Kinematyka: opis ruchu

Fizyka I (Mechanika)

Wykład II:

- Pojęcia podstawowe
  - ⇒ punkt materialny, układ odniesienia, układ współrzędnych
  - ⇒ tor, prędkość, przyspieszenie
- Ruch jednostajny, ruch jednostajnie przyspieszony
- Ruch harmoniczny i ruch po okręgu
- Efekt Dopplera

Pojęcia podstawowe

Punkt materialny

Ciało, którego rozmiary można w danym zagadnieniu zaniedbać.

Zazwyczaj przyjmujemy, że punkt materialny powinien być dostatecznie mały.

Nie jest to jednak konieczne !

Przykład: “wózek” na torze powietrznym.

Ważne jest, żeby ciało nie miało dodatkowych “stopni swobody”
(np. obroty , drgania własne, stany wzbudzone)

Położenie punktu materialnego całkowicie określa jego “stan”.

$\Rightarrow$ pojęcie punktu materialnego umożliwia prosty opis wielu sytuacji fizycznych.

Naogół przyjmujemy, że punkt materialny obdarzony jest masą.

Pojęcia podstawowe

Ruch

Zmiana położenia ciała względem wybranego układu odniesienia.

Układ odniesienia

Ciało, które wybieramy jako “punkt odniesienia”.

Najczęściej jest nim Ziemia...

Układ odniesienia można też zdefiniować określając jego położenie (lub ruch) względem wybranego ciała lub grupy ciał.

Przykład:

- układ środka masy zderzających się cząstek
- układ związany ze środkiem Galaktyki

Pojęcia podstawowe

Układ współrzędnych

Służy do określenia położenia ciała w danym układzie odniesienia

Położenie możemy zapisać na wiele różnych sposobów:

- układ współrzędnych kartezjańskich:

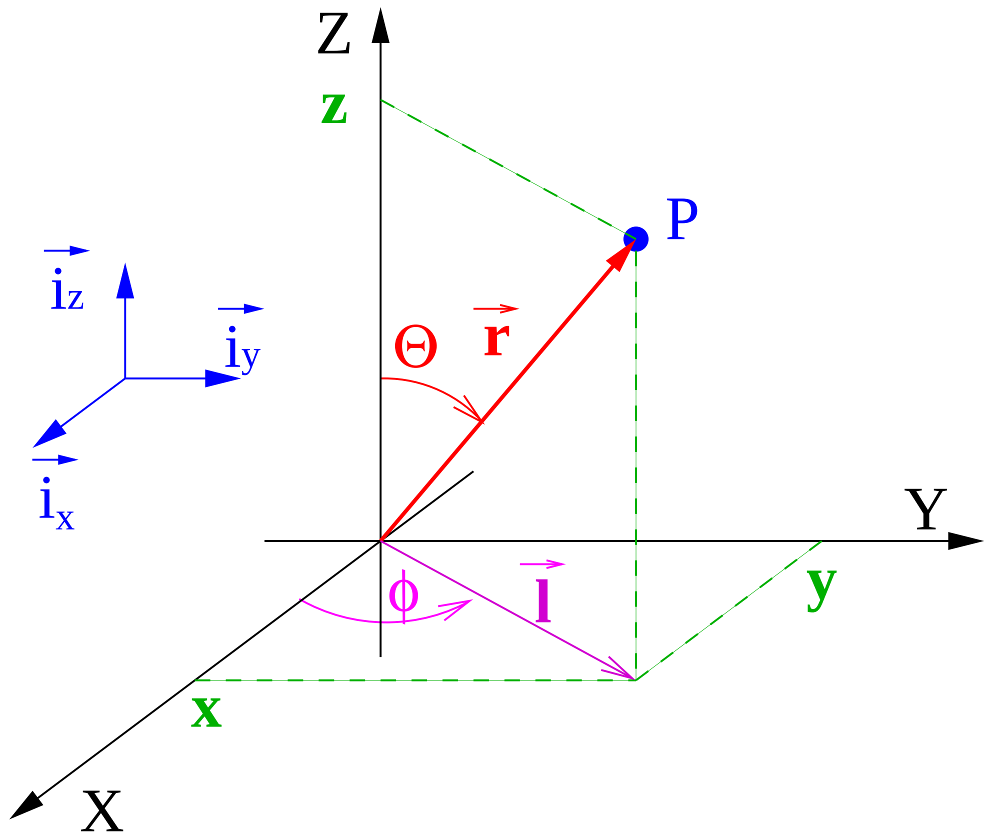
$$\vec{r} = x \cdot \vec{i}_x + y \cdot \vec{i}_y + z \cdot \vec{i}_z \equiv (x, y, z)$$

- układ współrzędnych biegunowych:

$$\vec{r} = (r, \Theta, \phi)$$

- układ współrzędnych walcowych:

$$\vec{r} = (l, \phi, z)$$



Pojęcia podstawowe

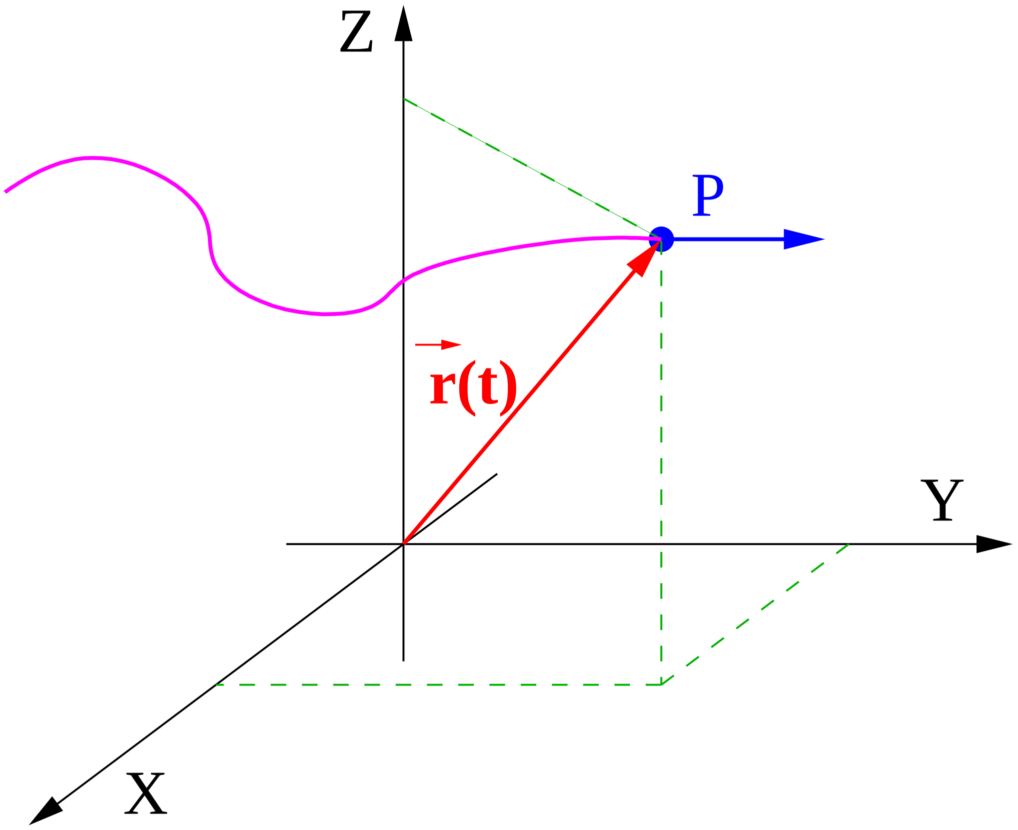
Tor ruchu

Opisuje zmianę położenia ciała w czasie

W ogólnym przypadku -
postać parametryczna toru:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t)) = \vec{r}(t)$$



Wektor położenia ciała $\vec{r}$ (wszystkie jego współrzędne) wyrażamy jako funkcje czasu.

Pojęcia podstawowe

Tor ruchu

W szczególnych przypadkach możliwe jest odwrócenie jednej z zależności:

$$t = F(x)$$

czas wyrażamy jako funkcję współrzędnej

$\Rightarrow$ postać uwikłana toru:

$$y = y(F(x)) = y(x) \quad z = z(x)$$

$$\vec{r} = (x, y(x), z(x))$$

Funkcje

W fizyce bardzo często staramy się opisać zależności pomiędzy różnymi wielkościami w postaci funkcyjnej.

Naogół do oznaczenia funkcji używamy symbolu odpowiadającego danej wielkości fizycznej, np.:

droga - s, wysokość - h, prędkość - v

Postać funkcyjna zależy jednak od wyboru argumentu funkcji !

W przypadku opisu toru:

$y(t)$ i $y(x)$ to dwie różne funkcje !

choć opisują tą samą wielkość fizyczną

Pojęcia podstawowe

Prędkość średnia

W odstępie czasu:

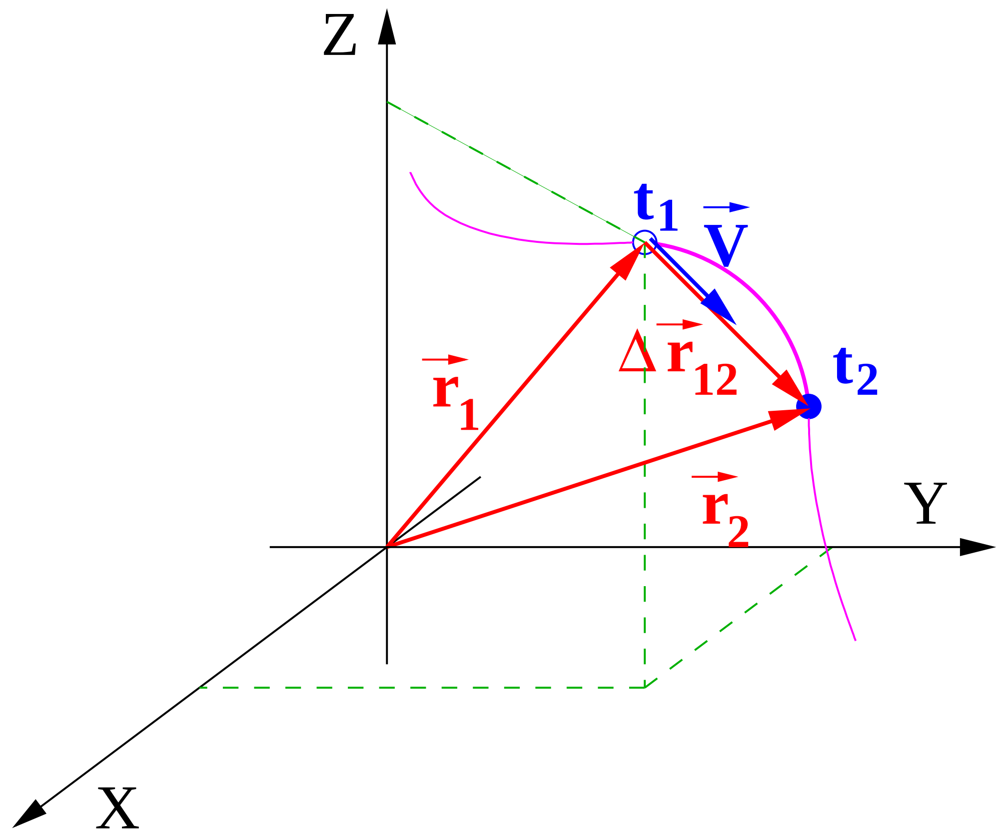
$$\Delta t_{12} \;=\; t_2 - t_1$$

punkt materialny przemieścił się o:

$$\Delta \vec{r}_{12} \;=\; \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

Prędkość średnią definiujemy jako

$$\vec{V}_{12}^{(\text{śr})} \;=\; \frac{\Delta \vec{r}_{12}}{\Delta t_{12}}$$



Pojęcia podstawowe

Prędkość chwilowa

Praktycznie każdy pomiar prędkości musi trwać skończony okres czasu.

Prawie zawsze mierzymy więc prędkość średnią.

Pojęcie prędkości chwilowej wprowadzamy jako graniczną wartość prędkości średniej dla nieskończenie krótkiego czasu pomiaru, $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Matematycznie odpowiada to definicji pochodnej:

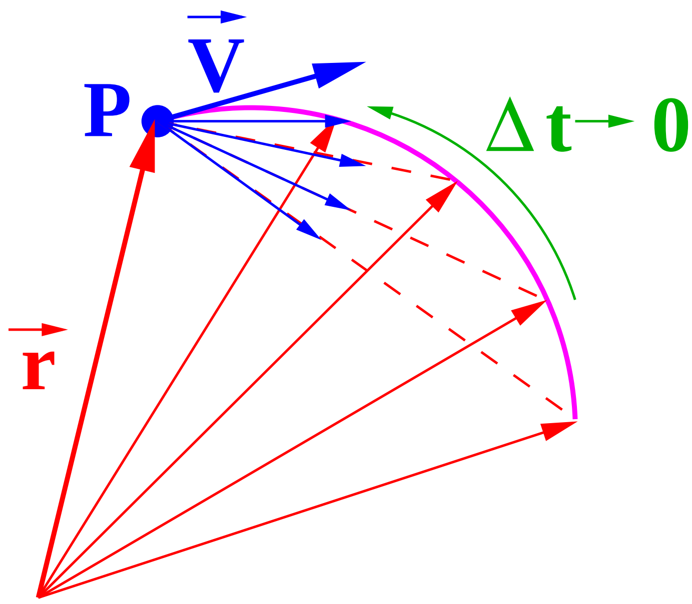
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i}_x + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{i}_y + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{i}_z = v_x \cdot \vec{i}_x + v_y \cdot \vec{i}_y + v_z \cdot \vec{i}_z$$

Pochodna wektora $\equiv$ wektor pochodnych składowych tego wektora

Wartość prędkości: $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Pojęcia podstawowe

Prędkość chwilowa



Wektor prędkości chwilowej
jest **styczny do toru**

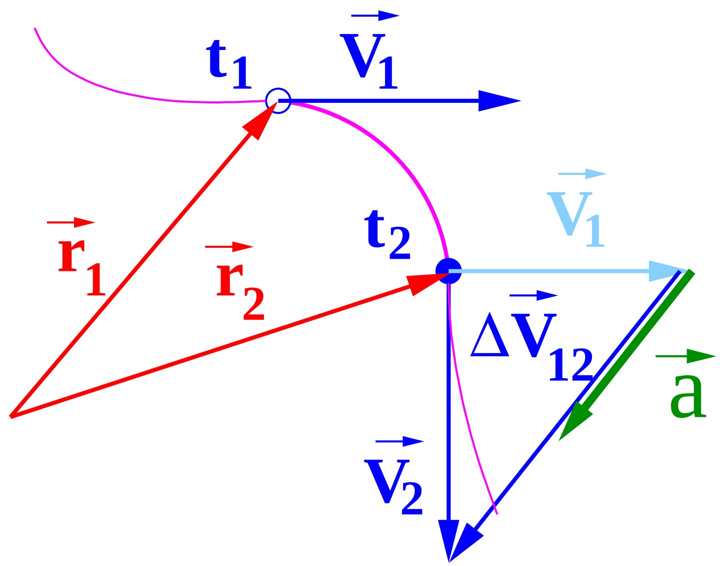
Przyspieszenie średnie

W odstępie czasu: $\Delta t_{12} = t_2 - t_1$

prędkość zmienia się o:

$$\Delta\vec{V}_{12} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{V}(t_2) - \vec{V}(t_1)$$

Przyspieszenie średnie: $\vec{a}_{12}^{(śr)} = \frac{\Delta\vec{V}_{12}}{\Delta t_{12}}$

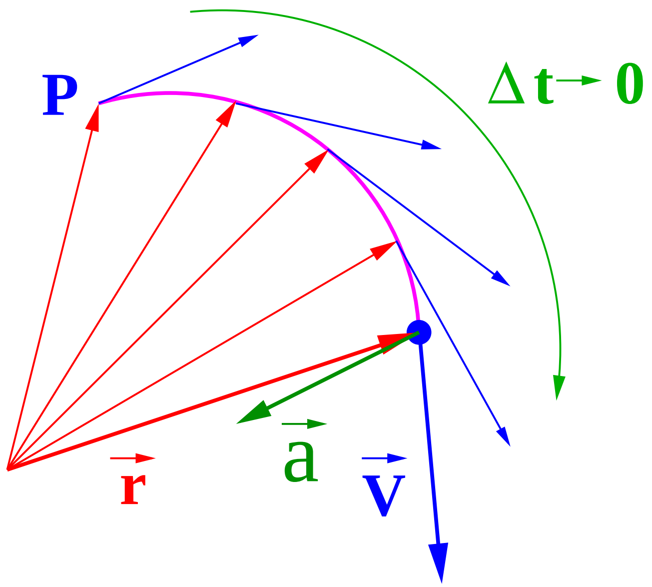


Pojęcia podstawowe

Przyspieszenie chwilowe

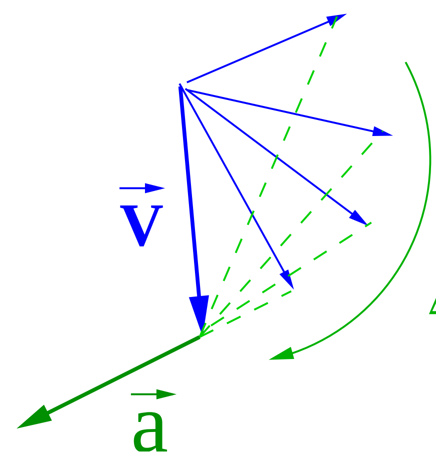
Podobnie jak w przypadku prędkości - graniczna wartość dla nieskończenie krótkiego pomiaru:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}}$$



Przyspieszenie chwilowe jest pochodną po czasie prędkości chwilowej:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt} \cdot \vec{i}_x + \frac{dV_y}{dt} \cdot \vec{i}_y + \frac{dV_z}{dt} \cdot \vec{i}_z$$
$$= a_x \cdot \vec{i}_x + a_y \cdot \vec{i}_y + a_z \cdot \vec{i}_z$$



Opisuje “tempo” zmian prędkości...

Klasyfikacja ruchów

Ze względu na tor

wybrane przypadki szczególne

- prostoliniowy, odbywający się wzdłuż lini prostej
  Zawsze możemy tak wybrać układ współrzędnych aby

$$y(t) = z(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{i}_x \cdot x(t)$$

- płaski, odbywający się w ustalonej płaszczyźnie

$$z(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{i}_x \cdot x(t) \; + \; \vec{i}_y \cdot y(t)$$

- po okręgu

Ze względu na przyspieszenie

- jednostajny $\Rightarrow$ wartość prędkości pozostaje stała: $|\vec{V}|$ = const
- jednostajnie przyspieszony $\Rightarrow$ przyspieszenie jest stałe: $\vec{a}$ = const

Ruch jednostajny prostoliniowy

Najprostszy przypadek ruchu:

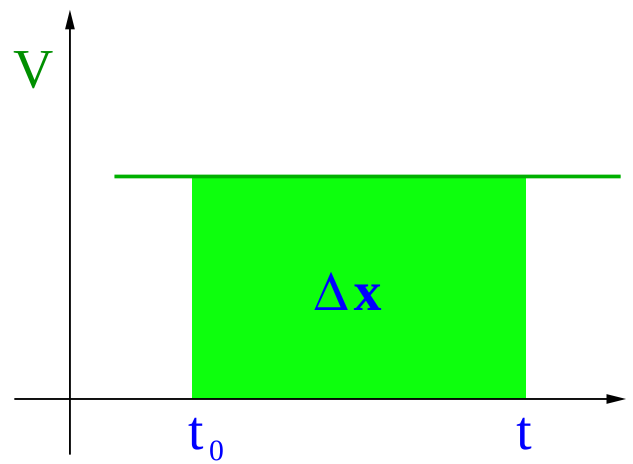
- Jednostajny: $|\vec{V}|$ = const
- Prostoliniowy: $\frac{\vec{V}}{V}$ = const

$\Big\} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = 0$

Przyjmując, że ruch odbywa się wzdłuż osi X:

$$V = \frac{dx}{dt} = \text{const}$$

$$\Rightarrow \quad x = x_0 + V \cdot (t - t_0) \qquad\qquad x_0 = x(t_0)$$



Położenie (przebyta droga) jest liniową funkcją czasu.

Drogi przebyte w równych odcinkach czasu są sobie równe.

Ruch prostoliniowy

Zależność drogi od prędkości

Przypadek ogólny: znamy prędkość $V(t)$
czy możemy wyznaczyć zależność położenia od czasu ?

Możemy sumować przesunięcia dx po krótkich przedziałach czasu dt.

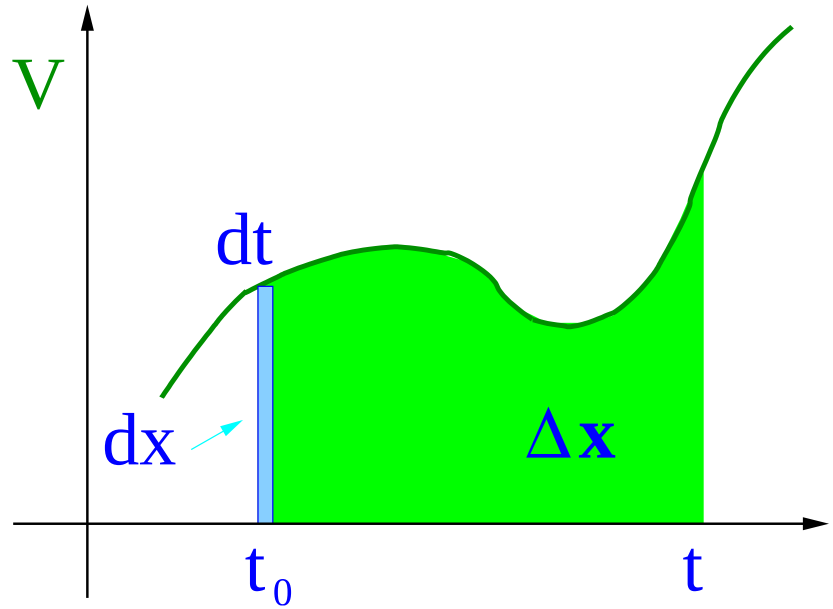
Przesunięcie ciała w czasie $\Delta t = t - t_0$:

$$\Delta x = \sum_{dt} dx = \sum_{dt} V\, dt$$

Przechodząc do granicy $dt \rightarrow 0$:

$$\Delta x = \int_{t_0}^{t} V\, dt$$

całka oznaczona



Interpretacja graficzna: pole pod krzywą

Ruch jednostajnie przyspieszony

Jednostajnie przyspieszony: $\vec{a}$ = const

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\vec{V} = \vec{a}\; dt$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V} = \vec{V}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}\; dt$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0) \qquad\qquad \vec{V}_0 = \vec{V}(t_0)$$

Prostoliniowy

Ruch jest prostoliniowy: $\frac{\vec{V}}{V}$ = const $\quad \Leftrightarrow \quad$ $\vec{V} \,||\, \vec{a}$ = const

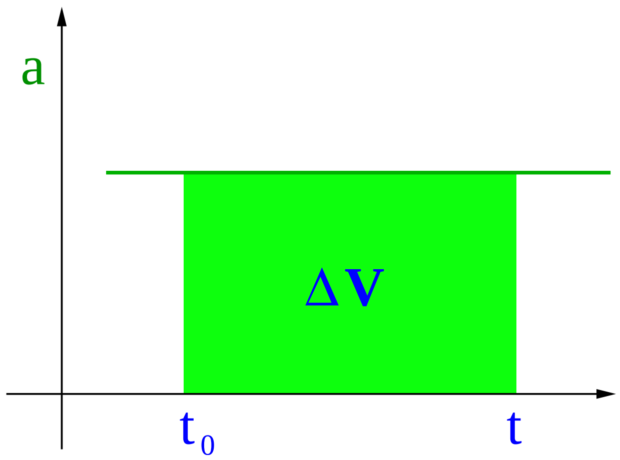
Przyspieszenie musi mieć kierunek zgodny z kierunkiem prędkości

Ruch jednostajnie przyspieszony

Prostoliniowy (⇒ jednowymiarowy)

Prędkość jest liniową funkcją czasu:

$$V = V_0 + \int_{t_0}^{t} a\, dt = V_0 + a \cdot (t - t_0)$$

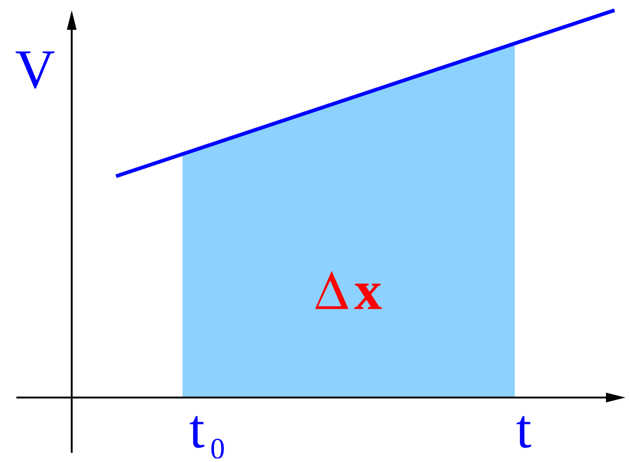


Położenie jest kwadratową funkcją czasu:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} V\, dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} [V_0 + a \cdot (t - t_0)]\; dt$$

$$= x_0 + V_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2$$

$$= x_0 + \frac{1}{2}(V + V_0) \cdot (t - t_0)$$



Ruch jednostajnie przyspieszony

Przyjmijmy, że w chwili $t_0 = 0$ ciało spoczywa: $V_0 = V(t_0) = 0$.

Mierzymy drogę jaką ciało przebywa w równych przedziałach czasu:

$$\begin{aligned} \Delta t_n &= t_n - t_{n-1} = \Delta t \\ \Rightarrow \quad t_n &= n \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Przebyta droga:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}\, a \cdot t^2 \\ \Delta x_n &= x(t_n) - x(t_{n-1}) = \frac{1}{2}\, a \cdot \left(t_n^2 - t_{n-1}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\, a \cdot \Delta t^2 \left(n^2 - (n-1)^2\right) = \frac{1}{2}\, a \cdot \Delta t^2 \cdot (2n-1) \end{aligned}$$

Drogi w kolejnych odcinkach czasu mają się do siebie jak kolejne liczby nieparzyste:

$$x_1 : x_2 : x_3 : \ldots = 1 : 3 : 5 : 7 : \ldots$$

Ruch jednostajnie przyspieszony

W ogólnym przypadku ruch jednostajnie przyspieszony nie jest prostoliniowy.

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0) \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{V}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}\,\vec{a} \cdot (t - t_0)^2 \end{aligned}$$

Ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie przechodzącej przez $\vec{r}_0$ i wyznaczonej przez kierunki wektorów $\vec{V}_0$ i $\vec{a}$.

Możemy wybrać układ współrzędnych tak aby:

$$\vec{i}_x \perp \vec{a} \qquad \text{oraz} \qquad \vec{i}_y \,||\, \vec{a}$$

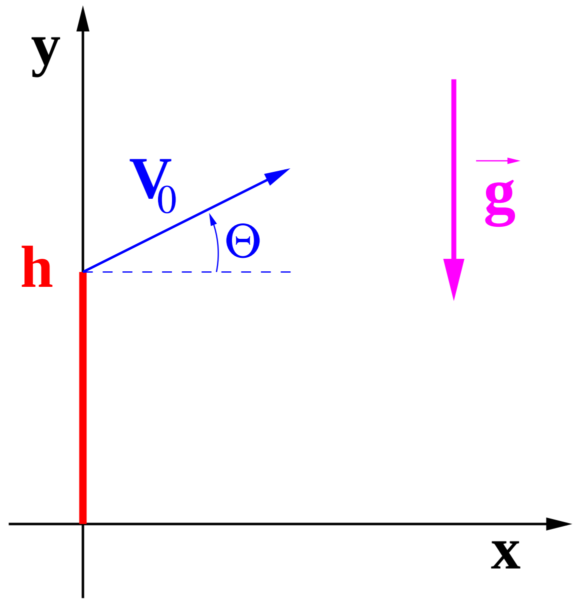
$\Rightarrow$ ruch jednostajny (X) $\oplus$ ruch jednostajnie przyspieszony (Y) $\oplus$ spoczynek (Z):

$$\begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= a \\ a_z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} V_x &= V_{x,0} = const \\ V_y &= V_{y,0} + a\,t \\ V_z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= x_0 + V_{x,0} \cdot (t - t_0) \\ y &= y_0 + V_{y,0} \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}\,a \cdot (t - t_0)^2 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Ruch jednostajnie przyspieszony

Ruch w polu grawitacyjnym

Ruch ciala w jednorodnym polu grawitacyjnym:



$$\vec{a} = \vec{g} = (0, -g, 0)$$

(wygodny wybór układu współrzędnych)

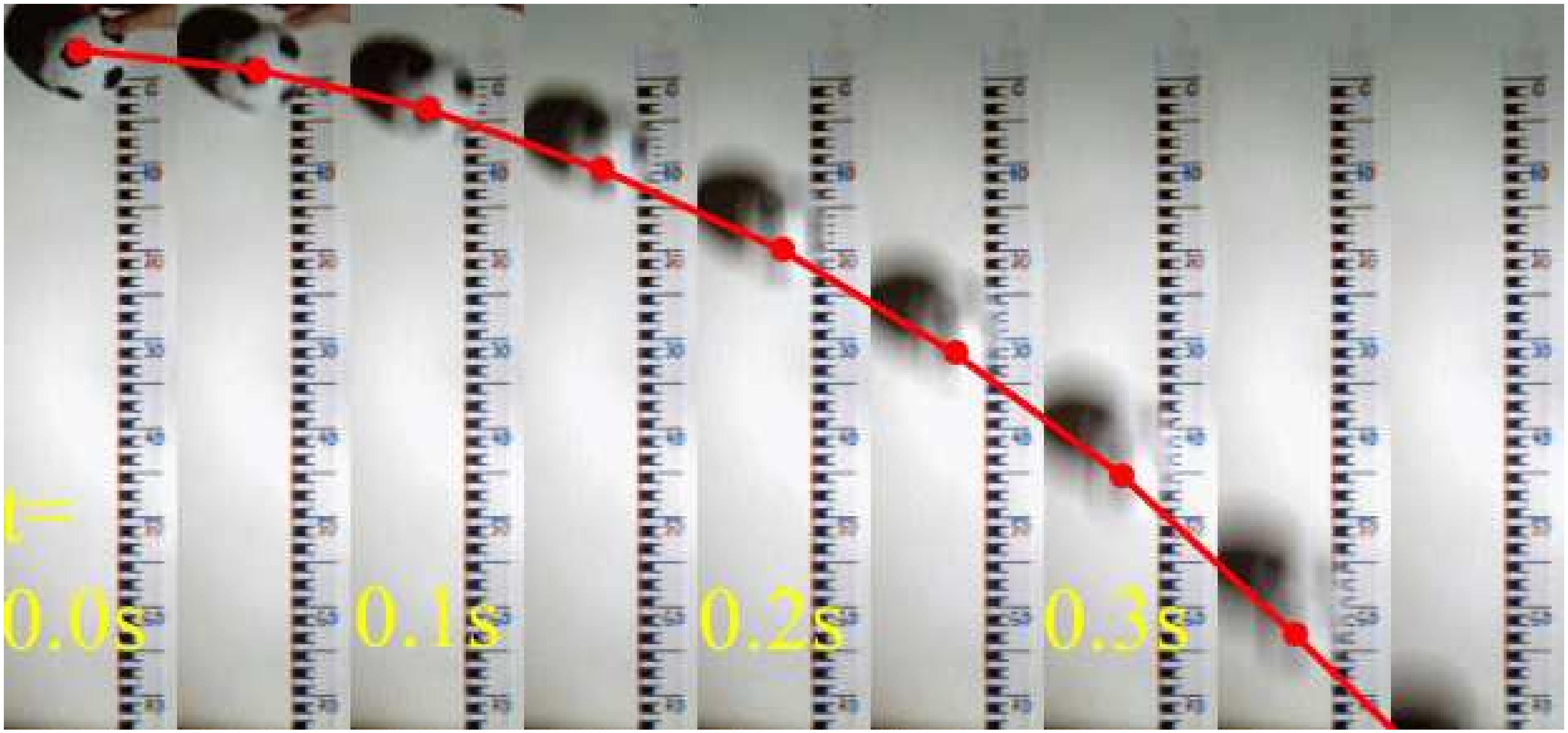
Pole grawitacyjne Ziemi możemy przyjąć za jednorodne, jeśli badamy ruch na odległościach $|\Delta\vec{r}| \ll R_Z$

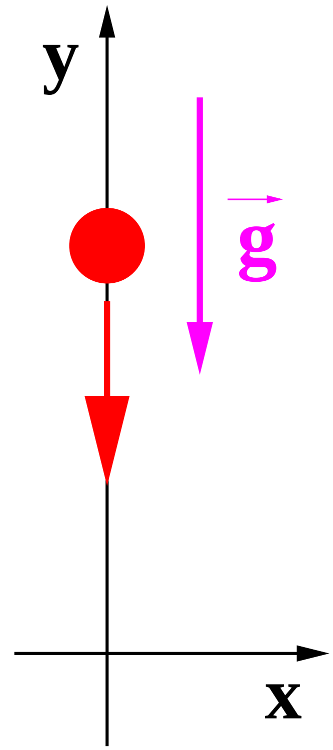
Rodzaje ruchu:

- spadek swobodny: $V_0 = 0$ (ruch prostoliniowy)
- rzut pionowy: $\theta = \pm\pi/2$ (ruch prostoliniowy)
- rzut poziomy: $\theta = 0$
- rzut ukośny: $\theta \neq 0, \pi/2, \ldots$

Ruch jednostajnie przyspieszony

Spadek swobodny





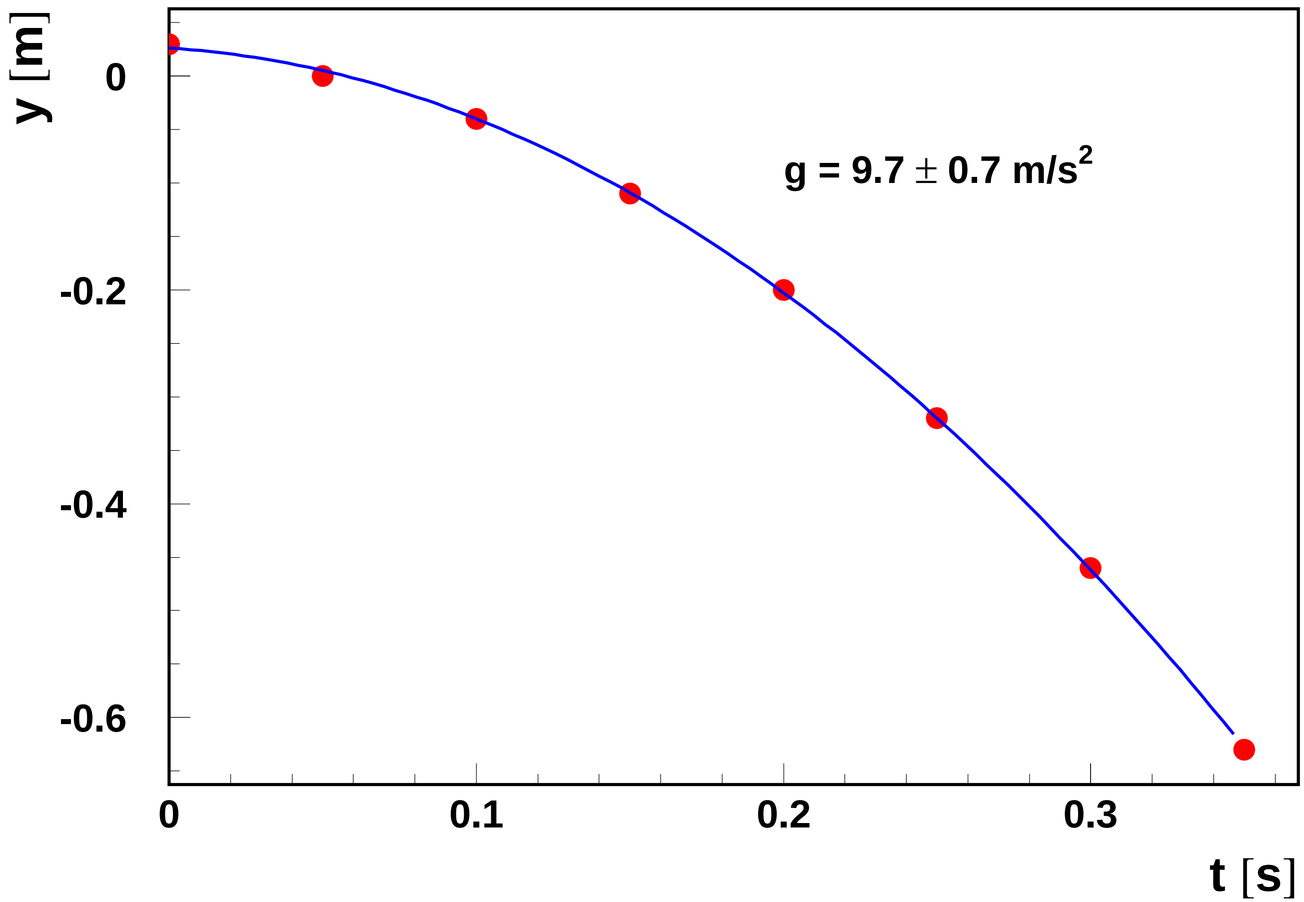
Położenie zależy kwadratowo od czasu:

$$y = h - \frac{g}{2} \cdot t^2 \qquad \text{zakładając: } y(0) = h,\ V_y(0) = 0$$

Ruch jednostajnie przyspieszony

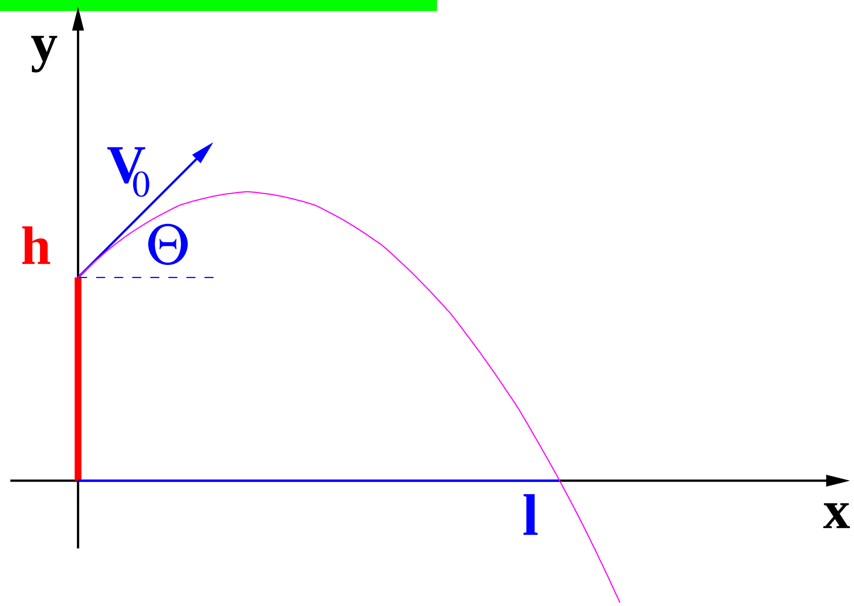
Spadek swobodny

Wyniki “domowych” pomiarów:



Ruch jednostajnie przyspieszony

Ruch w polu grawitacyjnym



Niezależność ruchów: $t_0 = 0,\ x_0 = 0,\ y_0 = h$

$$x = V_{x,0} \cdot t = V_0 \cos\theta \cdot t$$

$\Rightarrow$ ruch w poziomie zależy tylko od $V_{x,0}$

$$\begin{aligned} y &= h + V_{y,0} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \\ &= h + V_0 \sin\theta \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \end{aligned}$$

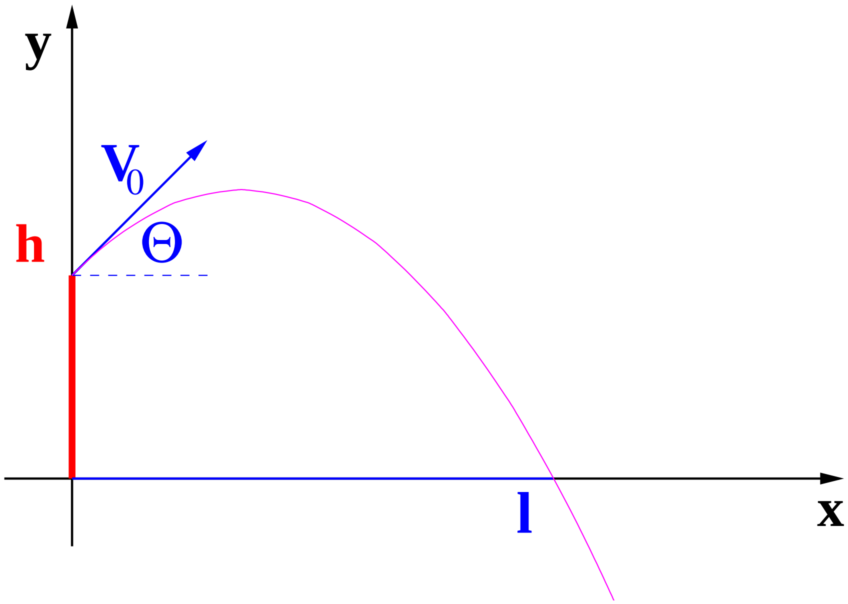
$\Rightarrow$ ruch w pionie zależy tylko od $V_{y,0}$

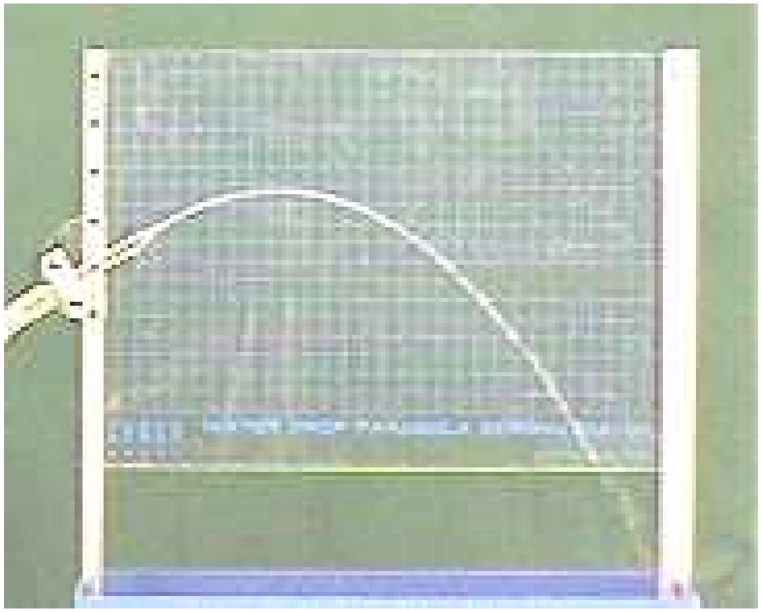
Rzut poziomy $\theta = 0 \Rightarrow V_{y,0} \Rightarrow$ czas spadania nie zależy od V_0: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Dwa ciała o tym samym $V_{x,0}^{(1)} = V_{x,0}^{(2)} \Rightarrow$ taki sam ruch w poziomie: $x^{(1)}(t) = x^{(2)}(t)$

Ruch jednostajnie przyspieszony

Ruch w polu grawitacyjnym





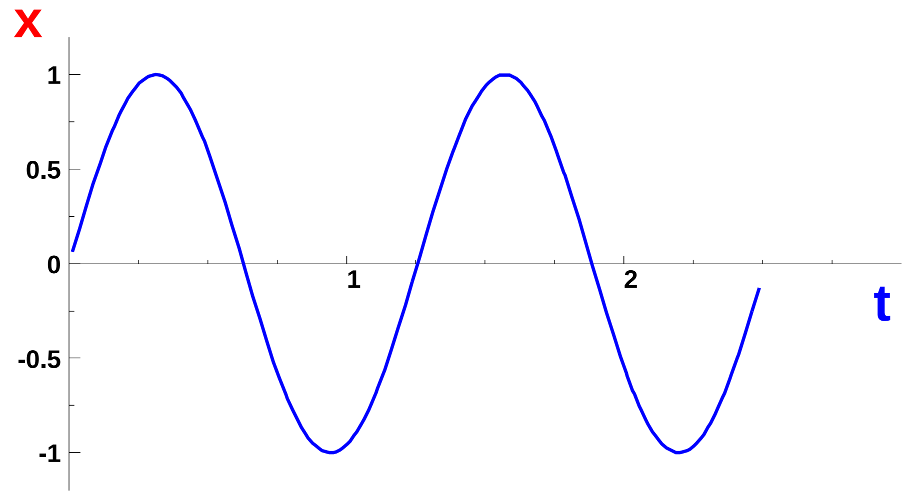
Tor w rzucie ukośnym: $\Rightarrow \; y = h + x \cdot \tan\theta - x^2 \cdot \dfrac{g}{2V_0^2 \cos^2\theta} \Rightarrow$ parabola

Zasięg dla h=0 $\Rightarrow \; l = \dfrac{V_0^2}{g}\sin(2\theta) \Rightarrow$ największy zasięg dla $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ (45°)

Ruch harmoniczny

Szczególny przykład ruchu drgającego:

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$



Parametry

- amplituda A
- częstość kołowa ω

  okres drgań $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- faza początkowa ϕ

Prędkość: $V = \frac{dx}{dt} = \omega \, A \cdot \cos(\omega t + \phi)$

Przyspieszenie: $a = \frac{dV}{dt} = -\omega^2 \, A \cdot \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 \cdot x$

Ruch harmoniczny

Równanie oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \text{(ruch w jednym wymiarze)}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2 \vec{r} \quad \text{(postać ogólna)}$$

Równanie oscylatora dobrze opisuje zachowanie bardzo wielu układów fizycznych:

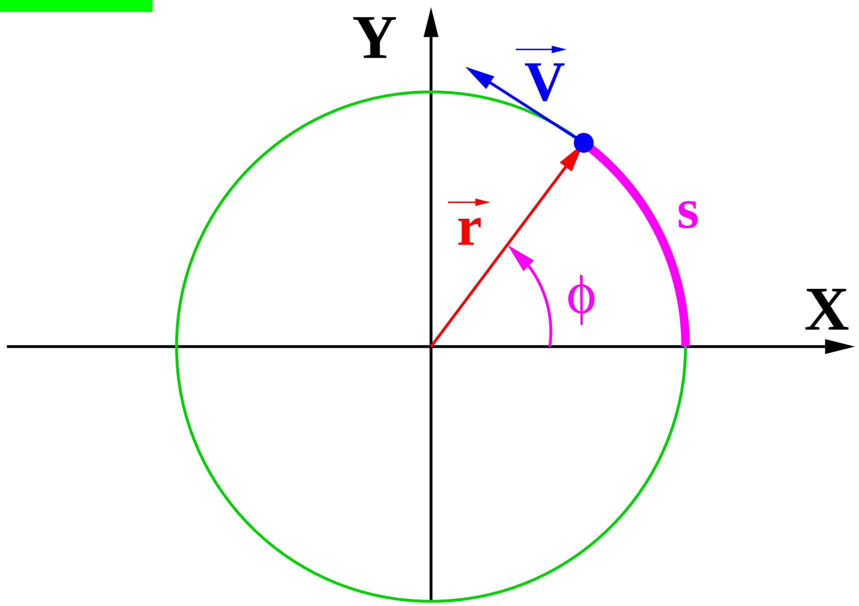
- ciężarek na sprężynie
- wahadło matematyczne (dla małych wychyleń)
- kamerton, struna, itp...

Równanie oscylatora harmonicznego jest przykładem równania różniczkowego.

Nasza wiedza nt. ruchu ciała przedstawiana jest często w postaci równan różniczkowych (równań ruchu). Aby znaleźć opis ruchu ciała trzeba te równania rozwiązać.

Najczęsciej są to równania typu: $\vec{a} = F(\vec{x}, \vec{v}, t)$

Ruch po okręgu



Położenie ciała może być opisane jedną zmienną:

- kąt w płaszczyźnie XY - ϕ
- długość łuku okręgu - s = $r \cdot \phi$

Prędkość:

$$V = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\phi}{dt} = r\,\omega$$

prędkość kątowa $\omega = \frac{d\phi}{dt}$

Przyspieszenie kątowe: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$

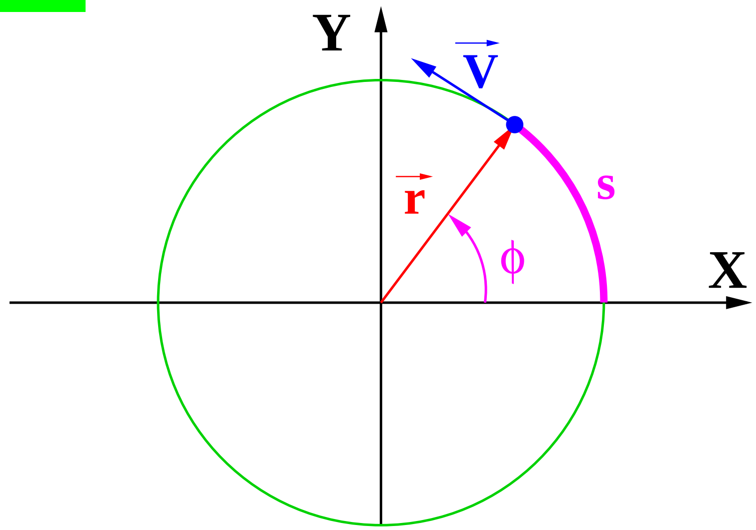
Przyspieszenie: $a_s = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = r\alpha$ $\Leftarrow$ przyspieszenie styczne: $\vec{a}_s \parallel \vec{V}$

Ruch jednostajny po okręgu: $\alpha = 0$ $\Rightarrow$ ω = const $\Rightarrow$ V = const $\Rightarrow$ a_s = 0

ale $\vec{V} \neq$ const $\Rightarrow$ $\vec{a} \neq 0$!?

Ruch po okręgu

Ruch jednostajny po okręgu możemy rozpatrywać jako złożeniem dwóch niezależnych ruchów harmonicznych (różnica faz $\Delta\phi = \pm\frac{\pi}{2}$):



$$x = r \cdot \cos(\omega \cdot t) = r \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$$
$$y = r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Składowe przyspieszenia (policzyliśmy już dla ruchu harmonicznego):

$$\begin{cases} a_x = -\omega^2 \cdot x \\ a_y = -\omega^2 \cdot y \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{r} \Rightarrow a_n = \omega^2 \cdot r = \frac{V^2}{r}$$

Przyspieszenie to jest nazywane przyspieszeniem dośrodkowym lub przyspieszeniem normalnym (prostopadłym do kierunku ruchu).

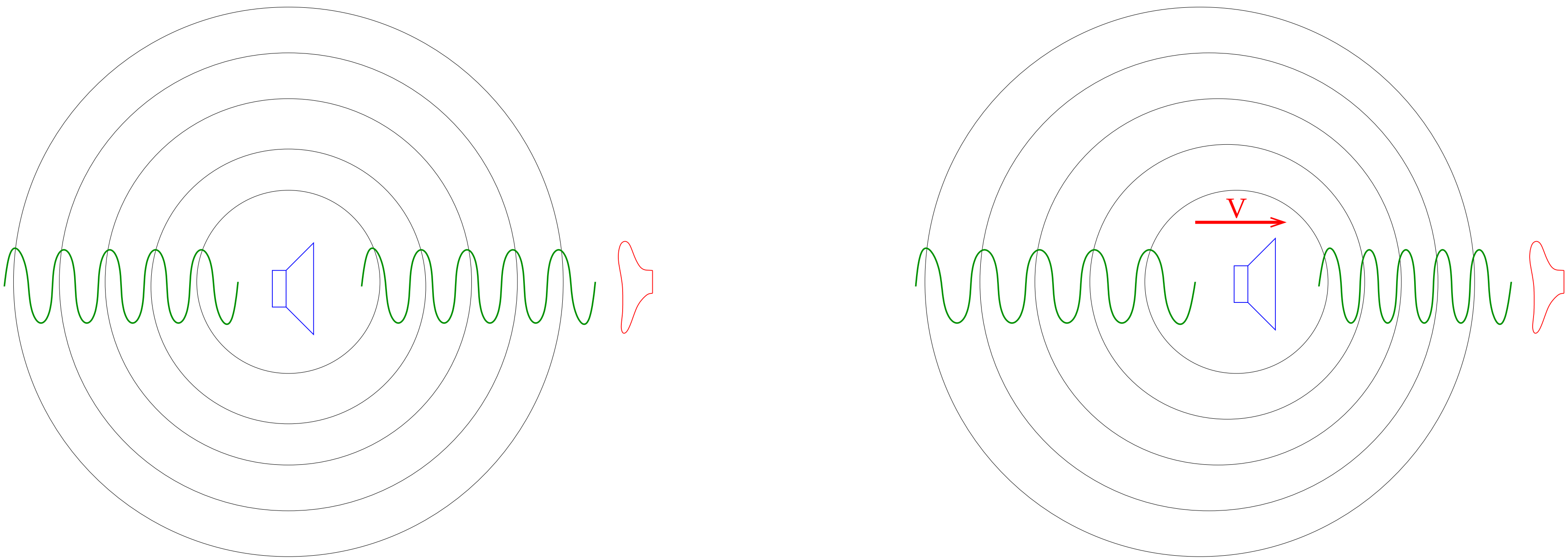
Gdy ruch po okręgu nie jest jednostajny pojawia się też składowa styczna: $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_s$

Ciekawostka:

Ruch harmoniczny można przedstawić jako złożenie dwóch ruchów po okręgu...

Efekt Dopplera

W przypadku fal dźwiękowych znamy z codziennego doświadczenia...



Jeśli źródło dźwięku jest nieruchome względem obserwatora, obserwator słyszy dźwięk o niezmienionej częstości.

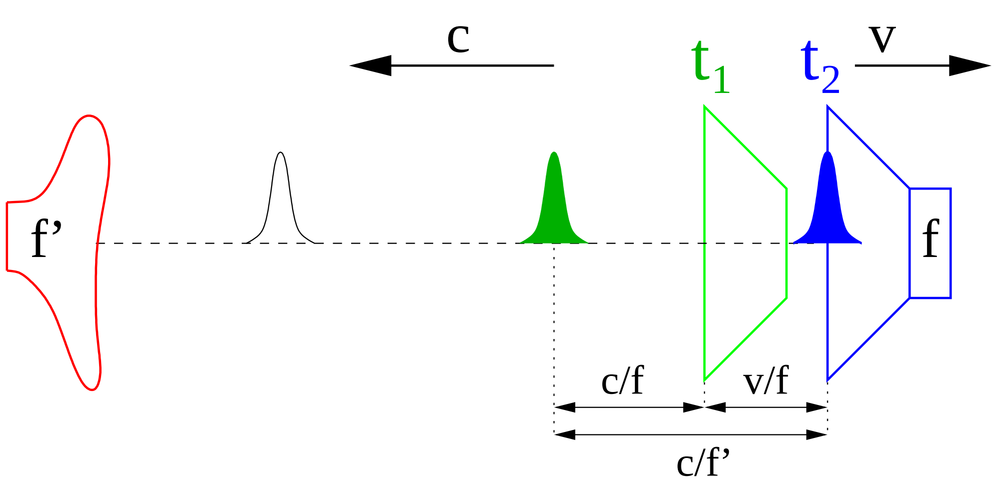
Jeśli źródło dźwięku porusza się względem obserwatora, obserwator słyszy dźwięk o wyższej lub niższej częstości

Efekt Dopplera

Ruchome źródło

źródło dźwięku o częstości f poruszające się z prędkością v względem ośrodka w którym prędkość dźwięku wynosi c.

Dla uproszczenia: krótkie impulsy wysyłane co $\Delta t = 1/f$:



t_1 - wysłanie pierwszego impulsu

t_2 - wysłanie drugiego impulsu

odległość między impulsami:

$$\frac{c}{f'} = \lambda' = \underbrace{\frac{c}{f}}_{\text{ruch impulsu}} + \underbrace{\frac{v}{f}}_{\text{ruch źródła}}$$

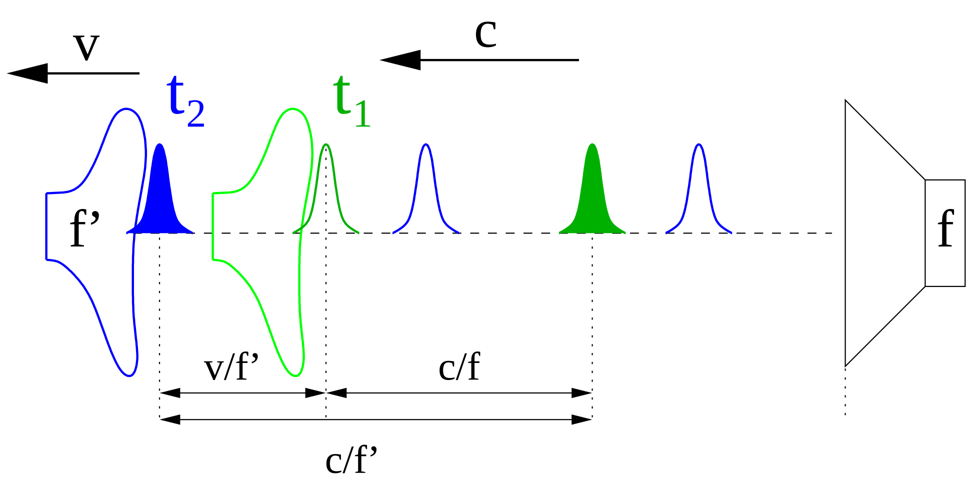
Częstość dźwięku i długość fali mierzona przez obserwatora nieruchomego względem ośrodka:

$$f' = \frac{f}{1 + \frac{v}{c}} \qquad \lambda' = \lambda \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

Efekt Dopplera

Ruchomy obserwator

obserwator porusza się z prędkością v względem ośrodka i źródła dźwięku



aby dogonić obserwatora impuls musi pokonać odległość

$$\frac{c}{f'} = \underbrace{\frac{c}{f}}_{\text{odległość początkowa}} + \underbrace{\frac{v}{f'}}_{\text{ruch obserwatora}}$$

Mierzona częstość:

$$f' = f\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

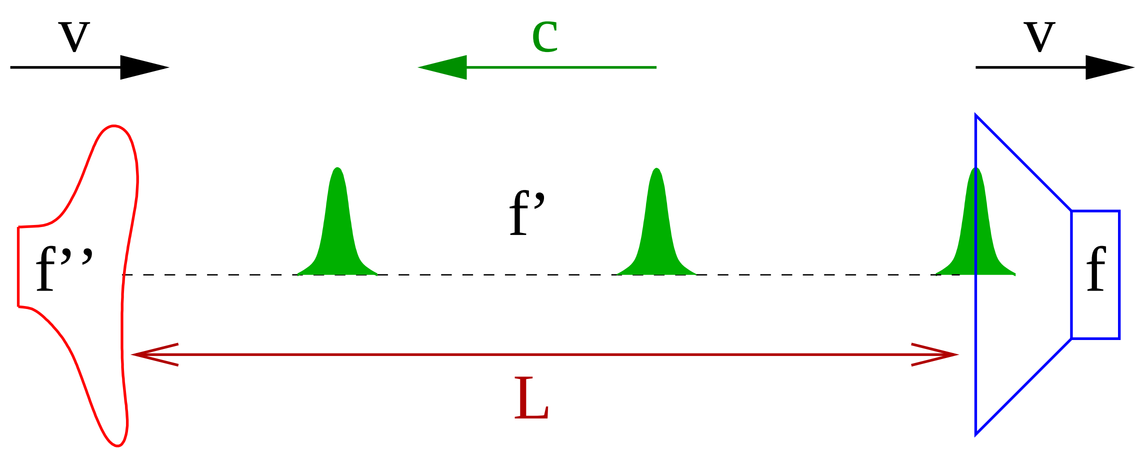
W klasycznym efekcie Dopplera zmiana częstości zależy nie tylko od względnej prędkości źródła i obserwatora ale i ruchu względem ośrodka.

Efekt Dopplera

Ruch ośrodka

Przyjmijmy, że źródło dźwięku i obserwator są względem siebie w spoczynku.

Niech ich prędkość względem ośrodka wynosi v



Częstość mierzona przez obserwatora jest wynikiem złożenia dwóch efektów Dopplera:

$$f'' = f' \left(1 + \frac{v}{c}\right) \; = \; \frac{f}{1 + \frac{v}{c}} \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right) = f$$

Częstość się nie zmienia, ale zmienia się czas miedzy wysłaniem a rejestrają impulsu:

$$\delta t = t_i'' - t_i = \frac{L}{c+v} = \frac{L}{c} \cdot \frac{c}{c+v} = \frac{\delta t_0}{1 + \frac{v}{c}} \qquad \Rightarrow \quad \text{przesunięcie w fazie}$$

Efekt Dopplera

Przypadek ogólny

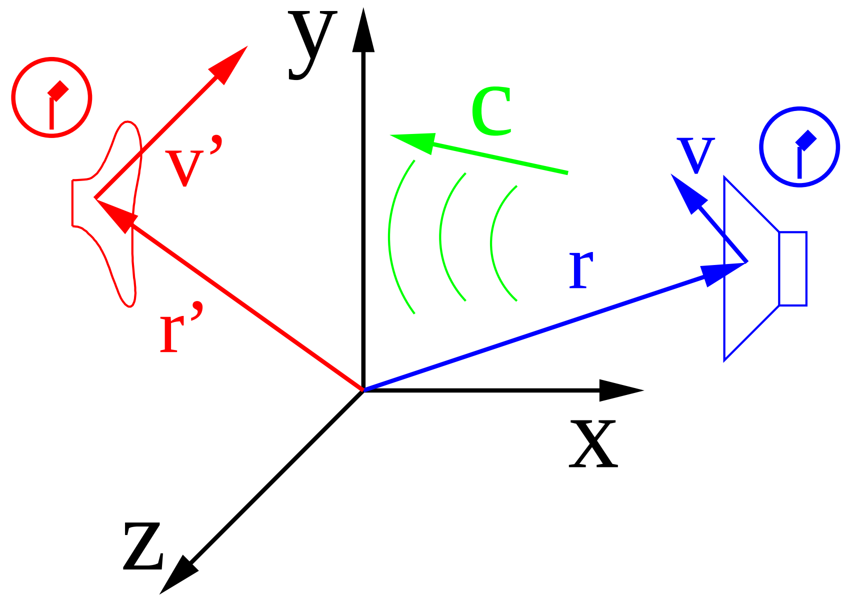
Zarówno źródło jak i obserwator poruszają się względem ośrodka.

Jeśli znamy ruch źródła i obserwatora w układzie związanym z ośrodkiem:

$$\vec{r}(t) \quad \text{i} \quad \vec{r}'(t)$$

To możemy wyznaczyć czas t' w jakim sygnał wyemitowany w chwili t dotrze do obserwatora. Zadany jest on przez warunek:

$$\vec{r}'(t') - \vec{r}(t) = c\,(t' - t)$$



Jeśli równanie to można jednoznacznie rozwiązać to efekt Dopplera daje się wyrazić bardzo prostą zależnością:

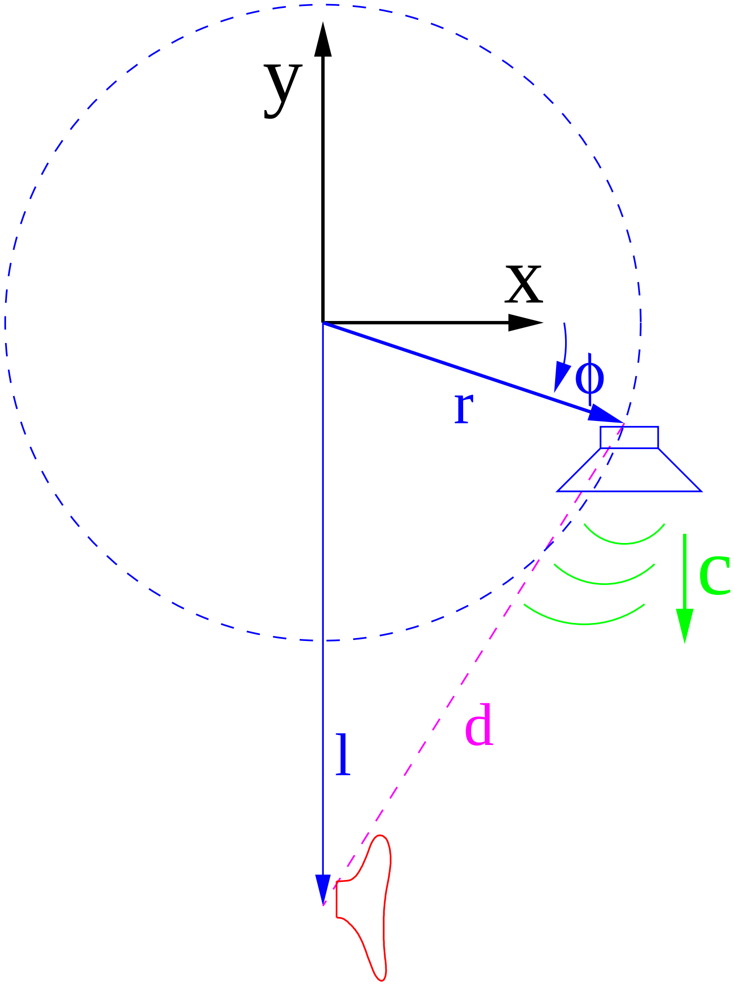
$$\frac{f'}{f} = \frac{\frac{1}{\Delta t'}}{\frac{1}{\Delta t}} = \frac{\Delta t}{\Delta t'} \Rightarrow f' = f \cdot \left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1}$$

Efekt Dopplera

Przykład

Głośnik wirujący po okręgu, w płaszczyźnie obserwatora

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= r\cos\omega t \\
\vec{y}(t) &= r\sin\omega t \\
x' &\equiv 0 \\
y' &\equiv -l
\end{aligned}$$



Droga sygnału wyemitowanego w czasie t:

$$d = c\,(t' - t) = \sqrt{(l + r\sin\omega t)^2 + r^2\cos^2\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad t' = t + \frac{l}{c}\sqrt{1 + \frac{2r}{l}\sin\omega t + \frac{r^2}{l^2}}$$

Dla $l \gg r$:

$$t' \approx t + \frac{r}{c}\sin\omega t \quad \Rightarrow \quad f' \approx f\left(1 - \frac{r\omega}{c}\cos\omega t\right)$$

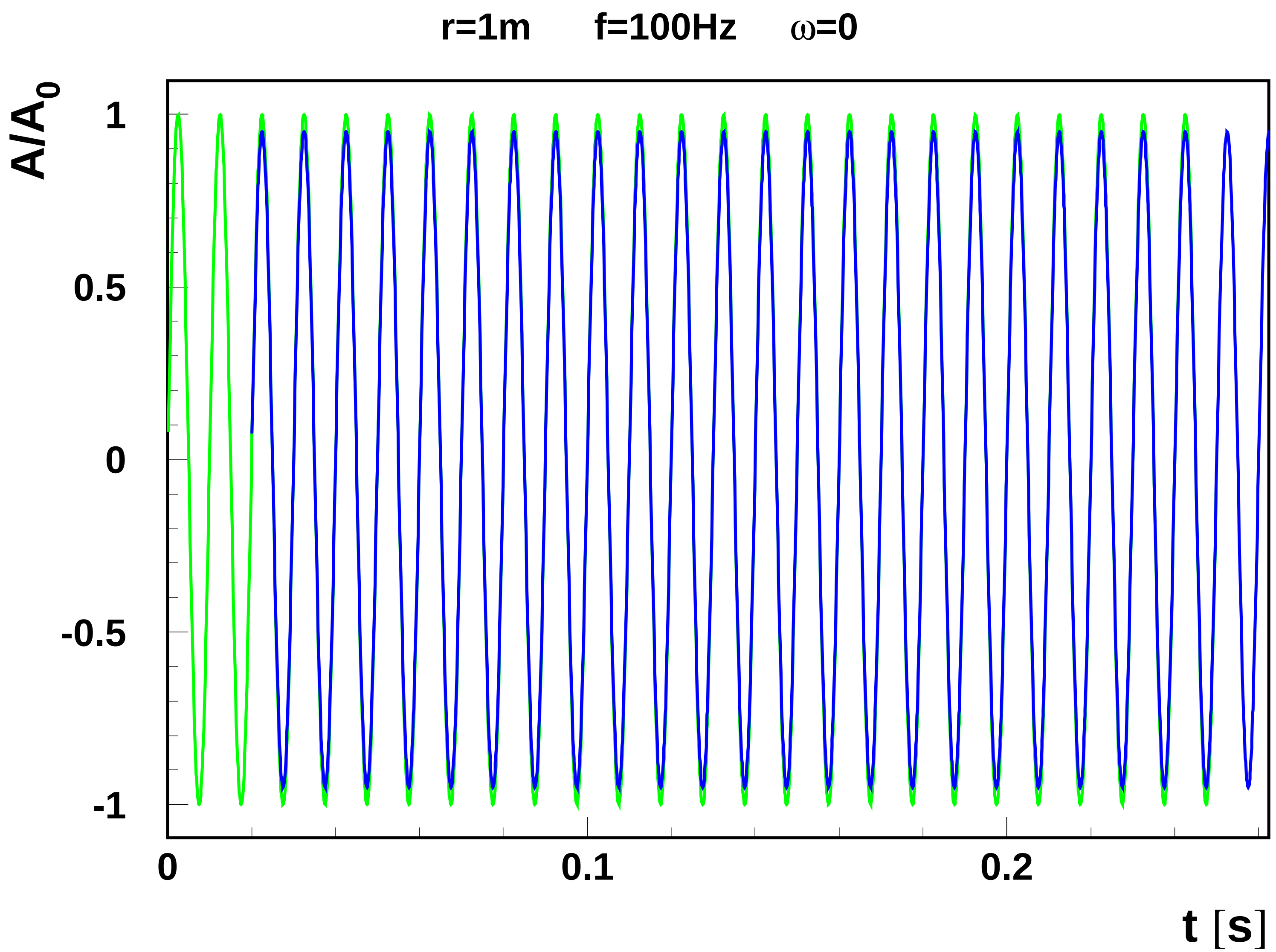
Efekt Dopplera

Przykład

Głośnik
nieruchomy

źródło

obserwator



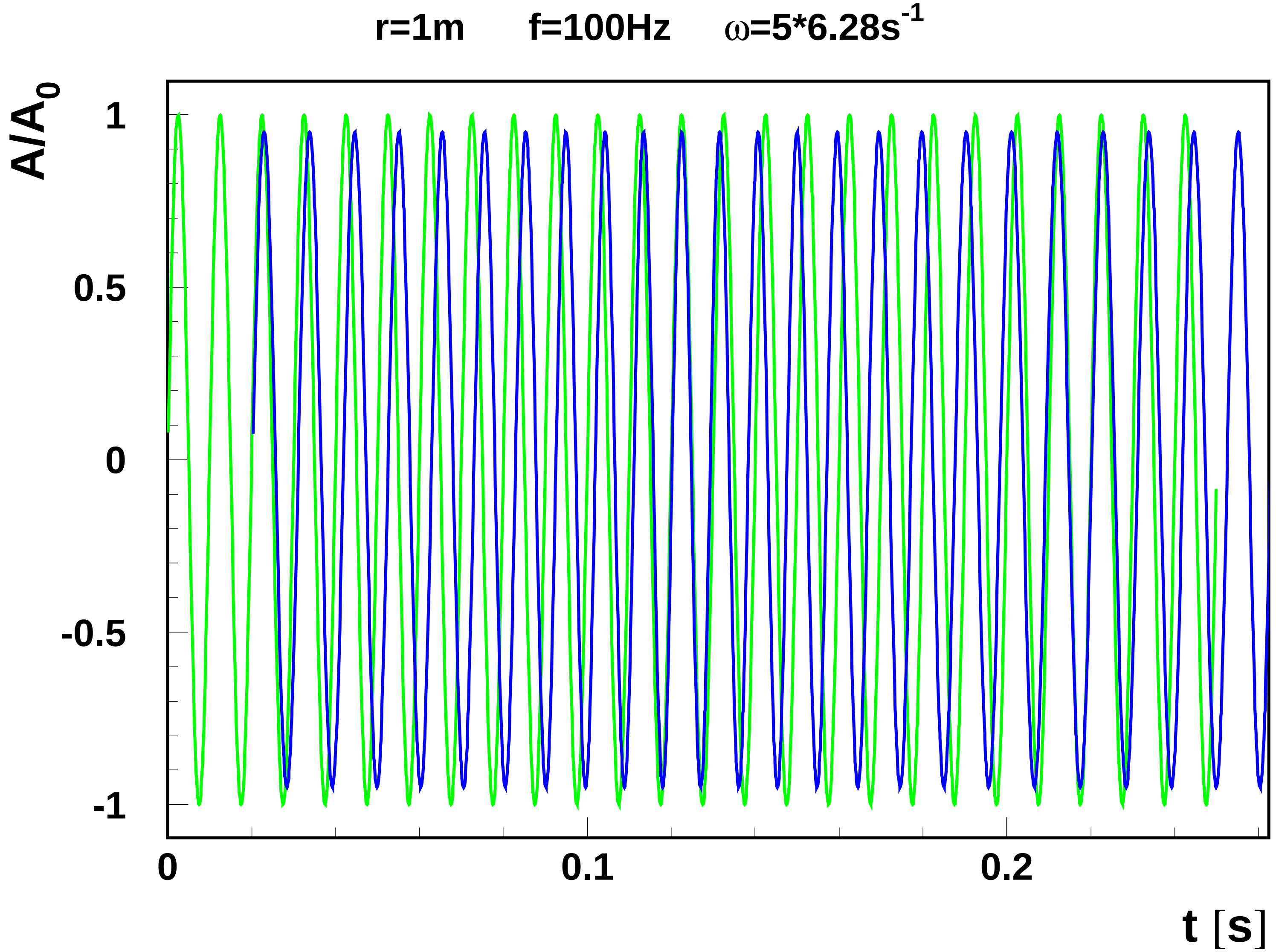
Efekt Dopplera

Przykład

Głośnik wirujący

źródło

obserwator



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt **Fizyka wobec wyzwań XXI w.**

współfinansowany ze środków Unii Europejskiej

w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego