# Kinematyka relatywistyczna

## Fizyka I (Mechanika)

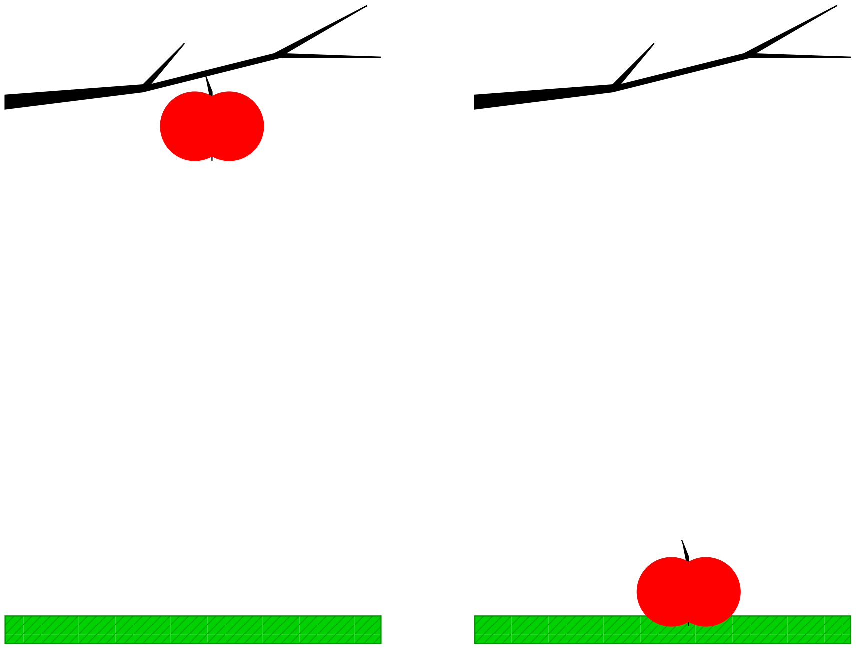
### Wykład III:

- Zdarzenia i czasoprzestrzeń
- Transformacja Galileusza
- Prędkość światła
- Postulaty Einsteina
- Transformacja Lorentza

# Zdarzenia i czasoprzestrzeń

Doświadczenie to (najczęściej) pomiar jakiejś wielkości fizycznej
lub (rzadziej) obserwacja jakiegoś zjawiska (np. zmiany stanu skupienia).

Oba przypadki możemy sprowadzić do rejestracji jakieś zdarzeń.



Przykład:
pomiar przyspieszenia spadającego jabłka

- Zdarzenie A: jabłko odrywa się od gałęzi
- Zdarzenie B: jabłko upada na ziemię

Aby wyznaczyć przyspieszenie (zakładając, że ruch jest jednostajnie przyspieszony) musimy znać zarówno czas jak i położenie jabłka dla obu zdarzeń.

# Zdarzenia i czasoprzestrzeń

## Zdarzenie

Zdarzenie: jednoczesne określenie czasu i położenia.

Zjawisko zachodzące w pewnym miejscu w przestrzeni i w pewnej chwili czasu.

Przykłady:

- obserwacja (pomiar) położenia jabłka (w danej chwili czasu)
- zderzenie kulek (zaniedbując ich rozmiary)
- rozszczepienie jądra atomowego
- start rakiety
- lądowanie rakiety na Księżycu
- wysłanie lub rejestracja impulsu laserowego, cząstki itp.

**ZDARZENIE = CZAS + POŁOŻENIE**

Od pierwszego wykładu zajmowaliśmy się różnego typu zdarzeniami...

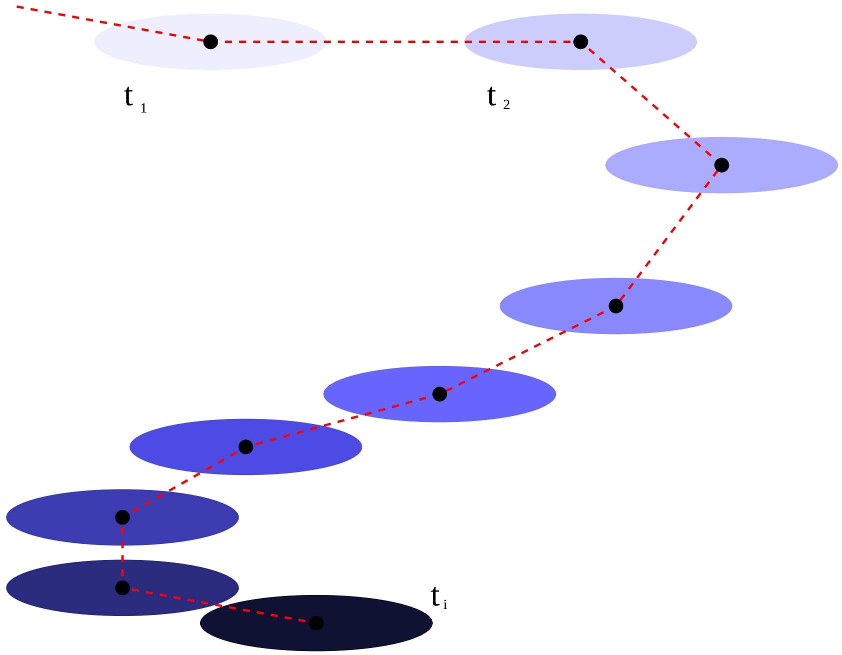
# Zdarzenia i czasoprzestrzeń

## Linia świata

Możemy wyróżnić pewne szczególne zbiory zdarzeń.

Wyobraźmy sobie, że obserwujemy jakiś obiekt (np. UFO) i rejestrujemy w sposób ciągły zmiany jego położenia w czasie. Mamy ciągłą serię pomiarów.

Zbiór zdarzeń opisujących ruch konkretnego ciała nazywamy "linią świata" tego ciała.



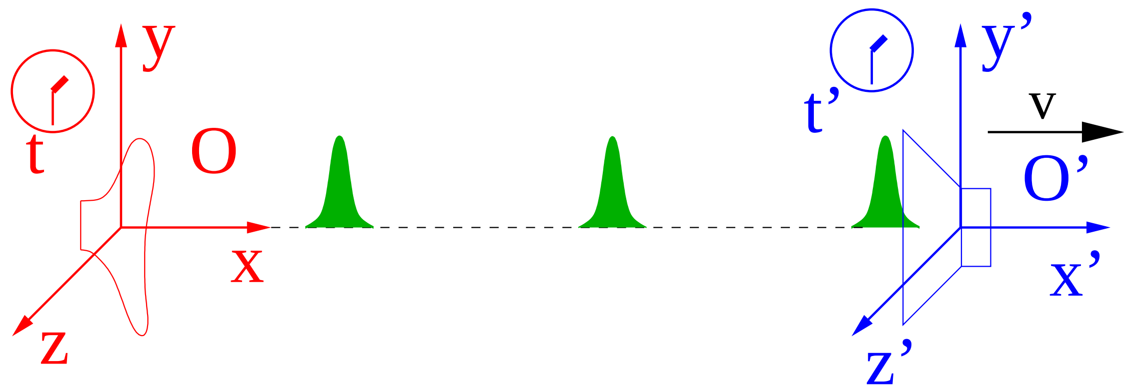

W wymiarach przestrzennych linia świata to po prostu tor.

Znając linię świata wiemy dokładnie jak poruszało się dane ciało.

Oczywiście kształt linii świata zależy od wybranego układu odniesienia.

# Transformacja Galileusza

## Efekt Dopplera




Zdarzeniem jest zarówno wysłanie kolejnego impulsu, jak i jego rejestracja.

Oba typy zdarzeń mogą być zmierzone (czas i położenie) przez obu obserwatorów:
O' związanego ze źródłem i rejestrującego impulsy O.

Dla każdego przekazywanego impulsu mamy łącznie 4 pomiary

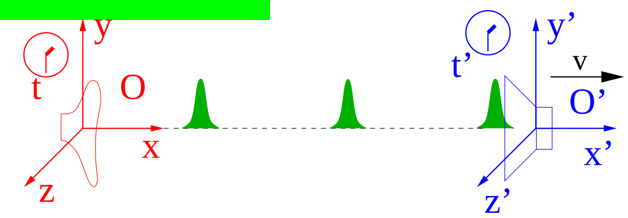
## Transformacja ukladu współrzędnych

W przypadku ogólnym obserwując to samo zdarzenie
każdy z obserwatorów może zmierzyć inne współrzędne.

Jeśli wiemy jak obserwatorzy poruszają się względem siebie,
powinniśmy móc wyznaczyć transformacje $(t, x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad (t', x', y', z')$

# Transformacja Galileusza

## Transformacja ukladu współrzędnych




Wysłanie impulsu $i$ w ukladzie O:

$$t_i = i \cdot T$$
$$x_i = i \cdot T \cdot V$$

Odebranie impulsu $i$ w ukladzie O:

$$t_i = i \cdot T + \frac{i \cdot T \cdot V}{c}$$
$$x_i = 0$$

Wysłanie impulsu $i$ w ukladzie O':

$$t'_i = i \cdot T$$
$$x'_i = 0$$

Odebranie impulsu $i$ w ukladzie O':

$$t'_i = i \cdot T + \frac{i \cdot T \cdot V}{c}$$
$$x'_i = -\frac{i \cdot T \cdot V}{c} \cdot (c + V)$$

Dla obu zdarzeń spełnione są zależności:

$$t = t'$$
$$x = x' + V\, t'$$

# Transformacja Galileusza

## Uniwersalność czasu

Była podstawowym założeniem w fizyce klasycznej (Newtonowskiej)

Czas nie zależał od układu odniesienia.

$$\text{Transformacja Galileusza} \Rightarrow \begin{cases} t = t' \\ x = x' + V\,t' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Konsekwencją uniwersalności czasu jest jednak względność prędkości

Każda prędkość, także prędkość światła zmienia się przy zmianie okładu odniesienia

$$\boxed{v = v' + V}$$

Tr. Galileusza

# Transformacja Galileusza

Transformacja Galileusza zapewnia niezmienniczość klasycznych praw ruch (zasad dynamiki Newtona) przy zmianie układu odniesienia!

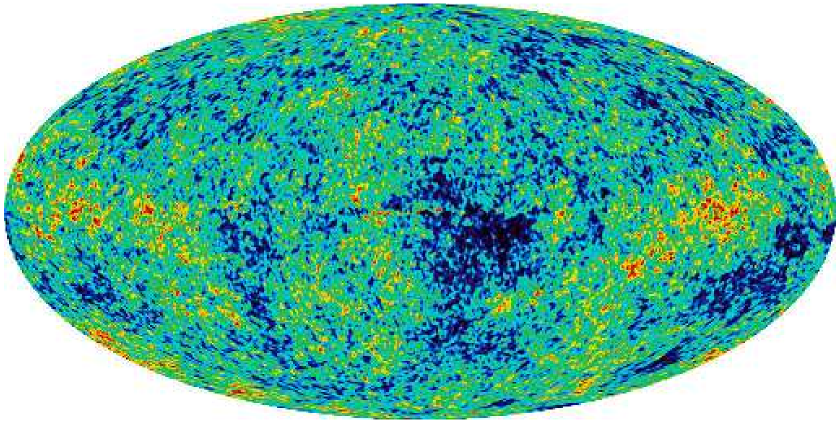
W roku 1604 Galileusz sformułował zasadę względności:

*"Wszystkie układy odniesienia poruszające się względem siebie ze stałą prędkością są równoważne"*

Zasada względności nie oznacza wcale, że nie istnieje wyróżniony układ odniesienia.

Wprost przeciwnie!

Obserwacje mikrofalowego promieniowania tła, pozostałości Wielkiego Wybuchu, w którym powstał Wszechświat, pozwalają wskazać związany z nim układ odniesienia.



Ale to temat na osobny wykład...

# Prędkość światła

## Historia pomiarów

Już Galileusz zastanawiał się nad prędkością rozchodzenia się światła.

Jako pierwszy zaproponował pomiar prędkości światła metodą czasu przelotu.

Jednak przy ówczesnych dokładnościach pomiarów ($\Delta L \sim 1\ m$, $\Delta t \sim 1\ s$) było to niewykonalne. Nie w warunkach ziemskich...

W 1676 Ole Rømer zauważył, że obserwowany na Ziemi czas zaćmień satelity Io Jowisza zależy od położenia Ziemi względem Jowisza.

Maksymalne opóźnienie czasu zaćmienia wynosi około 16 minut.

Według ówczesnych pomiarów orbity Ziemi oszacował $c = 214000\ km/s$

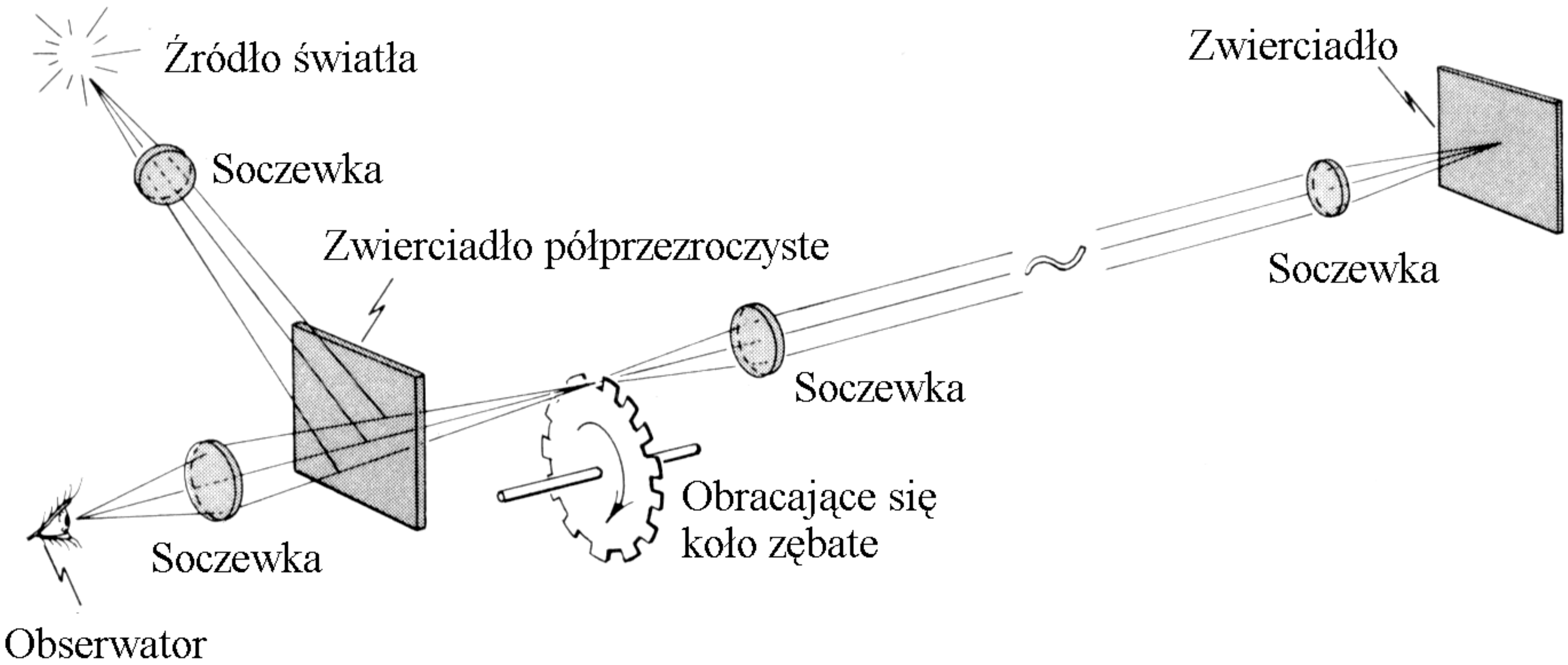
W 1727 William Bradley wyznaczyl prędkość światła z aberracji gwiazd.

Gwiazdy zmieniają w ciągu roku swoje położenie na sferze niebieskiej o ok. 20.5 sekundy łuku, co jest wywołane przez ruch Ziemi dookoła Słońca (przy skończonej prędkości rozchodzenia się światła). Na tej podstawie wyznaczył $c = 301000\ km/s$

# Prędkość światła

## Pomiar H.L. Fizeau 1849

Pierwszy pomiar w warunkach “laboratoryjnych” (ziemskich)



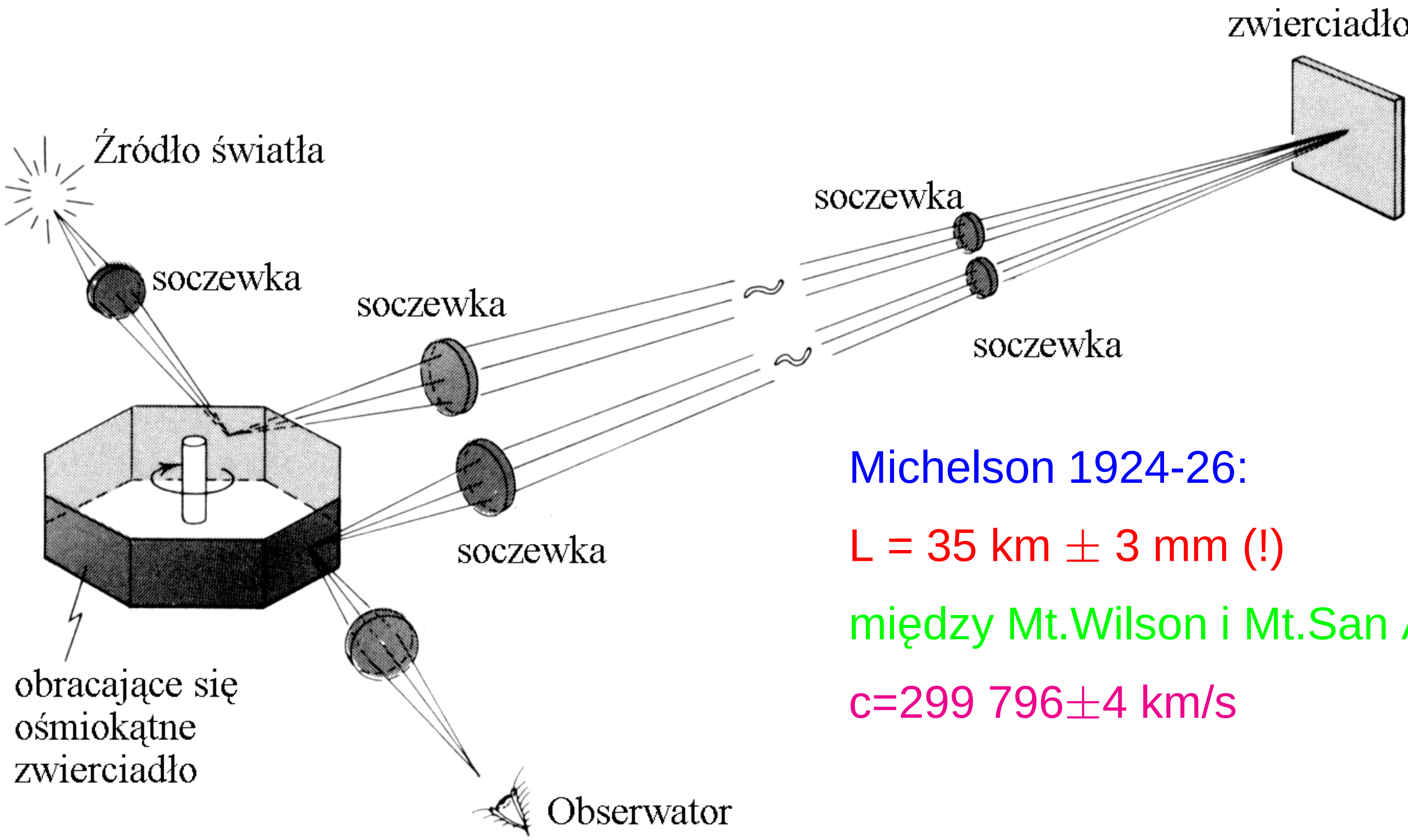

odległość $L = 8633$ m, zębów w “przesłonie” $N = 720$

liczba obrotów przy pierwszym “zaćmieniu” $n = 12.86\ s^{-1} \Rightarrow\ c \approx 315300$ km/s

# Prędkość światła

## Metoda Foucault od 1850

Metoda wirującego zwierciadła




Michelson 1924-26:

L = 35 km $\pm$ 3 mm (!)

między Mt.Wilson i Mt.San Antonio

c=299 796$\pm$4 km/s

# Prędkość światła

W latach 70 XX wieku prędkość światła zmierzono z dokładnością do około 1 m/s !

Mierzono też prędkości rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w innych zakresach częstości (od fal radiowych $\nu \sim 10^7$ Hz do promieniowania $\gamma$ $\nu \sim 10^{24}$ Hz).

Brak różnic w granicach błedów pomiarowych.

Dziś już nie mierzymy prędkości światła !

W 1983 roku prędkość światła została zdefiniowana jako

$$c \;=\; 299792458\, m/s \qquad \text{(dokładnie !)}$$

wybrana wartość zgodna z wcześniejszymi pomiarami

Teraz 1 metr jest zdefiniowany jako odległość jaką pokonuje świato w próżni w czasie równym 1/299792458 sekundy...

# Prędkość światła

Na początku XX wieku panowało powszechne przekonanie o falowej naturze światła, która przejawiała się m.in. w zjawiskach dyfrakcji i interferencji.

Rozchodzenie się światła jako fali elektromagnetycznej opisywały
Równania Maxwella (1865):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\circ \, \mathrm{div}\vec{E} &= \rho \\
\mathrm{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\mathrm{div}\vec{B} &= 0 \\
\mathrm{rot}\vec{B} &= \mu_\circ \, \vec{j} + \mu_\circ \, \varepsilon_\circ \, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Prędkość rozchodzenia fali elektromagnetycznej: $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_\circ \mu_\circ}}$

Problem: Równania Maxwella nie są niezmiennicze względem transformacji Galileusza.

W szczególności wartość prędkości światła jest określona przez parametry równania i nie zależy od układu odniesienia!

# Prędkość światła

Z równań Maxwella wynika, że prędkość światła zależy jedynie od stałych opisujących oddziaływania magnetyczne i elektryczne (prawo Ampera i prawo Coulomba).

Z transformacji Galileusza wynika, że powinna zależeć od układu odniesienia!

Ale ten sam problem możemy dostrzec w przypadku dźwięku.

Prędkość rozchodzenia się dźwięku wyraża się przez parametry ośrodka (!). Z definicji jest więc ustalona tylko względem ośrodka (w układzie w którym ośrodek spoczywa).

Dzieki temu nie ma sprzeczności z transformacją Galileusza
i jego prawem "dodawania" prędkości.

Podobnie mogłoby być w przypadku światła: jeśli jesteśmy w stanie wskazać ośrodek w którym światło się rozchodzi, to równania Maxwella nie są sprzeczne z transformacją Galileusza.

Poszukiwany ośrodek nazwano eterem...

# Doświadczenie Michelsona-Morleya

1887

Pomiar prędkości Ziemi względem eteru

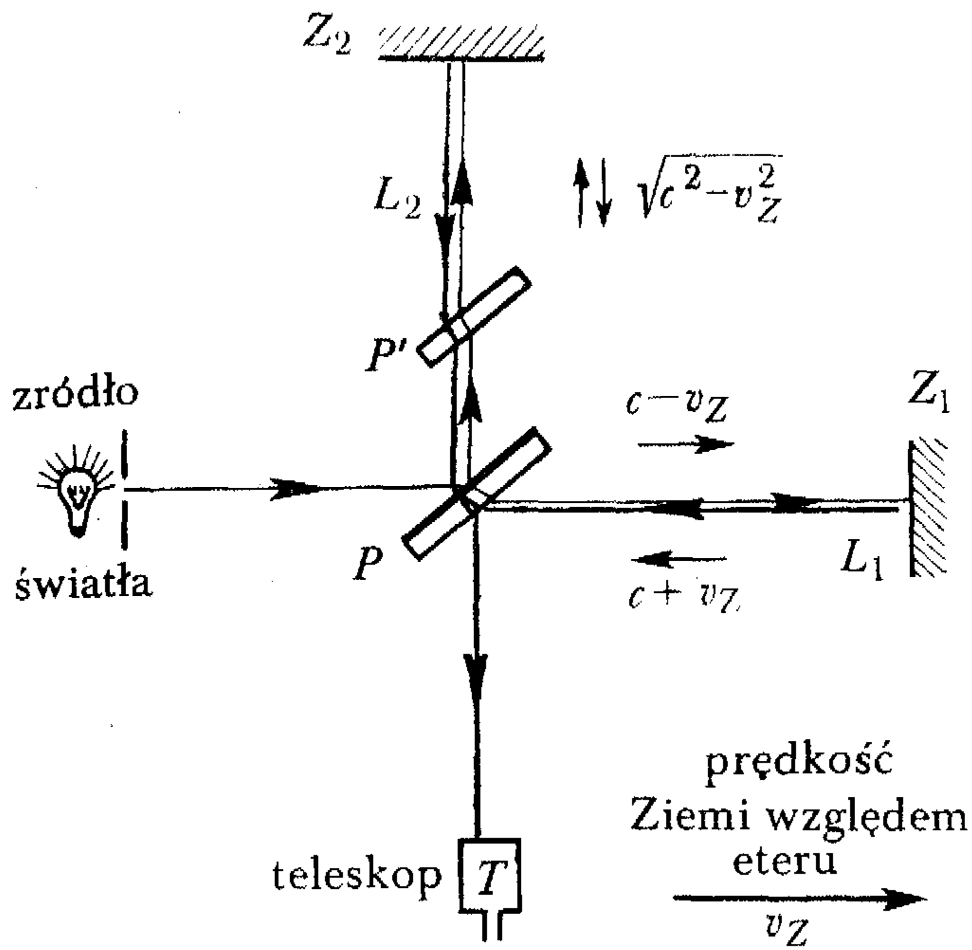
Czas przelotu światła w ramionach interferometru:

$$\begin{aligned}\Delta t_1 &= \frac{L_1}{c+v_Z} + \frac{L_1}{c-v_Z} \\ &= \frac{2L_1}{c} \cdot \frac{1}{1-\beta^2}\end{aligned}$$

$$\Delta t_2 = \frac{2L_2}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

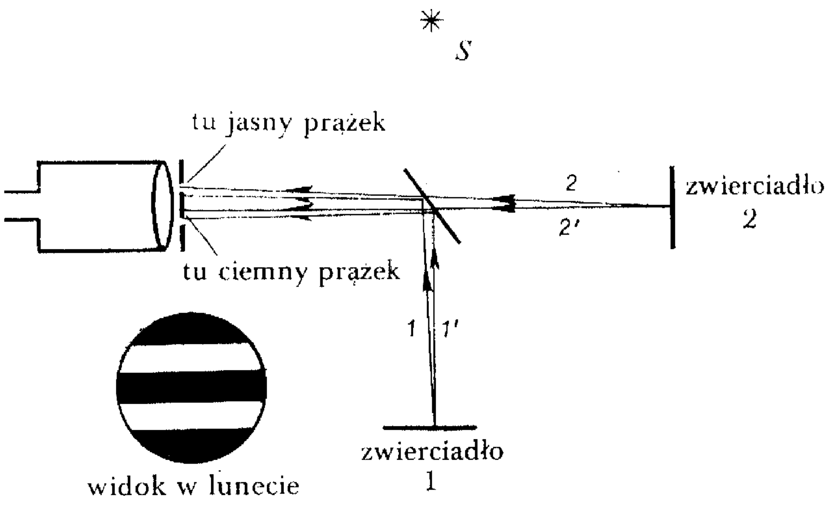
Kierunek ruchu względem eteru jest wyróżniony !

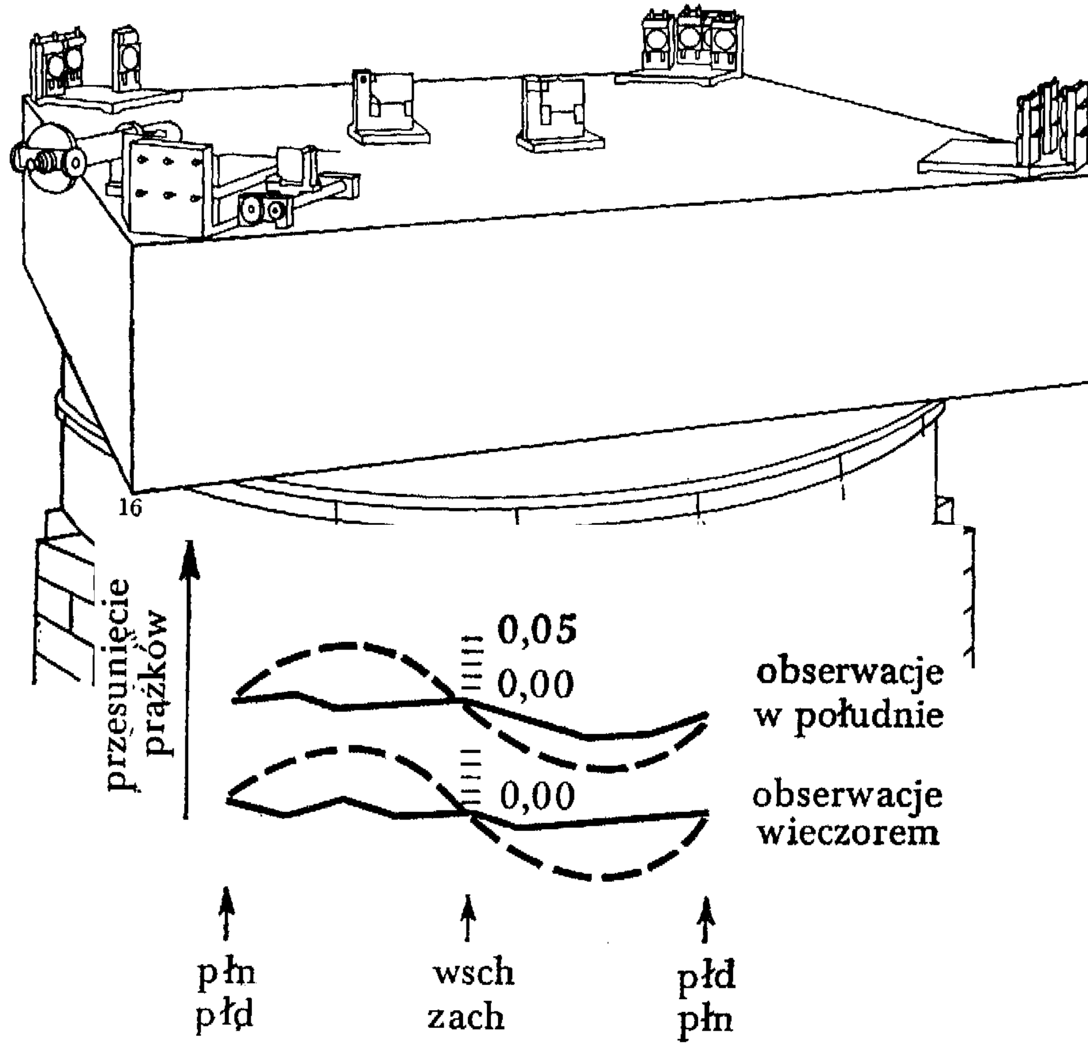


# Doświadczenie Michelsona-Morleya

## Wyniki

Światło z dwóch ramion interferometru interferuje ze sobą




Przy obrocie interferometru oczekujemy

- $\Rightarrow$ zmiany $\Delta t_1 - \Delta t_2$
- $\Rightarrow$ zmiany fazy
- $\Rightarrow$ przesunięcia prążków interferencyjnych

Brak efektu !!!

# Doświadczenie Michelsona-Morleya

## Wyniki

Negatywny wynik doświadczenia Michelsona-Morleya wskazywał, że Ziemia nie porusza się względem ośrodka, w którym rozchodzi się światło.

Doświadczenia tego typu powtarzano wielokrotnie, także w dłuższych okresach (aby wykorzystać zmianę kierunku prędkości Ziemi w ruchu orbitalnym) zawsze z wynikiem negatywnym.

Wszystkie wyniki wskazywały, że prędkość światła jest stała (względem źródła) i nie zależy od układu odniesienia.

W świetle tych wyników równania Maxwella nie dawały się pogodzić z transformacją Galileusza (postulatem uniwersalności czasu).

# Postulaty Einsteina

W roku 1905 Einstein opublikował pracę "O elektrodynamice ciał w ruchu".

Zawarł w niej dwa postulaty, które *"wystarczają do podania prostej, wolnej od sprzeczności elektrodynamiki ciał w ruchu, opartej na teorii Maxwella..."*

- prawa fizyki są identyczne w układach będących względem siebie w ruchu jednostajnym prostoliniowym (zasada względności)
- prędkość światła w próżni, $c$, jest jednakowa w każdym kierunku we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, niezależnie od wzajemnego ruchu obserwatora i źródła (uniwersalność prędkości światła)

Drugi postulat oznacza odrzucenie transformacji Galileusza na rzecz równań Maxwella.

Okazuje się, że transformacja Galileusza nie jest jedyną transformacją, która zgodna jest z zasadą względności.

Jeśli odrzucimy postulat uniwersalności czasu istnieje drugie rozwiązanie
$\Rightarrow$ transformacja Lorentza.

# Teoria względności Einsteina

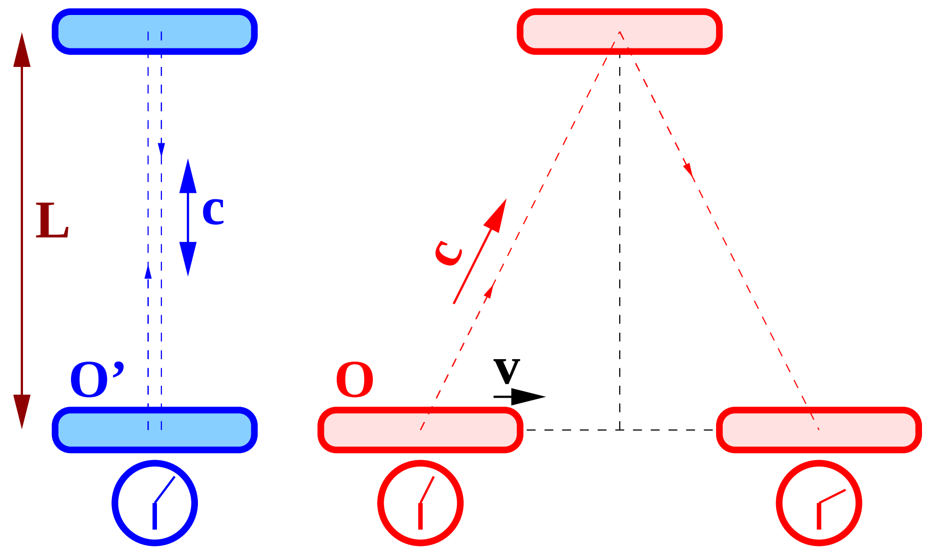
Uniwersalność prędkości światła nie da się pogodzić z uniwersalnością czasu !

Rozważmy obserwatora O', który porusza się z prędkością $v$ względem układu O

## Wzgledność czasu

Obserwator O' odmierza czas przy pomocy zegara świetlnego takt $\Delta t' = \frac{2l}{c}$

Dla obserwatora O światło pokonuje dłuższą drogę $\Rightarrow$ $\Delta t = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}}$




Dylatacja czasu: $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Dla obserwatora O zegar w O' chodzi wolniej !?!...

# Konstrukcja układu współrzędnych

Z naszych rozważań wynika, że czas w jednym układzie biegnie wolniej niż w drugim.

Ale przecież żaden układ nie powinien być wyróżniony !?...

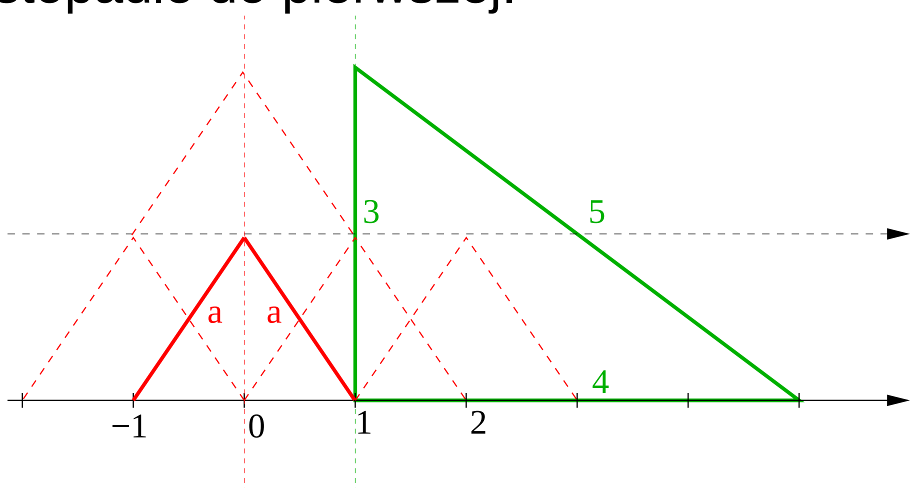
Musimy bliżej zastanowić się nad konstrukcją układu współrzędnych!

Dla współrzędnych przestrzennych jest to proste:
wystarczy, że mamy wzorzec jednostki długości, odkładając ten wzorzec wzdłuż prostej (toru ciała swobodnego) otrzymujemy pierwszą oś współrzędnych.

Kolejne osie układu konstruujemy prostopadle do pierwszej.

Nie potrzebujemy kątomierza.

Wystarczą nam jednakowej długości tyczki lub sznurki, które pozwolą nam na konstrukcję trójkąta równoramiennego.

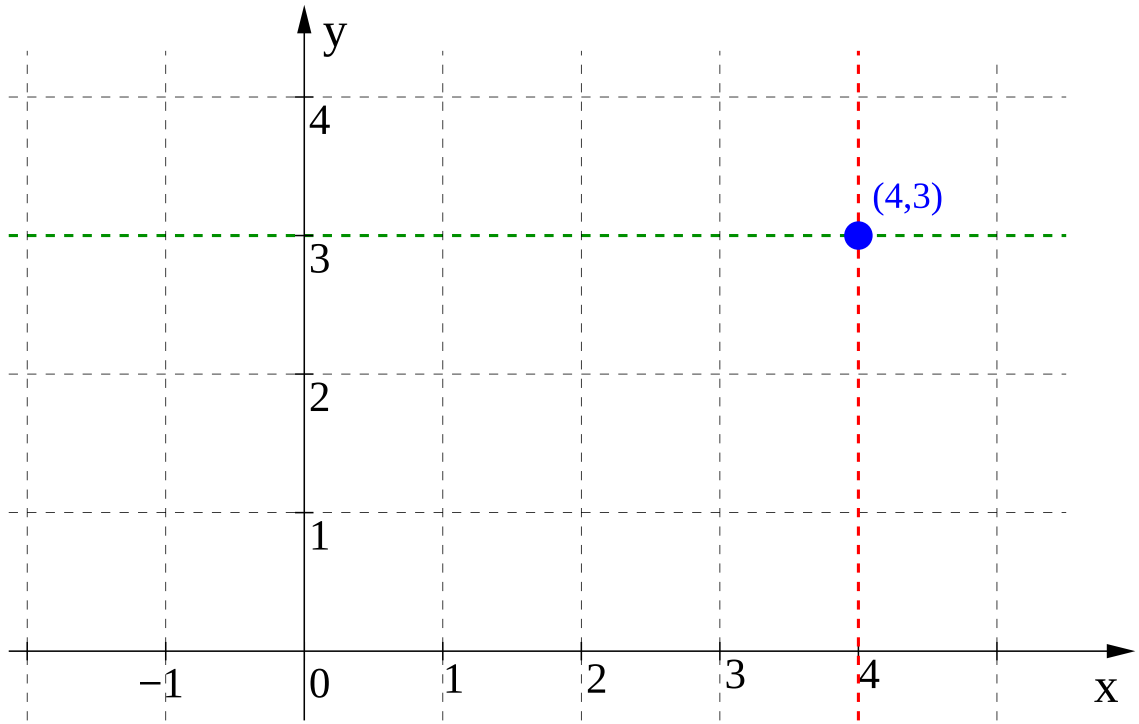



Możemy też skorzystać z twierdzenia Pitagorasa...

# Konstrukcja układu współrzędnych

Dodatkowo kreśląc linie równoległe do osi przechodzących przez początek układu otrzymujemy siatkę współrzędnych.

Pozycję zdarzenia możemy zdefiniować poprzez podanie najbliższego węzła siatki.




Zakładamy przy tym, że przestrzeń jest płaska.
Wbrew pozorom nie jest to oczywiste założenie!...

# Konstrukcja układu współrzędnych

Pozostaje nam "oś czasu".

Czy wystarczy nam jeden zegar w początku układu współrzędnych?

NIE !

Potrzebny jest nam zegar referencyjny, ale do określenia współrzędnej czasowej zdarzenia potrzebny jest zegar w każdym węźle siatki.

Inaczej pomiar będzie zależał od metody odczytu wskazań zegara referencyjnego.

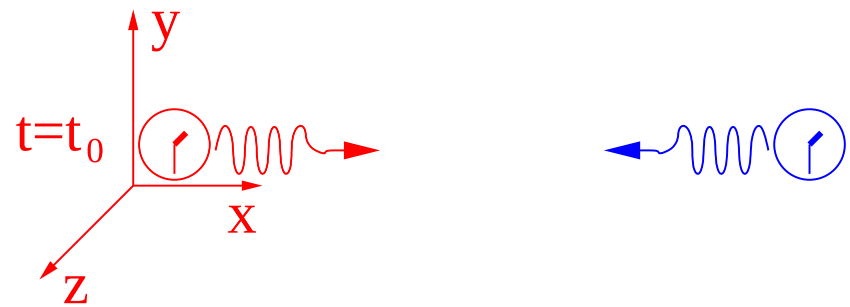
Zegary siatki muszą być oczywiście zsynchronizowane z zegarem referencyjnym.

Nie można (jak się później przekonamy) zrobić tego synchronizując zegary w początku układu, a następnie roznosząc je do poszczególnych węzłów siatki -
ruch może wpływać na bieg zegarów
(wyobraźmy sobie, że mamy zegary wahadłowe).

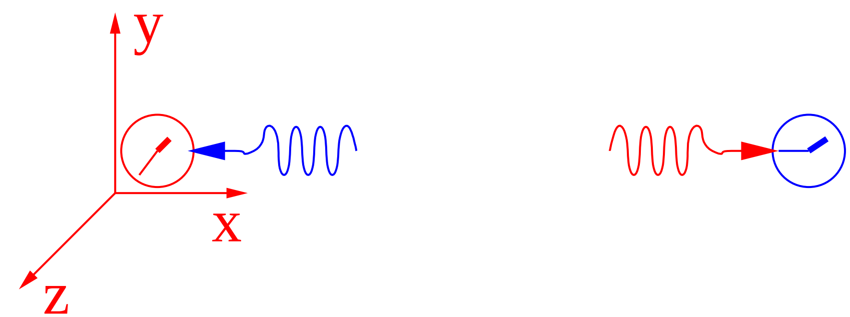
# Konstrukcja układu współrzędnych

Synchronizację można przeprowadzić poprzez wysłanie impulsów światła.

O określonej godzinie wysyłamy impuls z wybranego zegara do zegara referencyjnego oraz z zegara referencyjnego do wybranego zegara.




Jeśli oba impulsy dotarły o tej samej godzinie (odczytanej na zegarze do którego dotarł impuls) to oznacza, że zegary są zsynchronizowane.



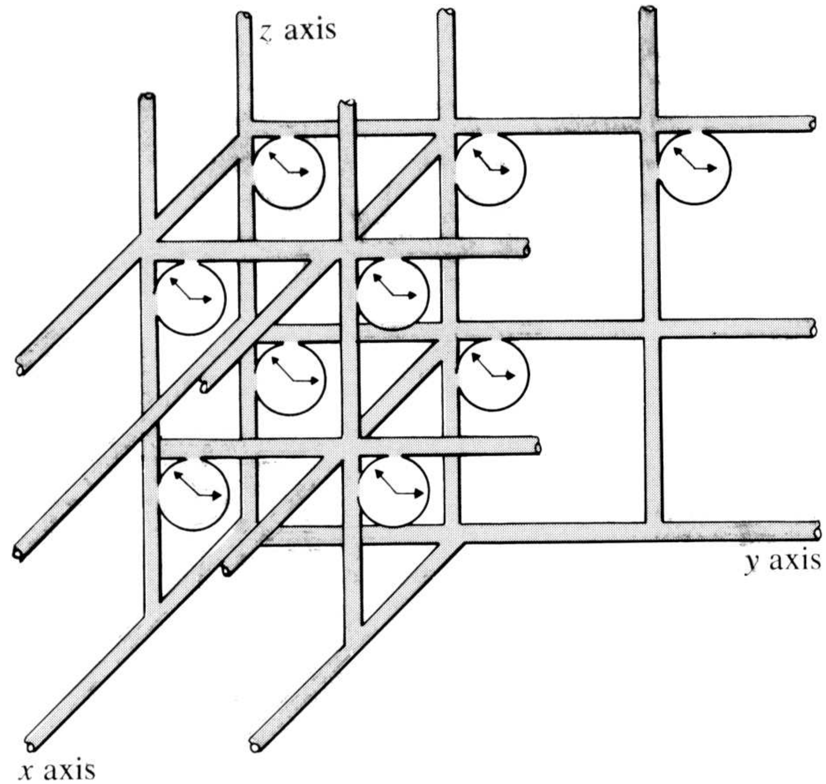

Jeśli nie to połowa różnicy tych czasów daje nam poprawkę dla wybranego zegara.

Aby zastosować tą metodę synchronizacji nie musimy znać prędkości światła.

Ale zakładamy, że nie zależy ona od kierunku rozchodzenia!

# Konstrukcja układu współrzędnych

Wszystkie zegary rozmieszczone w węzłach skonstruowanej przez nas siatki układu współrzędnych spoczywają w tym układzie.




Jest to warunek konieczny, żeby synchronizacja była trwała (zakładamy, że zegary chodzą poprawnie, nie mają usterek)

⇒ Relatywsityczny układ współrzędnych to rodzina zsynchronizowanych zegarów.

Jeśli przyjmiemy, że na zegary są swobodne (nie działają na nie żadne siły)
to tak skonstruowany układ współrzędnych będzie z definicji **układem inercjalnym**.

W zagadnieniach relatywistycznych jest niezwykle istotne rozróżnienie pomiarów z użyciem jednego zegara od sytuacji gdy patrzymy na kolejne zegary w danym układzie.

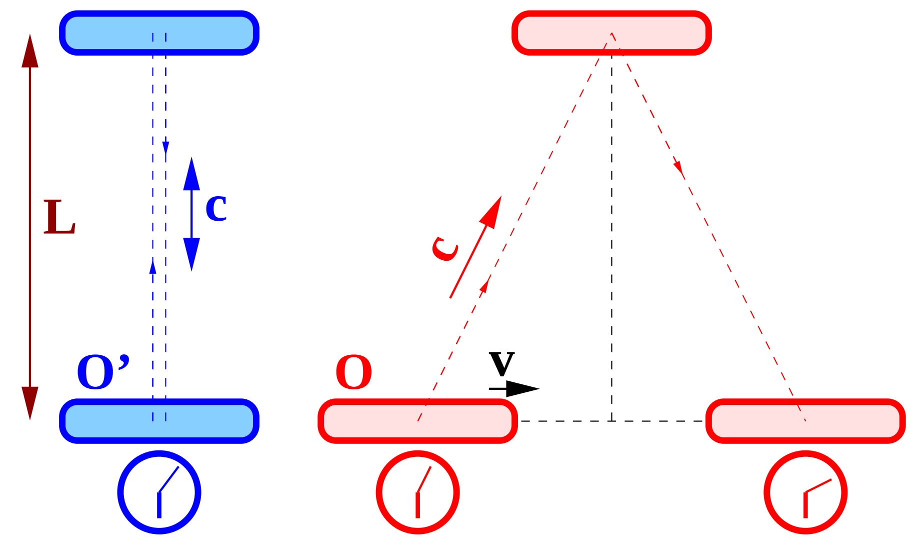
# Teoria względności Einsteina

## Dylatacja czasu

Dla obserwatora O zegar w początku układu O' chodzi wolniej...

Ale układy powinny być równoważne !?

Pozorny paradoks wynika z faktu, że pomiar narusza symetrię między układami: obserwujemy zegar, który jest związany z konkretnym układem odniesienia.




Obserwator O powie, że w układzie O':

Obserwator O' powie, że w układzie O:

- zegary nie są poprawnie zsynchronizowane
- wszystkie zegary chodzą wolniej niż powinny

$\Rightarrow$ pełna symetria

Czy jesteśmy w stanie powiązać pomiary czasu i położenia w obu układach ?

Tak jak to robiliśmy w przypadku klasycznym (transformacja Galileusza)...

# Transformacja Lorentza

## Transformacja liniowa

Aby zachować niezmienniczość praw przyrody względem przesunięć w czasie i przestrzeni, transformacja współrzędnych między układami powinna mieć postać

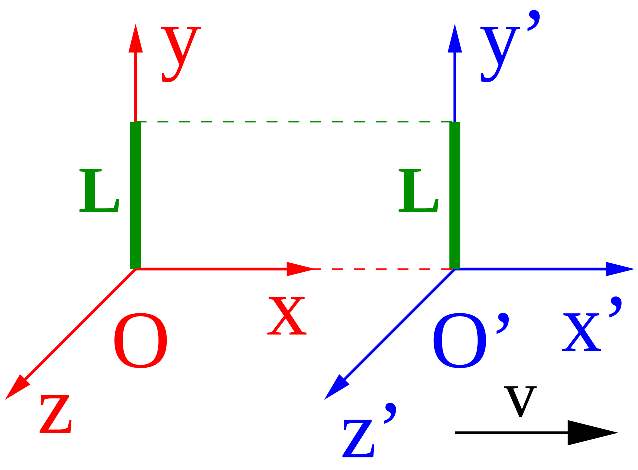
$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad L \text{ - macierz } 4 \times 4$$

## Wymiary poprzeczne

Rozawżmy jednostkowe pręty umieszczone w obu układach wzdłuż osi Y (lub Z).

Z symetrii zagadnienia, żaden obserwator nie może stwierdzić, że jego pręt jest dłuższy

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

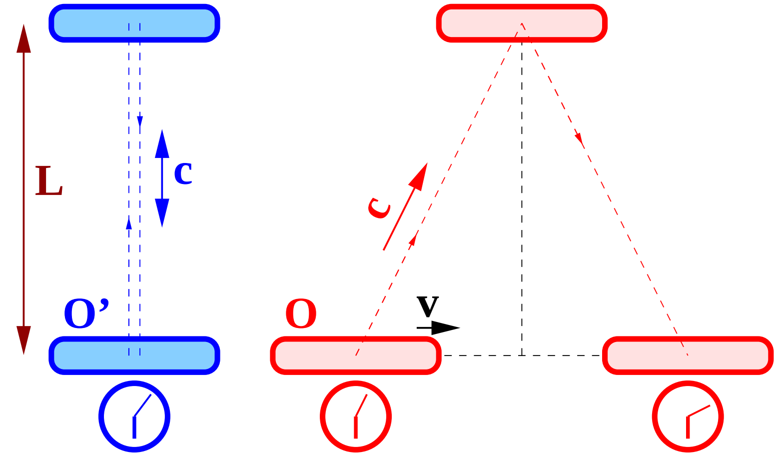


# Transformacja Lorentza

Szukamy więc transformacji w ogólnej postaci:

$$t = A\,t' + B\,x'$$
$$x = C\,t' + D\,x' \qquad y = y' \qquad z = z'$$

## Dylatacja czasy




Przyjmijmy, że w obu układach pierwsze "tyknięcie" zegara świetlnego ma współrzędne $(0,0,0,0)$.

Drugie "tyknięcie" w układzie O': $(t', 0, 0, 0)$

W układzie O:

$$t = \gamma \cdot t' \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow \quad x = \beta \cdot ct = \beta\gamma \cdot ct' \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow \quad A = \gamma \qquad C = \beta\gamma c$$

# Transformacja Lorentza

## Predkość światła

Przyjmijmy, że w chwili mijania się obserwatorów $t = t' = 0$
z początku układów emitowane są dwa impulsy światła, zgodnie i przeciwnie do $\vec{v}$.

Dla obu obserwatorów rozchodzą się one z prędkością $c$.

| | O' | O | |
|---|---|---|---|
| pierwszy impuls | $x' = ct'$ | $x = ct$ | $\Rightarrow Ct' + D(ct') = c \cdot \left[At' + B(ct')\right]$ |
| drugi impuls | $x' = -ct'$ | $x = -ct$ | $\Rightarrow Ct' - D(ct') = -c \cdot \left[At' - B(ct')\right]$ |

dodając i odejmując stronami otrzymujemy:

$$B = \frac{1}{c^2} C = \frac{1}{c} \beta\gamma$$

$$D = A = \gamma$$

# Transformacja Lorentza

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{cases} c\,t = \gamma\,c\,t' + \gamma\,\beta\,x' \\ x = \gamma\,\beta\,c\,t' + \gamma\,x' \end{cases} \qquad y = y' \qquad z = z'$$

Lub, w zapisie macierzowym:

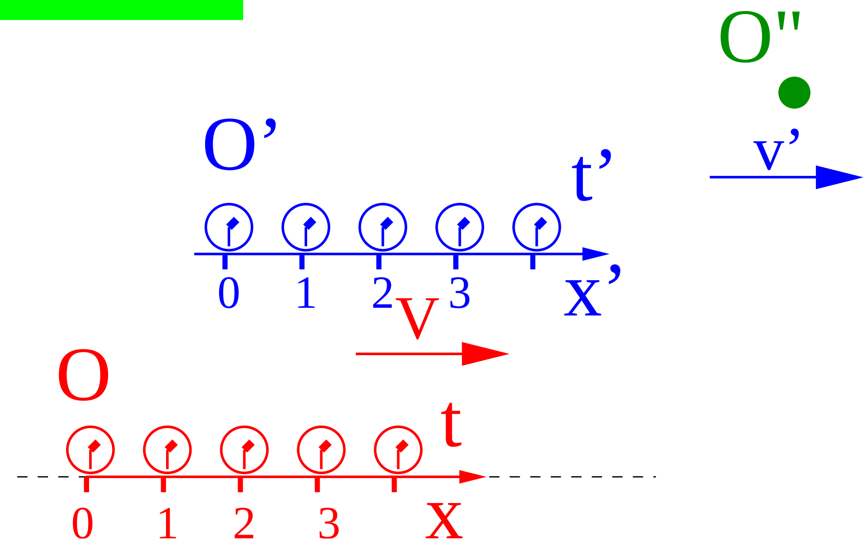
$$\begin{pmatrix} c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,\gamma\,t' + \gamma\,\beta\,x' \\ c\,\gamma\,\beta\,t' + \gamma\,x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\,\beta & 0 & 0 \\ \gamma\,\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$ct$ traktujemy jako “czwarty” wymiar (zazwyczaj zapisujemy jako wymiar “zerowy” - $x_0$)

Transformacja Lorentza $\equiv$ “obrót” w “płaszczyźnie” $ct$-$x$ dla ruchu wzdłuż osi X

# Składanie prędkości

Rozważmy teraz ciało O", które w układzie O' porusza się z prędkością v' w kierunku osi x'.




$$v' = \frac{x'}{t'} \qquad x' = v'\,t'$$

Jaką prędkość ciała O" zmierzy obserwator O?

$$v'' = \frac{x}{t} = \frac{\gamma\, x' + \gamma\beta\, ct'}{\gamma\, t' + \frac{\gamma\beta}{c}\, x'} = \frac{\gamma\, v't' + \gamma\beta\, c\, t'}{\gamma\, t' + \frac{\gamma\beta}{c} v'\, t'}$$

W podejściu Einsteina składanie prędkości nie polega na ich prostym dodawaniu:

$$v'' = \frac{V + v'}{1 + \frac{Vv'}{c^2}} \qquad\qquad \beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} \neq \beta + \beta'$$

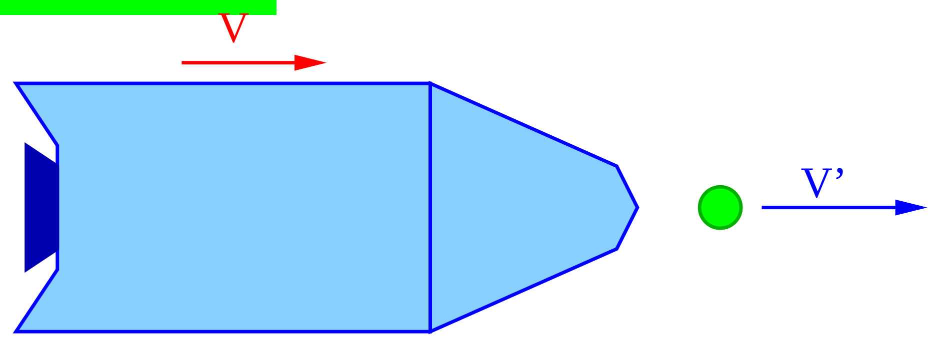
$\Rightarrow$ Prędkość światła pozostaje stała $(\beta'' = \beta' = 1)$ niezależnie od układu odniesienia.

Transformacja Lorentza przechodzi w transformację Galileusza w granicy $\frac{1}{c^2} \rightarrow 0$

# Składanie prędkości

## Przykład

Z rakiety poruszającej się z prędkością V względem Ziemi wystrzelono pocisk z prędkością V' względem rakiety.




Jaka jest prędkość V" pocisku względem Ziemi?

| $\beta$ | $\beta'$ | $\beta''$ |
|---|---|---|
| 0.0001 | 0.0001 | ≈0.0002 |
| 0.001 | 0.001 | 0.001999998 |
| 0.01 | 0.01 | 0.019998 |
| 0.1 | 0.1 | ≈0.1980 |
| 0.2 | 0.2 | ≈0.3846 |
| 0.4 | 0.4 | ≈0.6897 |
| 0.8 | 0.8 | ≈0.9756 |
| 0.9 | 0.9 | ≈0.9945 |

W granicy małych prędkości słuszne jest klasyczne dodawanie prędkości.

# Transformacja Lorentza

## Przedstawienie graficzne

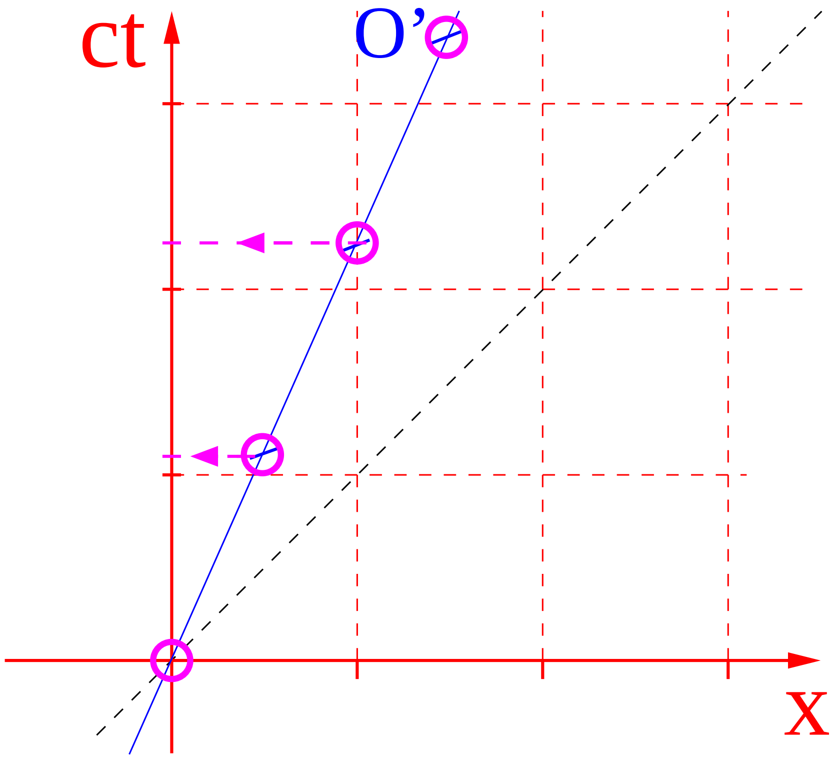
Niech zegar referencyjny w układzie O' błyska z upływem każdej jednostki czasu. Zdarzenia te mają współrzędne:

$$\begin{aligned} ct' &= i \cdot \Delta ct' = i \\ x' &= 0 \qquad i = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Z transformacji Lorentza uzyskujemy współrzędne tych zdarzeń w układzie O:

$$\begin{aligned} ct &= i \cdot \gamma \Delta ct' = i \cdot \gamma \\ x &= i \cdot \gamma\beta \Delta ct' = i \cdot \gamma\beta \end{aligned}$$

“Tyknięcia” zegara O' rejestrowane w układzie O:




Zdarzenia te leżą na lini świata ciała O', a jednocześnie pokazują nam upływ czasu w jego układzie ⇒ “tyknięcia” obrazują nam oś ct'

# Transformacja Lorentza

## Przedstawienie graficzne

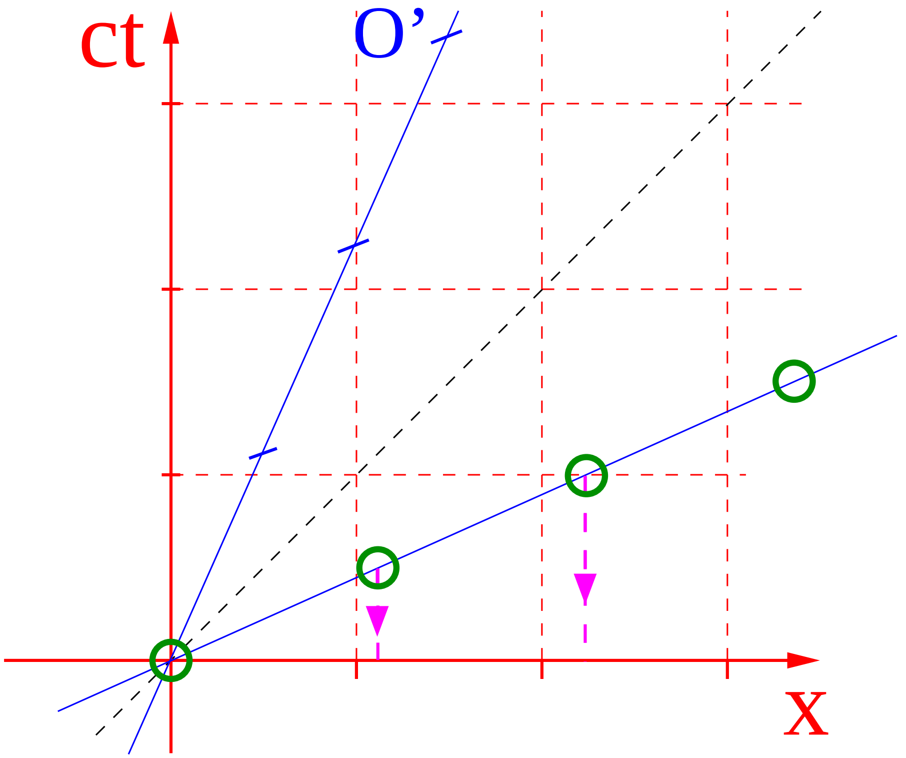
Niech zegary rozmieszczone wzdłuż osi x' wyślą w tej samej chwili t'=0 błysk światła. W O' zdarzenia te mają współrzędne:

$$
\begin{aligned}
ct' &= 0 \\
x' &= i \cdot \Delta x' = i
\end{aligned}
$$

Z transformacji Lorentza uzyskujemy współrzędne tych zdarzeń w układzie O:

$$
\begin{aligned}
ct &= i \cdot \gamma\beta\Delta x' = i \cdot \gamma\beta \\
x &= i \cdot \gamma\Delta x' = i \cdot \gamma
\end{aligned}
$$

błyski zegarów O'
rejestrowane w układzie O:




Zdarzenia te pokazują nam jak w układzie O wyglądają zdarzenia równoczesne w O', odwzorowują nam też nam też jednostkę długości $\Rightarrow$ obrazują nam oś x'

# Transformacja Lorentza

## Wykres Minkowskiego

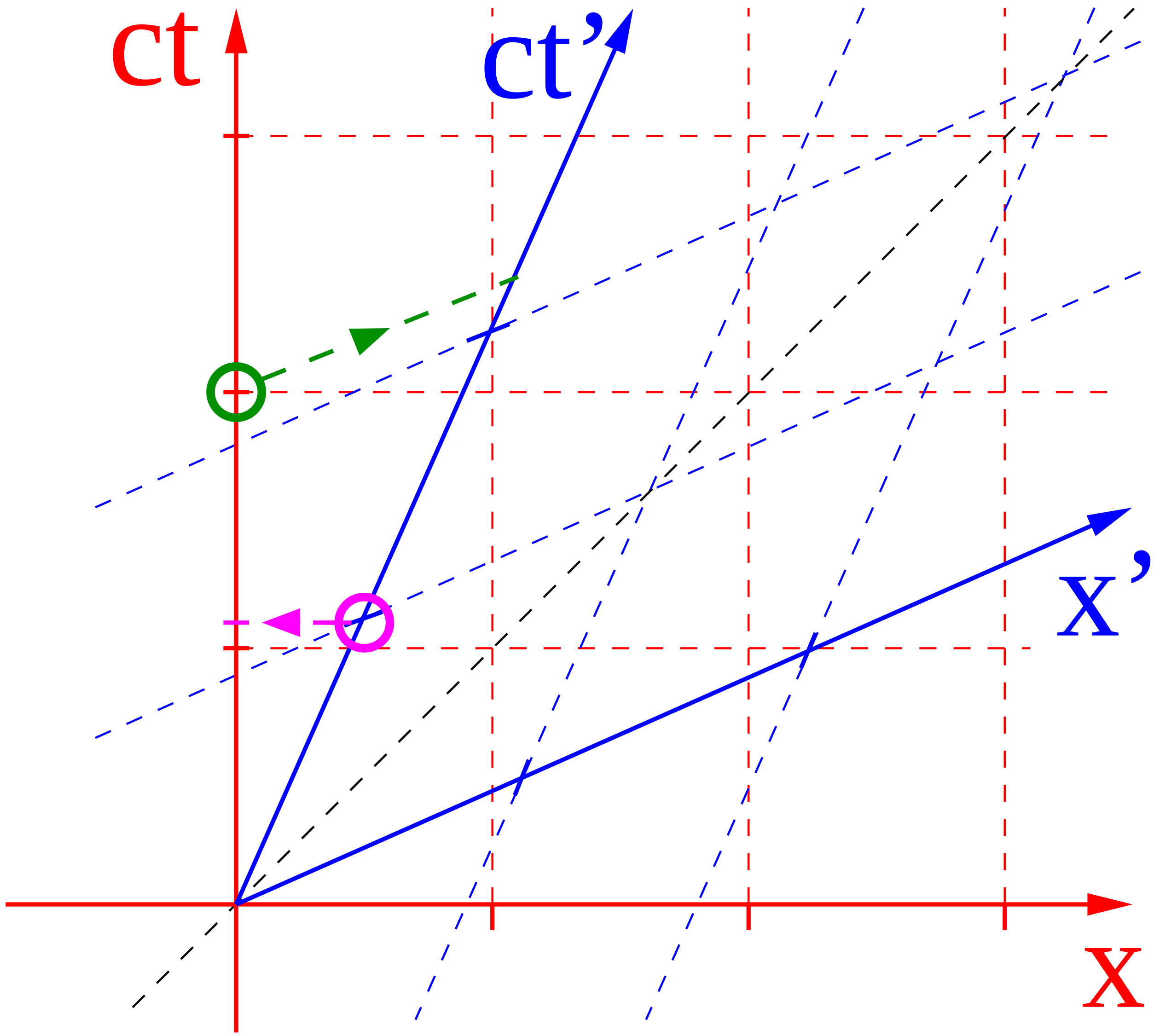
Osie układu O' nachylone są do osi O pod kątem

$$\tan\theta \;=\; \beta \;=\; \frac{V}{c}$$

Długości jednostek osi w układzie O' widziane w układzie O:

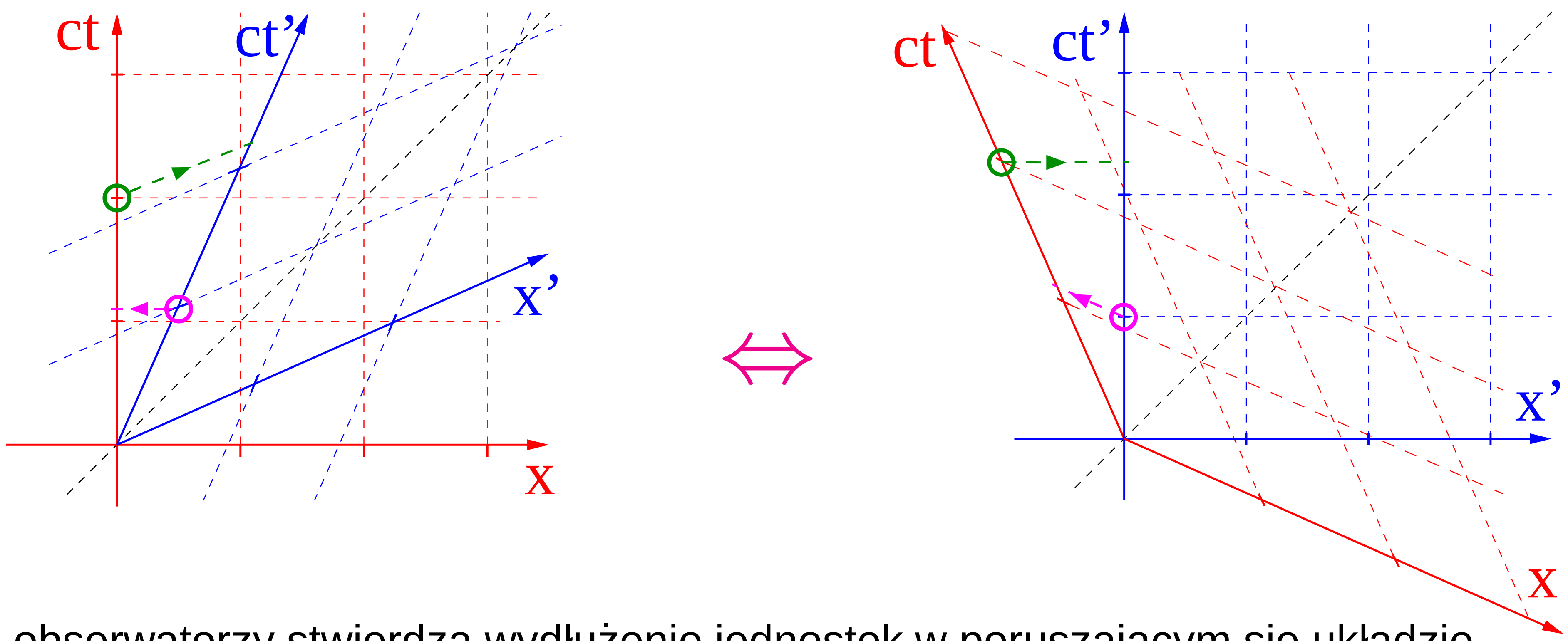
$$1' \;=\; \gamma$$

Ale także obserwator O' widzi wydłużenie jednostek osi O !



# Transformacja Lorentza

## Transformacja odwrotna




Obaj obserwatorzy stwierdzą wydłużenie jednostek w poruszającym się układzie.

Wybierając zgodne zwroty osi układów naruszyliśmy symetrie:
układ O porusza się w kierunku przeciwnym do zwrotu osi x', a O' zgodnie z x.

# Transformacja Lorentza

Transformacje możemy też zapisać jako "hiper obrót" w czasoprzestrzeni:

$$\begin{pmatrix} c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta & 0 & 0 \\ \sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

gdzie $\eta$ jest parametrem transformacji, a $\cosh$ i $\sinh$ to tzw. funkcje hiperboliczne.

$$\eta = \ln\left[\gamma(1+\beta)\right] = \ln\left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$\beta = \tanh\eta = \frac{\sinh\eta}{\cosh\eta}$$

$$\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Składanie transformacji Lorentza $\Rightarrow$ dodawanie (!) współczynników.

$\eta$ - kąt hiperboliczny

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt **Fizyka wobec wyzwań XXI w.**

współfinansowany ze środków Unii Europejskiej

w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego