Kolokwium 1 (FM i NI)

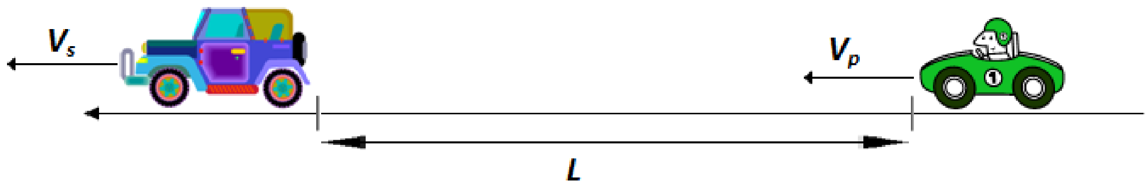
Zadanie 1 A

Spokojny kierowca jedzie samochodem ze stałą prędkością równą $V_s = 72 km/h$. Podąża za nim pirat drogowy ze stałą prędkością $V_p = 144 km/h$. W pewnym momencie, pirat drogowy zauważył, iż nie będzie mógł wyprzedzić spokojnego kierowcy z powodu jadącej z naprzeciwka ciężarówki i natychmiast rozpoczął hamowanie. Z kolei spokojny kierowca, zorientował się, że jadący za nim pirat może nie wyhamować i uderzyć w tył jego samochodu, dlatego zaczął rozpędzać auto, którym jechał. Wiedząc, że:

- spokojny kierowca zaczął rozpędzać samochód w tej samej chwili kiedy pirat rozpoczął hamowanie,
- odległość między samochodami w momencie rozpoczęcia przez kierowców manewru hamowanie i przyspieszania wynosiła *L* =45m,
- pirat drogowy hamował poruszając się ruchem jednostajnie opóźnionym z przyspieszeniem $a_p = -4 m/s^2$, zaś spokojny kierowca rozpędzał samochód ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a_s = 1 m/s^2$

Oblicz:

1. Odległość między samochodami w funkcji czasu.
2. Po jakim czasie od rozpoczęcia przez pirata drogowego hamowania odległość między samochodami osiągnęła najmniejszą wartość. Wyznacz tę odległość.
3. Z jaką prędkością poruszały się samochody, kiedy odległość między nimi była najmniejsza.



<u>Rozwiązanie</u>

Przyjmijmy, że układ współrzędnym wiążemy z miejscem rozpoczęciem przez pirata drogowego manewru hamowania. Zwrot osi ustalimy w kierunku ruchu pirata drogowego, czas natomiast będziemy liczyli od momentu rozpoczęcie przez pirata hamowania. Wtedy:

Równanie ruchu pirata drogowego:

$$x_p(t) = -\frac{1}{2}a_p t^2 + V_p t$$

Równanie ruchu spokojnego kierowcy:

$$x_s(t) = \frac{1}{2}a_s t^2 + V_s t + L$$

Odległość samochodów w funkcji czasu od momentu rozpoczęcia hamowania:

$$\Delta x(t) = x_s(t) - x_p(t) = \frac{1}{2}a_s t^2 + V_s t + L - \left(-\frac{1}{2}a_p t^2 + V_p t\right)$$

$$\Delta x(t) = \frac{1}{2}a_s t^2 + V_s t + L + \frac{1}{2}a_p t^2 - V_p t$$

$$\Delta x(t) = \frac{1}{2}(a_p + a_s)t^2 - (V_p - V_s)t + L$$

Jak możemy zauważyć, odległość między samochodami w funkcji czasu opisuje funkcja kwadratowa. Funkcja ta będzie mieć minimum w chwili czasu:

$$t_{\min} = -\frac{b}{2a} = \frac{(V_p - V_s)}{(a_p + a_s)}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET WARSZAWSKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI w.* współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

odległość pomiędzy samochodami wyniesie wtedy:

$$\Delta x(t_{\min}) = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(V_p - V_s)^2 + 2(a_p + a_s)\cdot L}{2(a_p + a_s)} = -\frac{(V_p - V_s)^2}{2(a_p + a_s)} + L$$

Prędkość samochodu spokojnego kierowcy w chwili czasu $t_{\min}$:

$$V_s(t_{\min}) = V_s + a_s \cdot t_{\min}$$

Natomiast prędkość pirata:

$$V_p(t_{\min}) = V_p - a_p \cdot t_{\min}$$

Podstawiając dane z treści zdania otrzymujmy:

$V_s = 72km/h = 20m/s$

$V_p = 144km/h = 40m/s$

$$t_{\min} = \frac{(V_p - V_s)}{(a_p + a_s)} = \frac{20m/s}{5m/s^2} = 4s$$

$$\Delta x(t_{\min}) = -\frac{(V_p - V_s)^2}{2(a_p + a_s)} + L = 5m$$

$V_s(t_{\min}) = 24m/s = 86.4km/h$

$V_p(t_{\min}) = 24m/s = 86.4km/h$

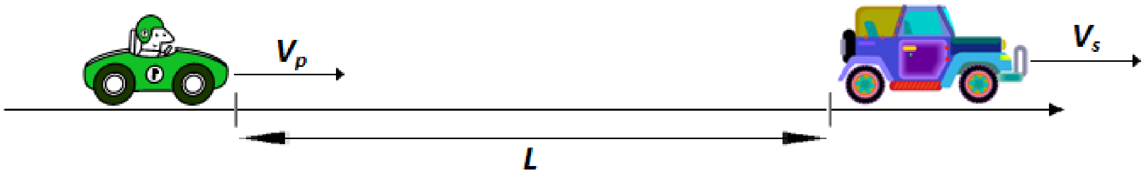
Zadanie 1B

Spokojny kierowca jedzie samochodem ze stałą prędkością równą $V_s = 90km/h$. Podąża za nim pirat drogowy ze stałą prędkością $V_p = 144km/h$. W pewnym momencie, pirat drogowy zauważył, iż nie będzie mógł wyprzedzić spokojnego kierowcy z powodu jadącej z naprzeciwka ciężarówki i natychmiast rozpoczął hamowanie. Z kolei spokojny kierowca, zorientował się, że jadący za nim pirat może nie wyhamować i uderzyć w tył jego samochodu, dlatego zaczął rozpędzać auto, którym jechał. Wiedząc, że:

- spokojny kierowca zaczął rozpędzać samochód w tej samej chwili kiedy pirat rozpoczął hamowanie,
- odległość między samochodami w momencie rozpoczęcia przez kierowców manewru hamowanie i przyspieszania wynosiła *L* =42.5m,
- pirat drogowy hamował poruszając się ruchem jednostajnie opóźnionym z przyspieszeniem $a_p = -2m/s^2$, zaś spokojny kierowca rozpędzał samochód ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a_s = 1m/s^2$

Oblicz:

1. Odległość między samochodami w funkcji czasu.
2. Po jakim czasie od rozpoczęcia przez pirata drogowego hamowania odległość między samochodami osiągnęła najmniejszą wartość. Wyznacz tę odległość.
3. Z jaką prędkością poruszały się samochody, kiedy odległość między nimi była najmniejsza.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

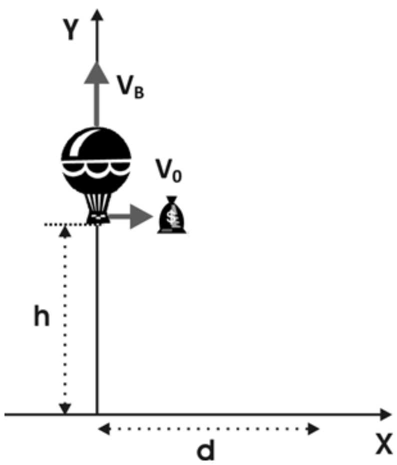
Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI* w. jest wspierany przez Europejski Fundusz Społeczny w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Rozwiązanie
Identyczne jak w wersji I.
Podstawiając dane z treści zdania otrzymujmy:
$V_s = 90km/h = 25m/s$
$V_p = 144km/h = 40m/s$

$$t_{\min} = \frac{(V_p - V_s)}{(a_p + a_s)} = \frac{15m/s}{3m/s^2} = 5s$$

$$\Delta x(t_{\min}) = -\frac{(V_p - V_s)^2}{2(a_p + a_s)} + L = 5m$$
$V_s(t_{\min}) = 30m/s = 108km/h$
$V_p(t_{\min}) = 30m/s = 108km/h$

Zadanie 2A



Balon wznosi się pionowo w górę ruchem jednostajnym z prędkością $V_B = 3m/s$. Na wysokości $h = 8m$ pilot wyrzucił niewielki przedmiot, nadając mu w układzie związanym z balonem prędkość poziomą $V_0 = 2m/s$. Po wyrzucania przedmiotu balon nie zmienił prędkości ani kierunku lotu. Wyznacz:

1. Odległość *d* w poziomie od miejsca upadku przedmiotu do miejsca startu balonu.
2. Wysokość na jakiej znajdował się balon w momencie upadku przedmiotu na ziemię.

Przyjmij wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 10m/s^2$.
Rozwiązanie
W układzie związanym z balonem balastowi nadano prędkość:
$$\vec{V}_0 = \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Prędkość balonu w układzie związanym z Ziemią jest równa: $\vec{V}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ V_B \end{bmatrix}$

Prędkość balastu w układzie związanym z Ziemią: $\vec{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_B \end{bmatrix}$

Równanie ruchu balastu względem Ziemi: $\begin{cases} x = V_0 t \\ y = h + V_B t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

Wyznaczając z drugiego równania czas i podstawiając do pierwszego otrzymujemy: $t = \frac{x}{V_0}$

I podstawiając do drugiego otrzymujemy:
$$y = h + \frac{V_B}{V_0} x - \frac{g}{2V_0^2} x^2$$
Kiedy balast dociera do Ziemi jego współrzędna y jest równa 0, zatem:

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI* w. współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$$0 = h - \frac{V_B}{V_0}x - \frac{g}{2V_0^2}x^2 \rightarrow \frac{g}{2V_0^2}x^2 - \frac{V_B}{V_0}x - h = 0$$

Z powyższego równania możemy wyznaczyć współrzędną *x* zetknięcia się balastu z Ziemią:

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_{12} = \frac{\frac{V_B}{V_0} \pm \sqrt{\left(\frac{V_B}{V_0}\right)^2 + \frac{2gh}{V_B^2}}}{\frac{g}{V_0^2}} = \frac{\frac{V_B}{V_0} \pm \frac{1}{V_0}\sqrt{V_B^2 + 2gh}}{\frac{g}{V_0^2}} = \frac{\left(V_B \pm \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right) \cdot V_0}{g}$$

Dwa rozwiązania odpowiadają oczywiście dwóm punktom przecięcia osi *X* przez parabolę. Wybieramy zgodnie z treścią zadania punkt znajdujący się po dodatniej stronie osi *X*:

$$d = \frac{\left(V_B + \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right) \cdot V_0}{g}$$

Aby wyznaczyć na jakiej wysokości znajdował się balon w momencie zetknięcia się balastu z ziemią, wyznaczymy czas lotu balastu. Jest to czas potrzebny na pokonanie ruchem jednostajnym z prędkością V_0 odległości *d*:

$$t_L = \frac{d}{V_0} = \frac{\left(V_B + \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right)}{g}$$

Po czasie t_L położenie balonu będzie wynosić:

$$y_B = h + V_B \frac{\left(V_B + \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right)}{g}$$

Podstawiając dane otrzymuje:

$$d = \frac{\left(V_B + \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right) \cdot V_0}{g} = \frac{\left(3m/s + \sqrt{(3m/s)^2 + 2 \cdot 10m/s^2 \cdot 8m}\right) \cdot 2m/s}{10m/s^2} = 3.2m$$

$$t_L = \frac{\left(V_B + \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right)}{g} = \frac{\left(3m/s + \sqrt{(3m/s)^2 + 2 \cdot 10m/s^2 \cdot 8m}\right)}{10m/s^2} = 1.6s$$

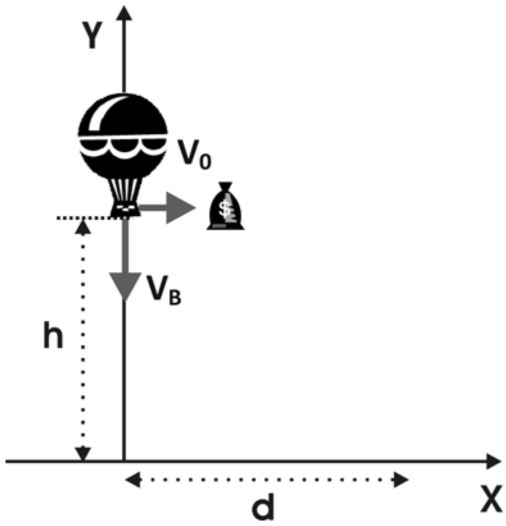
$$y_B = h + V_B \frac{\left(V_B + \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right)}{g} = 8m + \frac{\left(3m/s + \sqrt{(3m/s)^2 + 2 \cdot 10m/s^2 \cdot 8m}\right) \cdot 3m/s}{10m/s^2} = 12.8m$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI* w. jest wspierany przez Europejski Fundusz Społeczny w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Zadanie 2B



Balon opada pionowo w dół ruchem jednostajnym z prędkością $V_B = 3m/s$. Na wysokości $h = 8m$, pilot wyrzucił niewielki przedmiot, nadając mu w układzie związanym z balonem prędkość poziomą $V_0 = 2m/s$. Po wyrzucania przedmiotu balon nie zmienił prędkości ani kierunku lotu. Wyznacz:

1. Odległość *d* w poziomie w jakiej upadnie przedmiot od miejsca lądowania.
2. Wysokość na jakiej znajdował się balon w momencie upadku przedmiotu na ziemię.

Przyjmij wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 10m/s^2$.

Rozwiązanie

Bardzo podobne jak w poprzedniej wersji. Wyjątek to kierunek prędkości balonu.

W układzie związanym z balonem balastowi nadano prędkość: $\vec{V}_0 = \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Prędkość balonu w układzie związanym z Ziemią jest równa: $\vec{V}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -V_B \end{bmatrix}$

Prędkość balastu w układzie związanym z Ziemią: $\vec{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ -V_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ -V_B \end{bmatrix}$

Równanie ruchu balastu względem Ziemi: $\begin{cases} x = V_0 t \\ y = h - V_B t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

Wyznaczając z drugiego równania czas i podstawiając do pierwszego otrzymujemy: $t = \frac{x}{V_0}$

I podstawiając do drugiego otrzymujemy:

$$y = h - \frac{V_B}{V_0} x - \frac{g}{2V_0^2} x^2$$

Kiedy balast dociera do Ziemi jego współrzędna y jest równa 0, zatem:

$$0 = h - \frac{V_B}{V_0} x - \frac{g}{2V_0^2} x^2 \rightarrow \frac{g}{2V_0^2} x^2 + \frac{V_B}{V_0} x - h = 0$$

Z powyższego równania możemy wyznaczyć współrzędną *x* zetknięcia się balastu z Ziemią:

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_{12} = \frac{-\frac{V_B}{V_0} \pm \sqrt{\left(-\frac{V_B}{V_0}\right)^2 + \frac{2gh}{V_B^2}}}{\frac{g}{V_0^2}} = \frac{-\frac{V_B}{V_0} \pm \frac{1}{V_0}\sqrt{V_B^2 + 2gh}}{\frac{g}{V_0^2}} = \frac{\left(-V_B \pm \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right) \cdot V_0}{g}$$

Dwa rozwiązania odpowiadają oczywiście dwóm punktom przecięcia osi *X* przez parabolę. Wybieramy zgodnie z treścią zadania punkt znajdujący się po dodatniej stronie osi *X*:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIWERSYTET WARSZAWSKI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI* w. współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$$d = \frac{\left(-V_B + \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right)\cdot V_0}{g}$$

Aby wyznaczyć na jakiej wysokości znajdował się balon w momencie zetknięcia się balastu z ziemią, wyznaczymy czas lotu balastu. Jest to czas potrzebny na pokonanie ruchem jednostajnym z prędkością V_0 odległości *d*:

$$t_L = \frac{d}{V_0} = \frac{\left(-V_B + \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right)}{g}$$

Po czasie t_L położenie (a zatem wysokość) balonu będzie wynosić:

$$y_B = h - V_B \frac{\left(-V_B + \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right)}{g}$$

Podstawiając dane otrzymuje:

$$d = \frac{\left(-V_B + \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right)\cdot V_0}{g} = \frac{\left(-3m/s + \sqrt{(3m/s)^2 + 2\cdot 10m/s^2 \cdot 8m}\right)\cdot 2m/s}{10m/s^2} = 2m$$

$$t_L = \frac{\left(-V_B + \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right)}{g} = \frac{\left(-3m/s + \sqrt{(3m/s)^2 + 2\cdot 10m/s^2 \cdot 8m}\right)}{10m/s^2} = 1s$$

$$y_B = h - V_B \frac{\left(-V_B + \sqrt{V_B^2 + 2gh}\right)}{g} = 8m - \frac{\left(-3m/s + \sqrt{(3m/s)^2 + 2\cdot 10m/s^2 \cdot 8m}\right)\cdot 3m/s}{10m/s^2} = 4.1m$$

Zadanie 3B

Statek kosmiczny porusza sie względem planety-bazy z prędkością zaledwie *V* = 0.6 c. W kabinie jeden z kosmonautów wbija młotkiem gwóźdź w ścianę w celu powieszenia obrazka swej dziewczyny. W jego układzie odniesienia uderzenie młotka trwa Δt_0 = 0,1 s. Jaka drogę *L* w układzie bazy przebywa w tym czasie ten statek kosmiczny? Prędkość światła w próżni wynosi 3 × 10^8 m/s.

Rozwiązanie:

Związżmy układ odniesienia *U'* ze statkiem kosmicznym a z baza związżmy układ odniesienia *U*. Mamy wówczas:

$$\Delta x = \gamma\left(\Delta x' + v\Delta t'\right)$$

Gdzie $\Delta x = L$ jest drogą, jaka statek kosmiczny przebywa w układzie odniesienia bazy a $\Delta t' = \Delta t_0$. W warunkach zadania mamy $\Delta x' = 0$ więc $\Delta x = L = \gamma \cdot v \cdot \Delta t_0 = \frac{9}{4}\cdot 10^7 m$. $\gamma = \frac{5}{4}$.

Zadanie 3B

Statek kosmiczny porusza sie względem planety-bazy z prędkością zaledwie *V* = 0.8 c. W kabinie jeden z kosmonautów wbija młotkiem gwóźdź w ścianę w celu powieszenia obrazka swej dziewczyny. W jego układzie odniesienia uderzenie młotka trwa Δt_0 = 0,1 s. Jaką drogę *L* w układzie bazy przebywa w tym czasie ten statek kosmiczny? Prędkość światła w próżni wynosi 3 × 10^8 m/s.

Rozwiązanie:

Rozwiązanie jak w przypadku A dla $\gamma = \frac{5}{3}$. W warunkach zadania mamy $\Delta x' = 0$ więc

$$\Delta x = L = \gamma \cdot v \cdot \Delta t_0 = 4 \cdot 10^7 m.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI* w. jest wspierany przez Europejski Fundusz Społeczny w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki