Zadanie 1 (kierunek Fizyka) wersja A

Dwa samochody poruszają się w gęstej mgle naprzeciw siebie. Samochody jadą ze stałymi prędkościami v_1 i v_2 odpowiednio. Mgła ogranicza widoczność do D=100m. W pewnej chwili kierowcy widzą że jadą naprzeciw siebie i natychmiast rozpoczynają hamowanie aby nie doszło do zderzenia czołowego. Przyspieszenie hamowania obydwu pojazdów wynosi $a=4ms^{-2}$.

a) znajdź maksymalną wartość prędkości v_1 samochodu pierwszego przy której nie dojdzie do zderzenia, jeśli drugi samochód porusza się z prędkością v_2=72 km/h.
b) Rozważamy sytuację ogólną, w której prędkości początkowe v_1 i v_2 nie są dane. Przy pewnych prędkościach początkowych obu pojazdów do zderzenia nie dojdzie. Zależy to zarówno od wartości v_1 jak i wartości v_2. Sporządź wykres zależności prędkości v_2 w funkcji v_1 takich, które pozwolą uniknąć wypadku. Wykres sporządź we współrzędnych v_1 i v_2.

Zadanie 1 (kierunek Fizyka) wersja B

W wyniku pomyłki dwa tramwaje znalazły się na jednym torze jadąc naprzeciw siebie. Tramwaje poruszają się w gęstej mgle ograniczającej widoczność do D=25m. Tramwaje jadą ze stałymi prędkościami v_1 i v_2 odpowiednio. W pewnej chwili obaj motorniczy widzą że jadą naprzeciw siebie i natychmiast rozpoczynają hamowanie aby nie doszło do zderzenia czołowego. Przyspieszenie hamowania obydwu pojazdów wynosi $a=4ms^{-2}$.

a) znajdź maksymalną wartość prędkości v_1 tramwaju pierwszego przy której nie dojdzie do zderzenia, jeśli drugi tramwaj porusza się z prędkością v_2=36 km/h.
b) Rozważamy sytuację ogólną, w której prędkości początkowe v_1 i v_2 nie są dane. Przy pewnych prędkościach początkowych obu pojazdów do zderzenia nie dojdzie. Zależy to zarówno od wartości v_1 jak i wartości v_2. Sporządź wykres zależności prędkości v_2 w funkcji v_1 takich, które pozwolą uniknąć wypadku. Wykres sporządź we współrzędnych v_1 i v_2.

Zadanie 1, wersja A

Rozwiązanie: a) Drogi hamowania samochodu 1 i 2 są odpowiednio:

$$S_1 = v_1 t_1 - \frac{at_1^2}{2},$$
$$S_2 = v_2 t_2 - \frac{at_2^2}{2},$$

gdzie $t_1 = \frac{v_1}{a}$ oraz $t_2 = \frac{v_2}{a}$ są czasami hamowania. Podstawienie czasów prowadzi do sumy dróg hamowania w postaci

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2a}(v_1^2 + v_2^1).$$

Aby nie doszło do zderzenia suma dróg hamowania musi być mniejsza niż widoczność D co prowadzi do wzoru:

$$v_1^2 + v_2^2 < 2aD.$$

Zatem prędkość v_1 dana jest nierównością

$$v_1 < \sqrt{2aD - v_2^2}.$$

Podstawienie danych liczbowych (v_2=72 km/h = 72000 m/3600s= 20m/s, 2aD = 2*4*100m^2/s^2 = 800m^2/s^2) prowadzi do wyniku

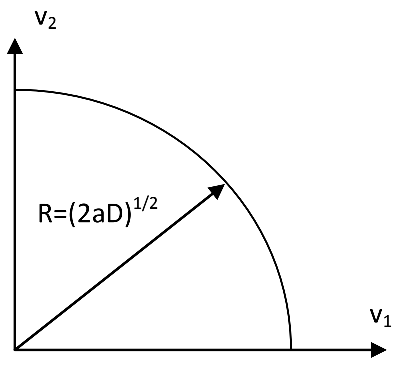
$$v_1 < \sqrt{800 - 400}\frac{m}{s} = \sqrt{400}\frac{m}{s} = 20\frac{m}{s} = 72\frac{km}{h}$$

W tym przypadku maksymalna prędkość v_2 jest równa prędkości v_1. Zatem są to prędkości optymalne, przy których oba samochody mają równe szanse zahamowania.

Rozwiązanie b) Korzystamy z wyprowadzonego wzoru

$$v_1^2 + v_2^2 < 2aD.$$

We współrzędnych v_1, v_2 jest to równanie koła o promieniu $R = \sqrt{2aD}$. Zatem bezpieczne prędkości są zawarte w ćwiartce koła o $R = \sqrt{2aD} = \sqrt{800}$ m/s = 28.2 m/s = 102 km/h.



Zadanie 1, wersja B

Rozwiązanie: a) Drogi hamowania tramwajów 1 i 2 są odpowiednio:

$$S_1 = v_1 t_1 - \frac{a t_1^2}{2},$$
$$S_2 = v_2 t_2 - \frac{a t_2^2}{2},$$

gdzie $t_1 = \frac{v_1}{a}$ oraz $t_2 = \frac{v_2}{a}$ są czasami hamowania. Podstawienie czasów prowadzi do sumy dróg hamowania w postaci

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2a}(v_1^2 + v_2^1).$$

Aby nie doszło do zderzenia suma dróg hamowania musi być mniejsza niż widoczność D co prowadzi do wzoru:

$$v_1^2 + v_2^2 < 2aD.$$

Zatem prędkość v_1 dana jest nierównością

$$v_1 < \sqrt{2aD - v_2^2}.$$

Podstawienie danych liczbowych (v_2=36 km/h = 36000 m/3600s= 10m/s, 2aD = 2*4*25m^2/s^2 = 200m^2/s^2) prowadzi do wyniku

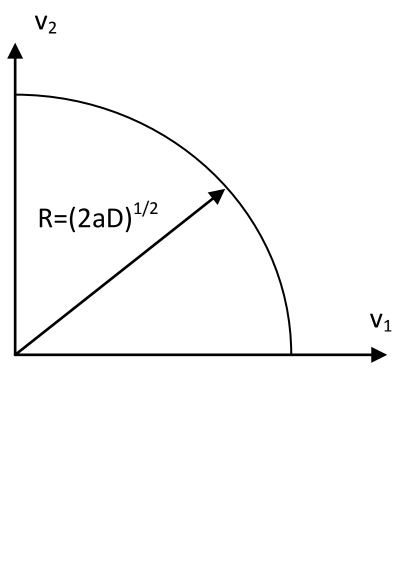
$$v_1 < \sqrt{200 - 100}\frac{m}{s} = \sqrt{100}\frac{m}{s} = 10\frac{m}{s} = 36\frac{km}{h}$$

W tym przypadku maksymalna prędkość v_2 jest równa prędkości v_1. Zatem są to prędkości optymalne, przy których obydwa tramwaje mają równe szanse zahamowania.

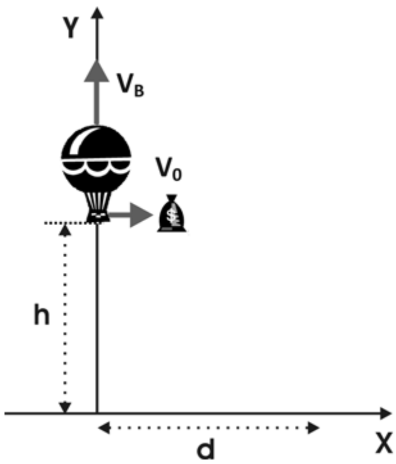
Rozwiązanie b): Korzystamy z wyprowadzonego wzoru

$$v_1^2 + v_2^2 < 2aD.$$

We współrzędnych v_1, v_2 jest to równanie koła o promieniu $R = \sqrt{2aD}$. Zatem bezpieczne prędkości są zawarte w ćwiartce koła o $R = \sqrt{2aD} = \sqrt{200}$ m/s = 14.1 m/s = 51 km/h.



Zadanie 2A



Balon wznosi się pionowo w górę ruchem jednostajnym z prędkością $V_B = 3m/s$. Na wysokości $h = 8m$ pilot wyrzucił niewielki przedmiot, nadając mu w układzie związanym z balonem prędkość poziomą $V_0 = 2m/s$. Po wyrzucania przedmiotu balon nie zmienił prędkości ani kierunku lotu. Wyznacz:

1. Odległość *d* w poziomie od miejsca upadku przedmiotu do miejsca startu balonu.
2. Wysokość na jakiej znajdował się balon w momencie upadku przedmiotu na ziemię.

Przyjmij wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 10m/s^2$.

Rozwiązanie

W układzie związanym z balonem balastowi nadano prędkość:

$$\vec{V}_0 = \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Prędkość balonu w układzie związanym z Ziemią jest równa: $\vec{V}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ V_B \end{bmatrix}$

Prędkość balastu w układzie związanym z Ziemią: $\vec{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_B \end{bmatrix}$

Równanie ruchu balastu względem Ziemi: $\begin{cases} x = V_0 t \\ y = h + V_B t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

Wyznaczając z drugiego równania czas i podstawiając do pierwszego otrzymujemy: $t = \frac{x}{V_0}$

I podstawiając do drugiego otrzymujemy:

$$y = h + \frac{V_B}{V_0} x - \frac{g}{2V_0^2} x^2$$

Kiedy balast dociera do Ziemi jego współrzędna y jest równa 0, zatem:

$$0 = h - \frac{V_B}{V_0} x - \frac{g}{2V_0^2} x^2 \rightarrow \frac{g}{2V_0^2} x^2 - \frac{V_B}{V_0} x - h = 0$$

Z powyższego równania możemy wyznaczyć współrzędną *x* zetknięcia się balastu z Ziemią:

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_{12} = \frac{\frac{V_B}{V_0} \pm \sqrt{\left(\frac{V_B}{V_0}\right)^2 + \frac{2gh}{V_B^2}}}{\frac{g}{V_0^2}} = \frac{\frac{V_B}{V_0} \pm \frac{1}{V_0}\sqrt{V_B^2 + 2gh}}{\frac{g}{V_0^2}} = \frac{\left(V_B \pm \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right) \cdot V_0}{g}$$

Dwa rozwiązania odpowiadają oczywiście dwóm punktom przecięcia osi *X* przez parabolę. Wybieramy zgodnie z treścią zadania punkt znajdujący się po dodatniej stronie osi *X*:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET WARSZAWSKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt ***Fizyka wobec wyzwań XXI*** **w. współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego**

$$d=\frac{\left(V_B+\sqrt{V_B^2+2gh}\right)\cdot V_0}{g}$$

Aby wyznaczyć na jakiej wysokości znajdował się balon w momencie zetknięcia się balastu z ziemią, wyznaczymy czas lotu balastu. Jest to czas potrzebny na pokonanie ruchem jednostajnym z prędkością V_0 odległości *d*:

$$t_L=\frac{d}{V_0}=\frac{\left(V_B+\sqrt{V_B^2+2gh}\right)}{g}$$

Po czasie t_L położenie balonu będzie wynosić:

$$y_B=h+V_B\frac{\left(V_B+\sqrt{V_B^2+2gh}\right)}{g}$$

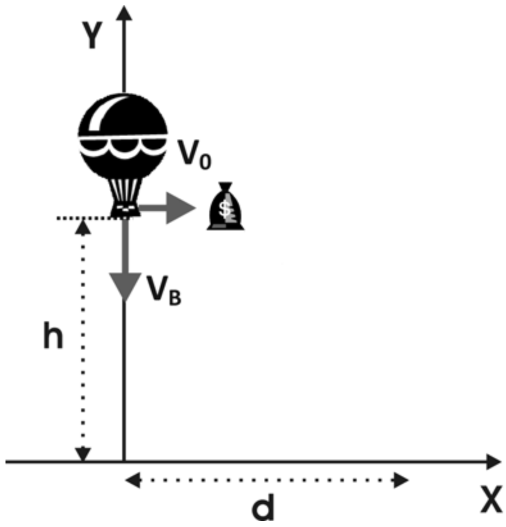
Podstawiając dane otrzymuje:

$$d=\frac{\left(V_B+\sqrt{V_B^2+2gh}\right)\cdot V_0}{g}=\frac{\left(3m/s+\sqrt{(3m/s)^2+2\cdot 10m/s^2\cdot 8m}\right)\cdot 2m/s}{10m/s^2}=3.2m$$

$$t_L=\frac{\left(V_B+\sqrt{V_B^2+2gh}\right)}{g}=\frac{\left(3m/s+\sqrt{(3m/s)^2+2\cdot 10m/s^2\cdot 8m}\right)}{10m/s^2}=1.6s$$

$$y_B=h+V_B\frac{\left(V_B+\sqrt{V_B^2+2gh}\right)}{g}=8m+\frac{\left(3m/s+\sqrt{(3m/s)^2+2\cdot 10m/s^2\cdot 8m}\right)\cdot 3m/s}{10m/s^2}=12.8m$$

Zadanie 2B



Balon opada pionowo w dół ruchem jednostajnym z prędkością $V_B = 3m/s$. Na wysokości $h = 8m$, pilot wyrzucił niewielki przedmiot, nadając mu w układzie związanym z balonem prędkość poziomą $V_0 = 2m/s$. Po wyrzucania przedmiotu balon nie zmienił prędkości ani kierunku lotu. Wyznacz:

1. Odległość *d* w poziomie w jakiej upadnie przedmiot od miejsca lądowania.
2. Wysokość na jakiej znajdował się balon w momencie upadku przedmiotu na ziemię.

Przyjmij wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 10m/s^2$.

<u>Rozwiązanie</u>

Bardzo podobne jak w poprzedniej wersji. Wyjątek to kierunek prędkości balonu.

W układzie związanym z balonem balastowi nadano prędkość: $\vec{V}_0 = \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Prędkość balonu w układzie związanym z Ziemią jest równa: $\vec{V}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -V_B \end{bmatrix}$

Prędkość balastu w układzie związanym z Ziemią: $\vec{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ -V_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ -V_B \end{bmatrix}$

Równanie ruchu balastu względem Ziemi: $\begin{cases} x = V_0 t \\ y = h - V_B t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

Wyznaczając z drugiego równania czas i podstawiając do pierwszego otrzymujemy: $t = \frac{x}{V_0}$

I podstawiając do drugiego otrzymujemy:

$$y = h - \frac{V_B}{V_0} x - \frac{g}{2V_0^2} x^2$$

Kiedy balast dociera do Ziemi jego współrzędna y jest równa 0, zatem:

$$0 = h - \frac{V_B}{V_0} x - \frac{g}{2V_0^2} x^2 \rightarrow \frac{g}{2V_0^2} x^2 + \frac{V_B}{V_0} x - h = 0$$

Z powyższego równania możemy wyznaczyć współrzędną *x* zetknięcia się balastu z Ziemią:

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_{12} = \frac{-\frac{V_B}{V_0} \pm \sqrt{\left(-\frac{V_B}{V_0}\right)^2 + \frac{2gh}{V_B^2}}}{\frac{g}{V_0^2}} = \frac{-\frac{V_B}{V_0} \pm \frac{1}{V_0}\sqrt{V_B^2 + 2gh}}{\frac{g}{V_0^2}} = \frac{\left(-V_B \pm \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right) \cdot V_0}{g}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIWERSYTET WARSZAWSKI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI* w. współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dwa rozwiązania odpowiadają oczywiście dwóm punktom przecięcia osi *X* przez parabolę. Wybieramy zgodnie z treścią zadania punkt znajdujący się po dodatniej stronie osi *X*:

$$d = \frac{\left(-V_B + \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right) \cdot V_0}{g}$$

Aby wyznaczyć na jakiej wysokości znajdował się balon w momencie zetknięcia się balastu z ziemią, wyznaczymy czas lotu balastu. Jest to czas potrzebny na pokonanie ruchem jednostajnym z prędkością V_0 odległości *d*:

$$t_L = \frac{d}{V_0} = \frac{\left(-V_B + \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right)}{g}$$

Po czasie t_L położenie (a zatem wysokość) balonu będzie wynosić:

$$y_B = h - V_B \frac{\left(-V_B + \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right)}{g}$$

Podstawiając dane otrzymuje:

$$d = \frac{\left(-V_B + \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right) \cdot V_0}{g} = \frac{\left(-3m/s + \sqrt{(3m/s)^2 + 2 \cdot 10m/s^2 \cdot 8m}\right) \cdot 2m/s}{10m/s^2} = 2m$$

$$t_L = \frac{\left(-V_B + \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right)}{g} = \frac{\left(-3m/s + \sqrt{(3m/s)^2 + 2 \cdot 10m/s^2 \cdot 8m}\right)}{10m/s^2} = 1s$$

$$y_B = h - V_B \frac{\left(-V_B + \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right)}{g} = 8m - \frac{\left(-3m/s + \sqrt{(3m/s)^2 + 2 \cdot 10m/s^2 \cdot 8m}\right) \cdot 3m/s}{10m/s^2} = 5.\ m$$

Zadanie 3, wersja A (rozwiązanie takie samo dla wesji B)

Relatywistyczny pociąg o długości $l_0 = 200$ m porusza się po prostych torach z prędkością $V = 0.6$ c. Obserwatorzy znajdujący się na obu końcach pociągu, O_p na początku pociągu, O_k - na końcu, wykonują za pomocą strzałów laserowych znaki na torach. W jakiej kolejności i w jakim odstępie czasu muszą wykonać oni znaki na torach aby dla obserwatora stojącego przy torach te dwa zdarzenia: wykonanie znaku przez O_p i wykonanie znaku przez O_k były jednoczesne? Jaką długość pociągu zmierzy ten obserwator?

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez x'_p i x'_k położenie początku i końca pociągu w jego układzie odniesienia i niech będzie: $x'_p - x'_k = l_0$. Mamy więc: $\Delta x' = x'_p - x'_k = l_0$. Obserwatorzy w pociągu wykonują dany znak strzałem laserowym w różnych chwilach co wiadomo a priori ponieważ te dwa zdarzenia jednoczesne w U nie mogą być jednoczesne w U'. Niech więc odstęp czasowy między nimi wynosi: $\Delta t' = t'_p - t'_k$. Z warunków zadania mamy: $\beta = 0.6, \ \gamma = 1.25$. W układzie torów otrzymujemy:

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + V/c^2 \ \Delta x' \right) \quad \Delta x = \gamma \left(\Delta x' + V \Delta t' \right).$$

Podstawiając z warunków zadania interwały: $\Delta t = 0$ i $\Delta x' = l_0$ otrzymujemy:

$$\Delta t' + V/c^2 \ l_0 = 0 \quad \Delta x = \gamma \left(l_0 + V \Delta t' \right).$$

Z lewego równania wyznaczamy: $\Delta t' = t'_p - t'_k = -V/c^2 \ l_0$ lub po zmianie znaków: $t'_k - t'_p = V/c^2 \ l_0$ czyli $t'_k > t'_p$. Oznacza to, że sygnał z początku pociągu musi być wysłany przez O_p wcześniej o $V/c^2 \ l_0 = 4 \times 10^{-7}$ s niż sygnał z końca pociągu przez O_k, aby w układzie torów były to zdarzenia równoczesne. Następnie podstawiając ten wynik do prawego równania otrzymujemy spodziewany wynik: $\Delta x = l_0/\gamma$ - spodziewany dlatego, że warunek jednoczesności tych zdarzeń w układzie U oznacza pomiar długości pociągu właśnie w tym układzie, czyli otrzymujemy wynik wyrażający skrócenie Lorentza.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI wieku* współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego