 2, przyjmij do rachunków w punkcie 3 i

4 masę $M_M = 6 \cdot 10^{23} kg$

Rozwiązanie:

Ad1,2) Zarówno do obliczenia okresu obiegu Fobosa wokół Marsa jak i masy Marsa skorzystamy z III prawa Keplera.

$$\frac{T_F^2}{a_F^3} = \frac{T_D^2}{a_D^3} \rightarrow T_F = T_D \sqrt{\frac{a_F^3}{a_D^3}} \rightarrow T_F = 30 \text{ godz} \sqrt{\frac{9,4^3}{23,5^3}} = 30 \text{ godz} \sqrt{\frac{1}{2,5^3}} \cong 7,7 \text{ godz}$$

$$2 \frac{T_B^2}{a_B^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \rightarrow M = \frac{4\pi^2 a_B^3}{T_B^2 G} \rightarrow M \cong 6,4 \cdot 10^{28} \text{ kg}$$

Ad3) Przyspieszenie na biegunie Marsa pochodzi jedynie od grawitacji

$$mg = \frac{GMm}{(R)^2} \rightarrow g = \frac{GM}{R^2}$$

Przyspieszenia: ziemskie i marsjańskie odpowiednio to:

$$g_Z = \frac{GM_Z}{R_Z^2} \quad \text{ i } \quad g_M = \frac{GM_M}{R_M^2}$$

Stosunek przyspieszeń pozwala wyznaczyć przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Marsa:

$$g_M = g_Z \frac{M_M \cdot R_Z^2}{M_Z \cdot R_M^2} \cong 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{0,1}{0,25} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Przyspieszenie na równiku Marsa jest pomniejszone o wartość przyspieszenia dośrodkowego wynikającego z rotacji Marsa

$$a_d = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{8,8^2 \cdot 10^8 \text{ s}^2} 3,4 \cdot 10^6 \text{ m} = 0,017 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Wypadkowe przyspieszenie na równiku to różnica $g - a_d \approx 3,98 \text{ m/s}^2$.

Ad4) II prędkość kosmiczna z równania: $\frac{GMm}{R} + \frac{mv_H^2}{2} = 0 \rightarrow v_H = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$, pozwala wyznaczyć wartość liczbową w oparciu o wartość przyspieszenia grawitacyjnego na Jowiszu $g = \frac{GM}{R^2} \rightarrow gR = \frac{GM}{R}$ więc $v_H = \sqrt{2gR}$, podstawiając wartości przyspieszenia wyliczonego w punkcie 3 i promienia Marsa mamy:

$$v_H = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3,4 \cdot 10^6 \text{ m}} = 5,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

II prędkość kosmiczna z równania możemy też wyznaczyć korzystając ze stałej Grawitacji i parametrów planety: $\frac{GMm}{R} + \frac{mv_H^2}{2} = 0 \rightarrow v_H = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$,

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{23} \text{ N} \cdot \text{m}^2}{3,4 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{kg}}} = \sqrt{23,5 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \cong 5 \text{ km/s}$$

1. Oblicz przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Marsa.
2. Oblicz prędkość z jaką porusza się księżyc Marsa Fobos krążący wokół Marsa po orbicie kołowej (w przybliżeniu) 6000 km nad powierzchnią Marsa.
3. Oblicz II prędkość kosmiczną dla Marsa.
4. Okres obrotu Marsa dookoła własnej osi wynosi 24,6 godziny (88560s). Oblicz promień orbity geostacjonarnej (dla Marsa) i prędkość satelity na tej orbicie.

$\frac{F_M}{F_Z} \cong 0,5$ stała grawitacji wynosi $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, a przyspieszenie ziemskie

Stała grawitacji jest równa $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$.

Ad1) Przyspieszenie na Marsie jedynie od grawitacji (zaniedbujemy siłę odśrodkową)

Przyspieszenia: ziemskie i marsjańskie odpowiednio to: $g_z = \frac{GM_z}{R_z^2}$ i $g_j = \frac{GM_j}{R_j^2}$

$$g_I = g_E \frac{M_I \cdot R_E^2}{M_E \cdot R_I^2} \cong 10 \frac{m}{s^2} \cdot \frac{0,1}{0,25} = 4 \frac{m}{s^2}$$
$$F = \frac{GMm}{(R+h)^2}$$
$$\frac{GMm}{(R+h)^2} = \frac{mv^2}{(R+h)}, \text{ co pozwala wyliczyć prędkość Fobosa na orbicie, } v^2 = \frac{GM}{(R+h)}, \text{ albo } v = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)}}$$
$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{22} \text{ N} \cdot \text{m}^2}{9,4 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{kg}}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{22} \text{ N} \cdot \text{m}^2}{3,6 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{kg}}} = \sqrt{4,55 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}, \text{ co daje } v = 2,13 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Ad3) II prędkość kosmiczna z równania: $\frac{GMm}{R} + \frac{mv_H^2}{2} = 0 \rightarrow v_H = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$, pozwala wyznaczyć wartość liczbową w oparciu o wartość przyspieszenia grawitacyjnego na Marsie

$g = \frac{GM}{R^2} \rightarrow gR = \frac{GM}{R}$ więc $v_H = \sqrt{2gR}$, podstawiając wartości przyspieszenia wyliczonego w punkcie 1 i promienia Marsa mamy:

$$v_H = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 4 \frac{m}{s^2} \cdot 3,4 \cdot 10^6 m} = 5,2 \frac{km}{s}$$

II prędkość kosmiczna z równania możemy też wyznaczyć korzystając ze stałej Grawitacji i parametrów planety. II prędkość kosmiczna z równania: $\frac{GMm}{R} + \frac{mv_H^2}{2} = 0 \rightarrow v_H = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$,

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23} N \cdot m^2}{3,4 \cdot 10^6 m \cdot kg}} = \sqrt{25,2 \cdot 10^6 \frac{m^2}{s^2}} \cong 5 km/s$$

Ad4) Prędkość na orbicie geostacjonarnej, jak na każdej innej dana jest równaniem:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Z kolei prędkość liniową satelity na orbicie kołowej można zapisać wzorem:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

gdzie okres obiegu satelity T z definicji musi być równy okresowi obrotu planety dookoła własnej osi.

stąd: $\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ I po przekształceniach: $r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$

Po podstawieniu danych liczbowych dla Marsa otrzymujemy:

$$r = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 6,42 \cdot 10^{23} kg \cdot (88560s)^2}{4\pi^2}} = 20\,400\,km$$

Wysokość orbity nad powierzchnią Marsa wynosi:

$$h = 20\,400\,km - 3\,400\,km = 17\,000\,km$$

Zadanie 3b (FMiNI)

Przed marsjańską misją kosmiczną należy umieścić satelity na orbitach Marsa i wykonać obliczenia.

1. Oblicz przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Marsa.
2. Oblicz prędkość z jaką porusza się księżyc Marsa Fobos krążący wokół Marsa po orbicie kołowej (w przybliżeniu) 6000 km nad powierzchnią Marsa.
3. Oblicz II prędkość kosmiczną dla Marsa.
4. Okres obrotu Marsa dookoła własnej osi wynosi 24,6 godziny (88560s). Oblicz promień orbity geostacjonarnej (dla Marsa) i prędkość satelity na tej orbicie.

II prędkość kosmiczna z równania możemy też wyznaczyć korzystając ze stałej Grawitacji i parametrów planety. II prędkość kosmiczna z równania: $\frac{GMm}{R} + \frac{mv_H^2}{2} = 0 \rightarrow v_H = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$,

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23} \text{ N} \cdot \text{m}^2}{3,4 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{kg}}} = \sqrt{25,2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \cong 5 \text{ km/s}$$

Ad4) Prędkość na orbicie geostacjonarnej, jak na każdej innej dana jest równaniem:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Z kolei prędkość liniową satelity na orbicie kołowej można zapisać wzorem:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

gdzie okres obiegu satelity T z definicji musi być równy okresowi obrotu planety dookoła własnej osi.

stąd: $\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ I po przekształceniach: $r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$

Po podstawieniu danych liczbowych dla Marsa otrzymujemy:

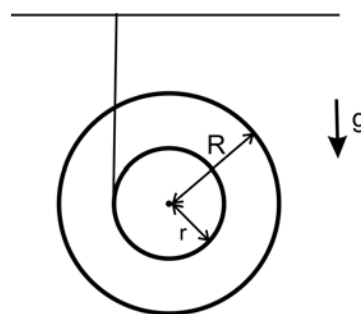
$$r = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg} \cdot (88560 \text{ s})^2}{4\pi^2}} = 20\,400 \text{ km}$$

Wysokość orbity nad powierzchnią Marsa wynosi:

$$h = 20\,400 \text{ km} - 3\,400 \text{ km} = 17\,000 \text{ km}$$

Zadanie 4, wersja A (Fizyka)

Na szpulkę złożoną z dwóch krążków o promieniu R i masie M oraz mniejszego krążka o promieniu r i masie m nawinięto nieważką i nieskończenie cienką nitkę. Wolny koniec nitki jest zamocowany do sufitu. Puszczamy szpulkę w polu ciężkości Ziemi. Znajdź przyspieszenie środka ciężkości szpulki. Jaka prędkość kątową będzie miała szpulka w chwili gdy jej środek ciężkości opuści się na odległość H ?



Rozwiązanie:

I metoda

Siła ciężkości F_g przyłożona jest do środka masy szpulki, tworzy ona moment siły rF_g względem punktu O (kontakt nitki ze szpulką).

Moment bezwładności szpulki względem O:

$$I = mr^2 + \frac{1}{2}mr^2 + 2\left(\frac{1}{2}MR^2 + Mr^2\right) = \frac{3}{2}mr^2 + (MR^2 + 2Mr^2).$$

Równanie ruchu:

$$rF_g = I\varepsilon.$$

Przyspieszenie liniowe środka masy:

$$a = r\varepsilon = \frac{r^2 F_g}{I} = \frac{r^2 (2M + m)g}{\frac{3}{2}mr^2 + MR^2 + 2Mr^2} = \frac{2M + m}{\frac{3}{2}m + M\frac{R^2}{r^2} + 2M}g$$

Prędkość kątowa szpulki: $\omega = \frac{v}{r}$, a ponieważ $a = \text{const}$, ciało w czasie Δt opuści się na

$$\text{odległość } H = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{\Delta v}{a}\right)^2 = \frac{(\Delta v)^2}{2a}. \text{ Stąd } \Delta v = \sqrt{2aH} = \sqrt{\frac{2(2M + m)gH}{\frac{3}{2}m + M\frac{R^2}{r^2} + 2M}}, a$$

$$\text{ponieważ ciało w chwili } t = 0 \text{ spoczywało więc ostatecznie } \omega = \sqrt{\frac{2(2M + m)gH}{\frac{3}{2}mr^2 + MR^2 + 2Mr^2}}.$$

II metoda

Równania ruchu względem środka masy szpulki:

$$(2M + m)a = (2M + m)g - T$$

$$I\varepsilon = rT$$

$$\varepsilon r = a$$

$$T = \frac{Ia}{r^2}$$

$$(2M + m)a = (2M + m)g - \frac{Ia}{r^2}$$

$$a = \frac{2M + m}{(2M + m) + \frac{I}{r^2}}g = \frac{2M + m}{(2M + m) + \frac{MR^2}{r^2} + \frac{1}{2}m}g$$

$$I = \frac{1}{2}mr^2 + 2\frac{1}{2}MR^2$$

III metoda

Z zasady zachowania energii:

$$(2M + m)gH = (2M + m)\frac{(\Delta v)^2}{2} + I\frac{(\Delta \omega)^2}{2},$$

gdzie $I = \frac{1}{2}mr^2 + 2\frac{1}{2}MR^2$.

$$(2M + m)gH = \frac{(\Delta \omega)^2}{2}(I + (2M + m)r^2)$$

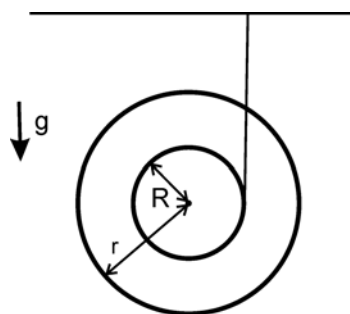
$$\Delta \omega = \sqrt{\frac{2(2M + m)gH}{I + (2M + m)r^2}}, \text{ a ponieważ ciało w chwili } t = 0 \text{ spoczywało więc ostatecznie}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2(2M + m)gH}{\frac{3}{2}mr^2 + MR^2 + 2Mr^2}}$$

$$\text{Odp. } a = \frac{2M + m}{\frac{3}{2}m + \frac{MR^2}{r^2} + 2M}g \text{ oraz } \omega = \sqrt{\frac{2(2M + m)gH}{\frac{3}{2}mr^2 + MR^2 + 2Mr^2}}.$$

Zadanie 4, wersja B (Fizyka)

Na szpulkę złożoną z dwóch krążków o promieniu r i masie m oraz mniejszego krążka o promieniu R i masie M nawinięto nieważką i nieskończenie cienką nitkę. Wolny koniec nitki jest zamocowany do sufitu. Puszczamy szpulkę w polu ciężkości Ziemi. Znajdź przyspieszenie środka ciężkości szpulki. Jaka prędkość kątową będzie miała szpulka w chwili gdy jej środek ciężkości opuści się na odległość h ?



Rozwiązanie:

I metoda

Siła ciężkości F_g przyłożona jest do środka masy szpulki, tworzy ona moment siły rF_g względem punktu O (kontakt nitki ze szpulką).

Moment bezwładności szpulki względem O:

$$I = MR^2 + \frac{1}{2}MR^2 + 2\left(\frac{1}{2}mr^2 + mR^2\right) = \frac{3}{2}MR^2 + (mr^2 + 2mR^2).$$

Równanie ruchu:

$$RF_g = I\varepsilon.$$

Przyspieszenie liniowe środka masy:

$$a = R\varepsilon = \frac{R^2 F_g}{I} = \frac{R^2 (2m + M)g}{\frac{3}{2}MR^2 + mr^2 + 2mR^2} = \frac{2m + M}{\frac{3}{2}M + m\frac{r^2}{R^2} + 2m} g$$

Prędkość kątowa szpulki: $\omega = \frac{v}{R}$, a ponieważ $a = \text{const}$, ciało w czasie Δt opuści się na

$$\text{odległość } h = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{\Delta v}{a}\right)^2 = \frac{(\Delta v)^2}{2a}. \text{ Stąd } \Delta v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{2(2m + M)gh}{\frac{3}{2}M + m\frac{r^2}{R^2} + 2m}}, a$$

$$\text{ponieważ ciało w chwili } t = 0 \text{ spoczywało więc ostatecznie } \omega = \sqrt{\frac{2(2m + M)gh}{\frac{3}{2}MR^2 + mr^2 + 2mR^2}}.$$

II metoda

Równania ruchu względem środka masy szpulki:

$$(2m + M)a = (2m + M)g - T$$

$$I\varepsilon = RT$$

$$\varepsilon R = a$$

$$T = \frac{Ia}{R^2}$$

$$(2m + M)a = (2m + M)g - \frac{Ia}{R^2}$$

$$a = \frac{2m + M}{(2m + M) + \frac{I}{R^2}} g = \frac{2m + M}{(2m + M) + \frac{mr^2}{R^2} + \frac{1}{2}M} g$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + 2\frac{1}{2}mr^2$$

III metoda

Z zasady zachowania energii:

$$(2m + M)gh = (2m + M)\frac{(\Delta v)^2}{2} + I\frac{(\Delta \omega)^2}{2},$$

$$\text{gdzie } I = \frac{1}{2}MR^2 + 2\frac{1}{2}mr^2.$$

$$(2m + M)gh = \frac{(\Delta \omega)^2}{2}(I + (2m + M)R^2)$$

$$\Delta \omega = \sqrt{\frac{2(2m + M)gh}{I + (2m + M)R^2}}, \text{ a ponieważ ciało w chwili } t = 0 \text{ spoczywało więc ostatecznie}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2(2m + M)gh}{\frac{3}{2}MR^2 + mr^2 + 2mR^2}}$$

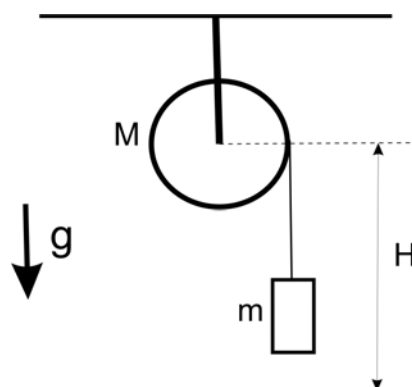
$$\text{Odp. } a = \frac{2m + M}{\frac{3}{2}M + \frac{mr^2}{R^2} + 2m}g \text{ oraz } \omega = \sqrt{\frac{2(2m + M)gh}{\frac{3}{2}MR^2 + mr^2 + 2mR^2}}.$$

Zadanie 4, wersja A (Fizyka Medyczna i Neuroinformatyka)

Na bleczek o promieniu R i masie M jest nawinięta nić, na końcu której wisi ciało o masie m . Znajdź przyspieszenie ciała w dowolnej chwili czasu t , gdy w chwili $t = 0$ zaczyna się on opuszczać w polu siły ciężkości Ziemi. Jaka prędkość kątową będzie miał bleczek w chwili gdy ciało opuści się na odległość H ? Moment bezwładności bleczka wynosi

$I = \frac{1}{2}MR^2$. Nić jest nierozciągliwa i ma zaniedbywaną

masę. Wartości liczbowe: $m = 0,5 \text{ kg}$, $M = 1 \text{ kg}$, $R = 50 \text{ cm}$, $H = 10 \text{ cm}$, $g \approx 10 \text{ m/s}^2$.



Rozwiązanie:

I metoda

Układ równań opisujący ruch bleczka i ciała:

$$ma = mg - T$$

$$I\varepsilon = RT$$

oraz $a = \varepsilon R$ i $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Z drugiego równania: $T = \frac{1}{2}Ma$

Wstawiając wyrażenie na T do równania pierwszego otrzymujemy:

$$ma = mg - \frac{1}{2}Ma.$$

I ostatecznie wzór na przyspieszenie ciała przyjmuje postać: $a = \frac{2mg}{2m + M}$.

Prędkość kątową bleczka: $\omega = \frac{v}{R}$, a ponieważ $a = \text{const}$, ciało w czasie Δt opuści się na

odległość $H = \frac{1}{2}a\Delta t^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{\Delta v}{a}\right)^2 = \frac{\Delta v^2}{2a}$. Stąd $\Delta v = \sqrt{2aH} = \sqrt{\frac{4mgH}{2m + M}}$, a ponieważ ciało w

w chwili $t = 0$ spoczywało więc ostatecznie $\omega = \sqrt{\frac{4mgH}{(2m + M)R^2}}$.

II metoda

Z zasady zachowania energii:

$$mgH = m\frac{(\Delta v)^2}{2} + \frac{1}{2}MR^2\frac{(\Delta \omega)^2}{2}$$

$$mgH = \frac{(\Delta \omega)^2 R^2}{2} \left(m + \frac{1}{2}M \right)$$

$$\Delta \omega = \sqrt{\frac{4mgH}{(2m + M)R^2}} \text{ i przyjmując } \omega(t = 0) = 0 \text{ ostatecznie otrzymujemy } \omega = \sqrt{\frac{4mgH}{(2m + M)R^2}}$$

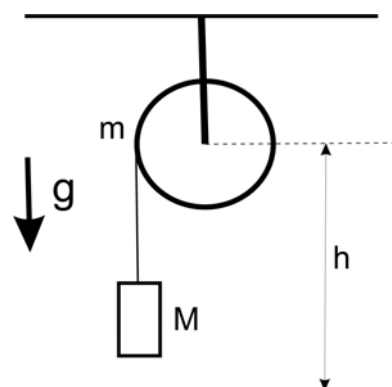
Odp. $a = 5 \text{ m/s}^2$ i $\omega = 2/\text{s}$.

Zadanie 4, wersja B (Fizyka Medyczna i Neuroinformatyka)

Na bleczek o promieniu R i masie m jest nawinięta nić, na końcu której wisi ciało o masie M . Znajdź przyspieszenie ciała w dowolnej chwili czasu t , gdy w chwili $t = 0$ zaczyna się on opuszczać w polu siły ciężkości Ziemi. Jaka prędkość kątową będzie miał bleczek w chwili gdy ciało opuści się na odległość h ? Moment bezwładności bleczka wynosi

$$I = \frac{1}{2} mR^2. \text{ Nić jest nierozciągliwa i ma zanedbywaną masę.}$$

Wartości liczbowe: $m = 1 \text{ kg}$, $M = 2 \text{ kg}$, $R = 20 \text{ cm}$, $h = 40 \text{ cm}$, $g \approx 10 \text{ m/s}^2$.



Rozwiązanie:

I metoda

Układ równań opisujący ruch bleczka i ciała:

$$Ma = Mg - T$$

$$I\epsilon = RT$$

$$\text{oraz } a = \epsilon R \text{ i } I = \frac{1}{2} mR^2.$$

$$\text{Z drugiego równania: } T = \frac{1}{2} ma$$

Wstawiając wyrażenie na T do równania pierwszego otrzymujemy:

$$Ma = Mg - \frac{1}{2} ma.$$

$$\text{I ostatecznie wzór na przyspieszenie ciała przyjmuje postać: } a = \frac{2Mg}{2M + m}.$$

Prędkość kątowa bleczka: $\Delta\omega = \frac{\Delta v}{R}$, a ponieważ $a = \text{const}$, ciało w czasie Δt opuści się na

$$\text{odległość } h = \frac{1}{2} a \Delta t^2 = \frac{1}{2} a \left(\frac{\Delta v}{a} \right)^2 = \frac{\Delta v^2}{2a}. \text{ Stąd } \Delta v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{4Mgh}{2M + m}}, \text{ a ponieważ ciało w}$$

$$\text{w chwili } t = 0 \text{ spoczywało więc ostatecznie } \Delta\omega = \sqrt{\frac{4Mgh}{(2M + m)R^2}}.$$

II metoda

Z zasady zachowania energii:

$$Mgh = M \frac{(\Delta v)^2}{2} + \frac{1}{2} mR^2 \frac{(\Delta\omega)^2}{2}$$

$$Mgh = \frac{(\Delta\omega)^2 R^2}{2} \left(M + \frac{1}{2} m \right)$$

$$\Delta\omega = \sqrt{\frac{4Mgh}{(2M + m)R^2}} \text{ i przyjmując } \omega(t = 0) = 0 \text{ ostatecznie otrzymujemy } \omega = \sqrt{\frac{4Mgh}{(2M + m)R^2}}.$$

Odp. $a = 8 \text{ m/s}^2$ i $\omega = 4/\text{s}$.