KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIVERSITAS VARSOVIENSIS

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Kinematyka relatywistyczna

Fizyka I (Mechanika)

Wykład IV:

- Transformacja Lorentza
- Względność równoczesności i przyczynowość
- Dylatacja czasu i skrócenie Lorentza
- Paradoks bliźniąt
- Efekt Dopplera

Postulaty Einsteina

W roku 1905 Einstein opublikował pracę "O elektrodynamice ciał w ruchu".

Zawarł w niej dwa postulaty, które *"wystarczają do podania prostej, wolnej od sprzeczności elektrodynamiki ciał w ruchu, opartej na teorii Maxwella..."*

- prawa fizyki są identyczne w układach będących względem siebie w ruchu jednostajnym prostoliniowym (zasada względności)
- prędkość światła w próżni, c, jest jednakowa w każdym kierunku we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, niezależnie od wzajemnego ruchu obserwatora i źródła (uniwersalność prędkości światła)

Drugi postulat oznacza odrzucenie uniwersalności czasu i transformacji Galileusza.

Transformacja Galileusza nie jest jedyną transformacją, która zgodna jest z zasadą względności. Z zasadą tą zgodna jest też transformacja Lorentza.

Czy istnieje więcej takich transformacji?

Transformacja Lorentza

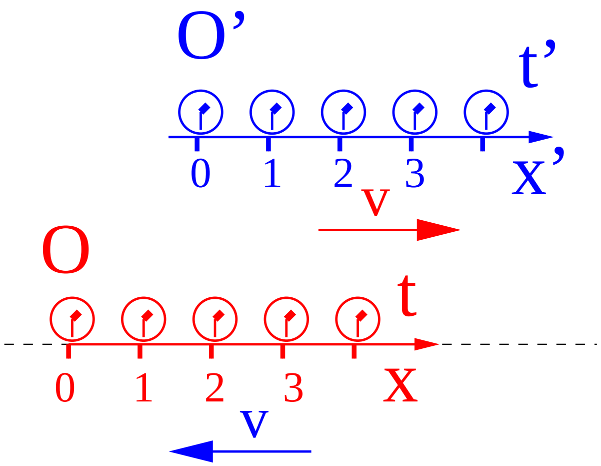
Transformacja Lorentza ma bardzo szczególne własności,
nie jest "jednym z wielu" możliwych przekształceń.

Korzystając tylko z:

- definicji (inercjalnego) ukladu odniesienia (zasady bezwładności)
- zasady względności (równoprawności układów odniesienia)

można pokazać, że związek między współrzędnymi zdarzenia w dwóch układach odniesienia **musi** mieć postać:

$$\begin{cases} t = \dfrac{t' + E\, V x'}{\sqrt{1 - E\, V^2}} \\ x = \dfrac{V t' + x'}{\sqrt{1 - E\, V^2}} \end{cases} \qquad y = y' \quad z = z'$$



Gdzie nieznana pozostaje jedynie stała E

Transformacja Lorentza

Przyjęcie $E = 0$ odpowiada transformacji Galileusza

$$\left\{ \begin{array}{rcl} t & = & t' \\ x & = & x' + V\,t' \\ y & = & y' \\ z & = & z' \end{array} \right. \qquad \text{albo:} \qquad \begin{pmatrix} c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

gdzie $\beta = \frac{V}{c}$

Konsekwencjami transformacji Galileusza jest:

- uniwersalność czasu
- względność prędkości $\qquad v = v' + V$

W transformacji Galileusza czas jest wyróżniony!

Nie ma symetrii między wymiarami przestrzennymi i czasem.

Transformacja Lorentza

Postulat Einsteina stałości prędkości światła oznacza przyjęcie $E = \frac{1}{c^2}$.

Wprowadzając tzw. czynnik Lorentza:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - E\,V^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Otrzymujemy wzory na transformację Lorentza

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ct & = & c\gamma t' + \gamma\beta x' \\ x & = & c\gamma\beta t' + \gamma x' \\ y & = & y' \\ z & = & z' \end{array} \right. \qquad \begin{pmatrix} c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\,\beta & 0 & 0 \\ \gamma\,\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Pełna symetria między ct (współrzędna czasową) i x (współrzędną przestrzenną)!!!

Dla wygody często przyjmuje się konwencje $c \equiv 1$ i pomija c we wzorach.

Transformacja Lorentza

Wyrażenia na Transformację Lorentza uzyskaliśmy przy założeniu, że początki układów mijają się w chwili $t = t' = 0$.

$\Rightarrow$ zdarzenie to ma w obu układach współrzędne $(0, 0, 0, 0)$
wspólne zdarzenie odniesienia

W ogólności Transformację Lorentza opisuje transformację różnicy współrzędnych dwóch wybranych zdarzeń A i B: $\Delta t = t_B - t_A, \quad \Delta x = x_B - x_A$ ...

Przyjmując $c \equiv 1$:

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\,\Delta t' + \gamma\,\beta\,\Delta x' \\ \gamma\,\beta\,\Delta t' + \gamma\,\Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\,\beta & 0 & 0 \\ \gamma\,\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix}$$

Jeśli przyjmiemy, że w obu układach A = $(0, 0, 0, 0)$ $\Rightarrow$ transformacja współrzędnych.

Transformacja Lorentza

Wykres Minkowskiego

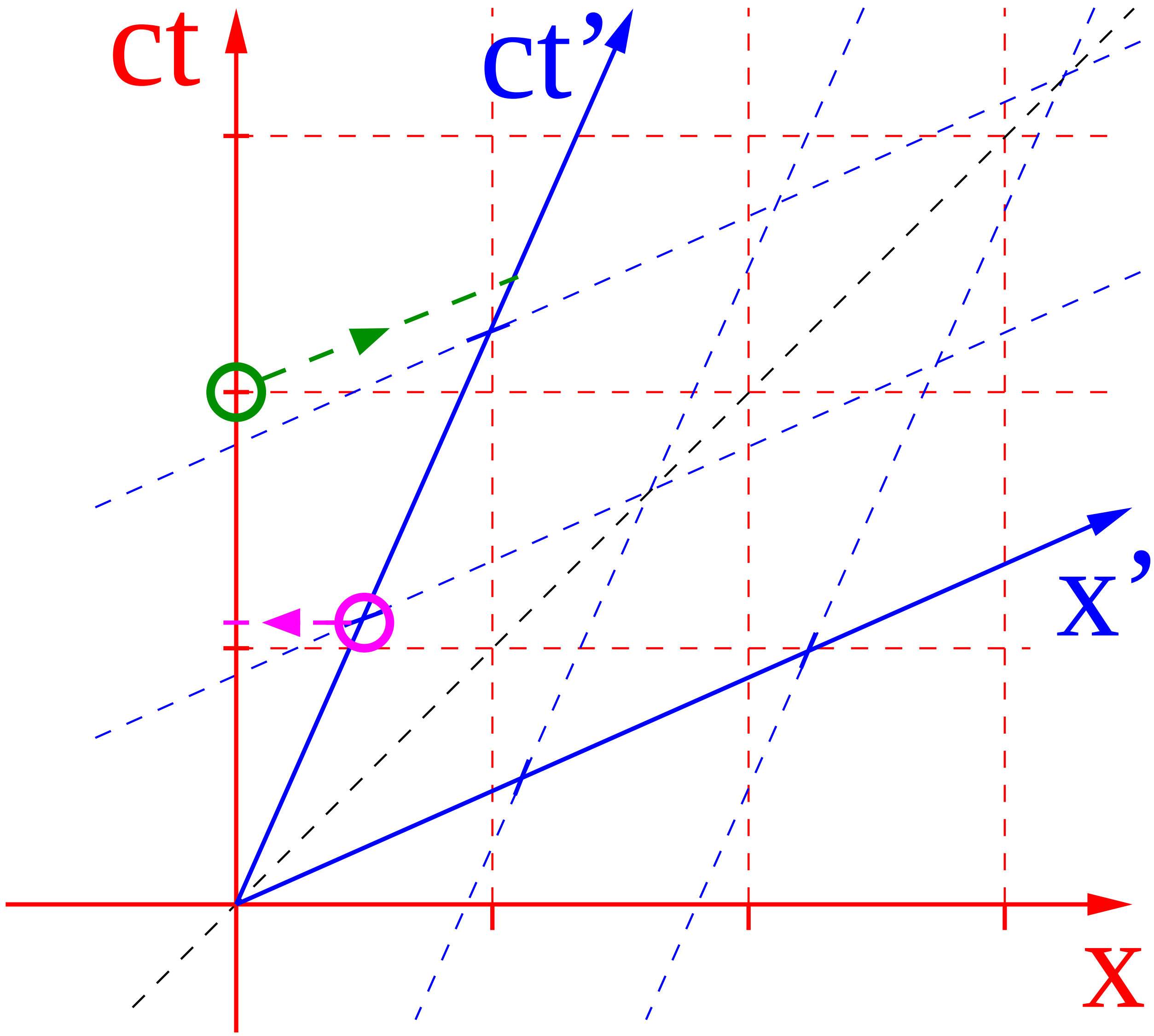
Graficzna reprezentacja transformacji Lorentza

Osie układu O' nachylone są do osi O pod kątem

$$\tan\theta = \beta = \frac{V}{c}$$

Długości jednostek osi układu O' widziane w układzie O są wydłużone o czynnik γ

Ale także obserwator O' widzi wydłużenie osi układu O !

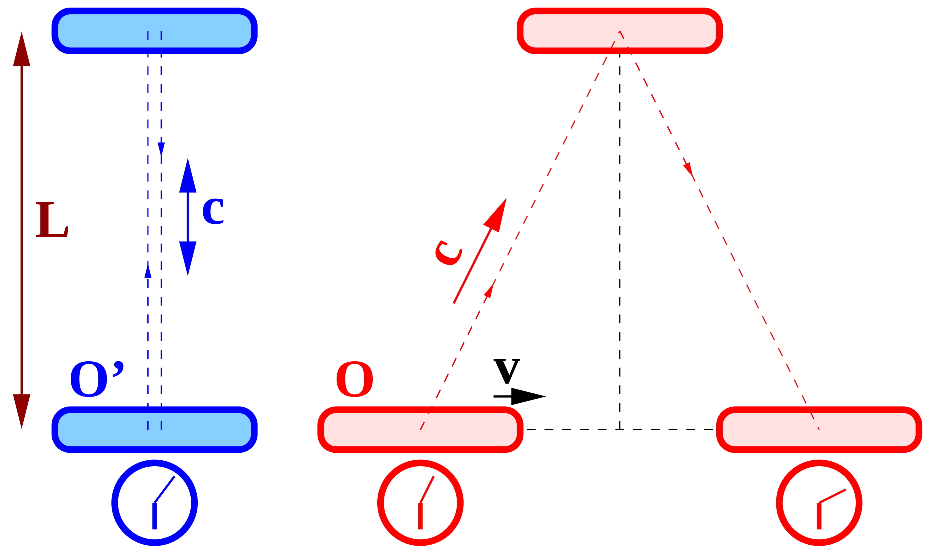


Dylatacja czasu

Wzgledność czasu

Obserwator O' odmierza czas przy pomocy zegara świetlnego: takt $\Delta t' = \frac{2l}{c}$

Dla obserwatora O światło pokonuje dłuższą drogę $\Rightarrow$ $\Delta t = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}}$



Dylatacja czasu: $\Delta t = \gamma \Delta t'$

Dla obserwatora O zegar w O' chodzi wolniej !

Wynika to też wprost ze wzoru na transformację Lorentza:

$$c\,\Delta t \;=\; \gamma\, c\, \Delta t' + \gamma\, \beta\, \Delta x'$$

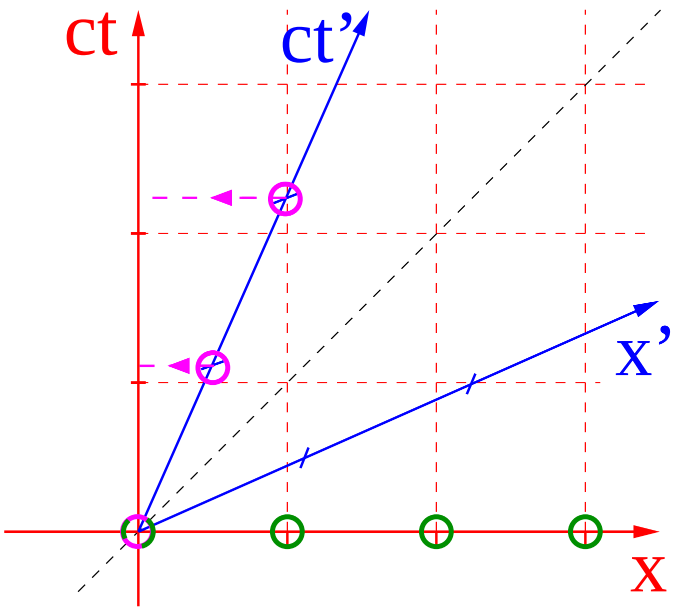
W układzie O' zegar spoczywa, czyli $\Delta x' \equiv 0$

$\Rightarrow$ w każdym innym układzie zegar będzie “chodził” wolniej! $\Delta t \geq \Delta t'$

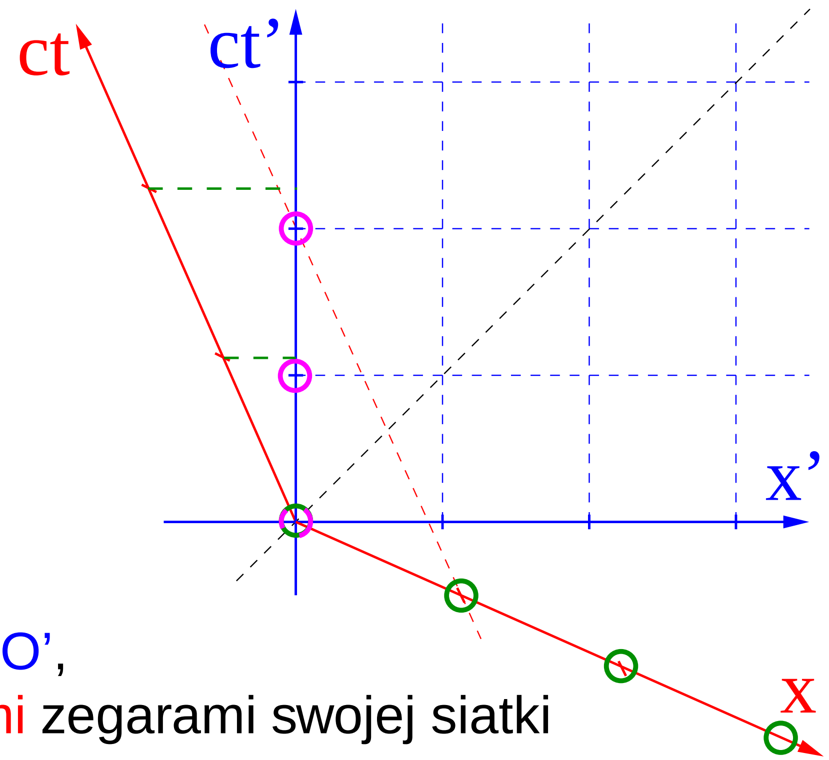
Wybór zegara, który obserwujemy łamie symetrie między układami.

Dylatacja czasu

Zegar układu O' obserwowany z ukladu O



$\Longleftrightarrow$



Problem nie jest symetryczny: zegar spoczywa w O',
obserwator O porównuje jego wskazania z różnymi zegarami swojej siatki

Obserwator O stwierdzi, że zegar w O' chodzi wolniej: $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$

Obserwator O' stwierdzi, że pomiar był źle wykonany, bo zegary w O

- nie są zsynchronizowane,
- chodzą za wolno.

Dylatacja czasu

Pomiar

Eksperyment z zegarami atomowymi w samolocie (Hafele i Keating, 1972)

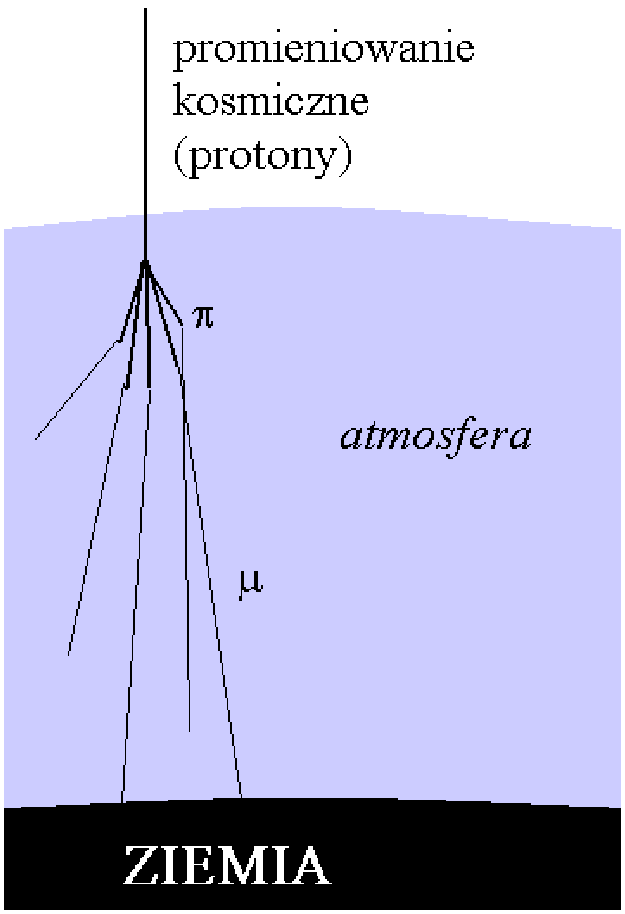
Przewidywania [ns]	Lot na wschód	Lot na zachód
efekt kinematyczny	–184 ± 18	96 ± 10
efekt grawitacyjny	144 ± 14	179 ± 18
suma	–40 ± 23	275 ± 21

Wyniki eksperymentów

zegar 1	–57	277
zegar 2	–74	284
zegar 3	–55	266
zegar 4	–51	266
Średnia	–59 ± 10	273 ± 7

Dylatacja czasu

Czas życia cząstek

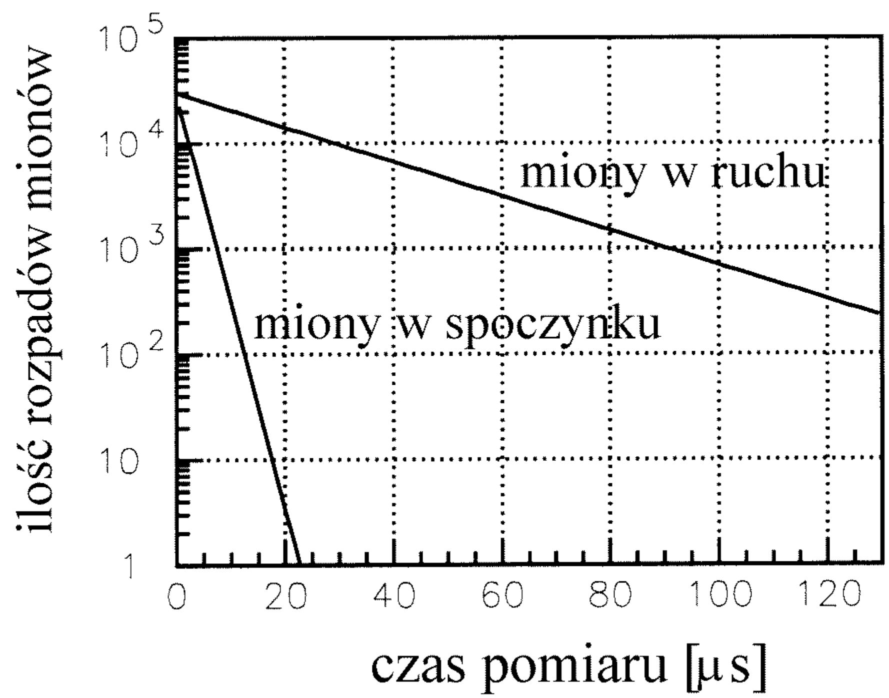


Czas życia mionu (w spoczynku): τ = 2.2 μs

Gdyby nie było dylatacji czasu: średni zasięg $\beta c\tau \leq$ 659 m

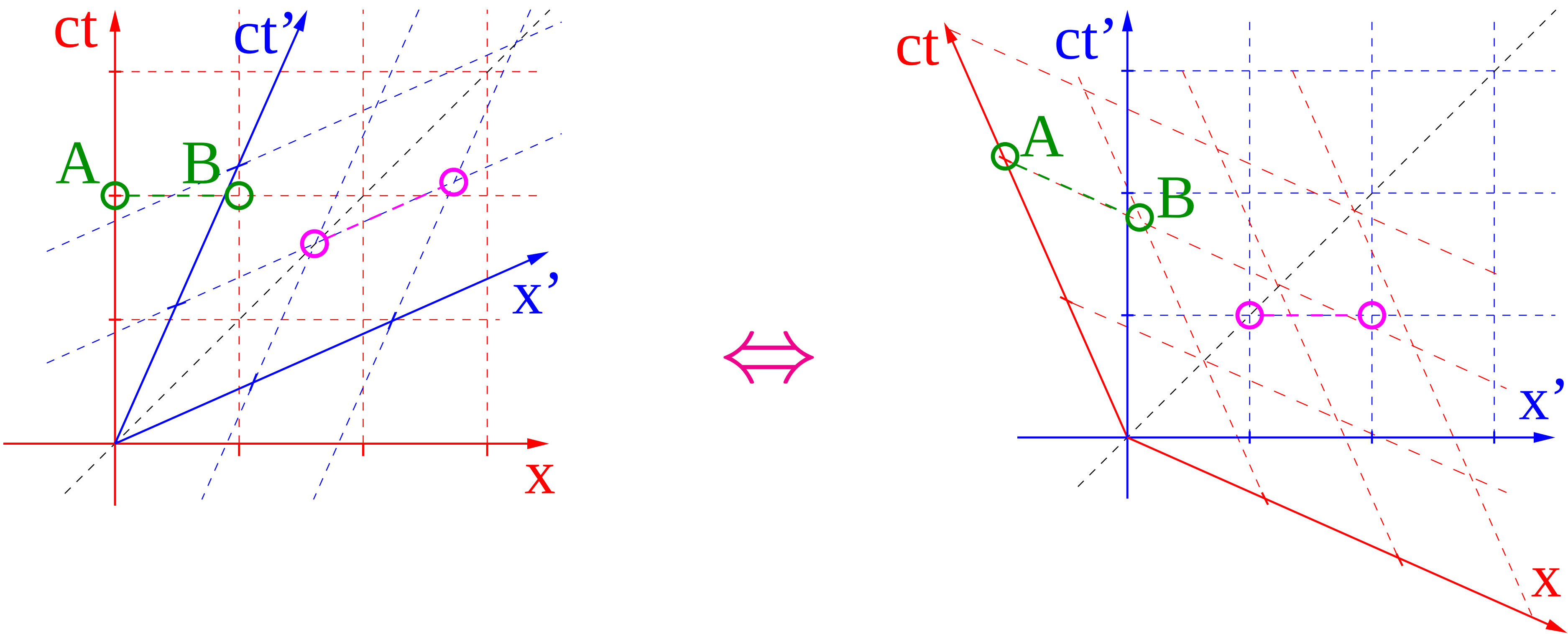
Miony produkowane w górnych warstwach atmosfery mają jednak bardzo duże energie: $\langle E\rangle \sim$ 3 GeV $\Rightarrow \gamma \sim$ 30

Bez problemu docierają do powierzni Ziemi: $\beta\gamma c\tau \sim$ 20 km



Transformacja Lorentza

Względność równoczesności



Dwa zdarzenia równoczesne w układzie O nie są równoczesne w układzie O'

Kolejność w jakiej zaobserwuje je obserwator O' zależy od położenia zdarzeń w stosunku do kierunku ruchu względnego.

Transformacja Lorentza

Interwał

Interwał czasoprzestrzenny między dwoma zdarzeniami definiujemy jako:

$$s_{AB} \;=\; (\Delta ct)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

Interwał jest niezmiennikiem transformacji Lorentza ! “odległość” w czasoprzestrzeni

Nie zależy od układu odniesienia, w którym go mierzymy.

Przyczynowość

Jeśli $s_{AB} > 0$ to można znaleźć taki układ odniesienia,
w którym zdarzenia A i B będą zachodzić w tym samym miejscu.

$\sqrt{s_{AB}}$ określa odstęp czasu między zdarzeniami w tym układzie
Jeśli zdarzenia A i B związane są z ruchem jakiejś cząstki $\Rightarrow$ czas własny

$\boxed{s_{AB} > 0 \text{ - interwał czasopodobny}}$

$\Rightarrow$ Zdarzenia A i B mogą być powiązane przyczynowo.
Ich kolejność jest zawsze ta sama.

Transformacja Lorentza

Przyczynowość

Jeśli $s_{AB} < 0$ to można znaleźć taki układ odniesienia,
w którym zdarzenia A i B będą zachodzić w tej samej chwili.

$\sqrt{-s_{AB}}$ określa odległość przestrzenną między zdarzeniami w tym układzie
np. mierzona długość ciała (A i B - pomiary położenia końców)

$\boxed{s_{AB} < 0 \text{ - interwał przestrzeniopodobny}}$

$\Rightarrow$ Zdarzenia A i B NIE mogą być powiązane przyczynowo !
Kolejność zdarzeń zależy od układu odniesienia.

Jeśli $s_{AB} = 0$ to w żadnym układzie odniesienia
zdarzenia A i B nie będą zachodzić w tej samej chwili ani w tym samym miejscu

$\boxed{s_{AB} = 0 \text{ - interwał zerowy}}$

Zdarzenia A i B może połączyć przyczynowo jedynie impuls świetlny

Transformacja Lorentza

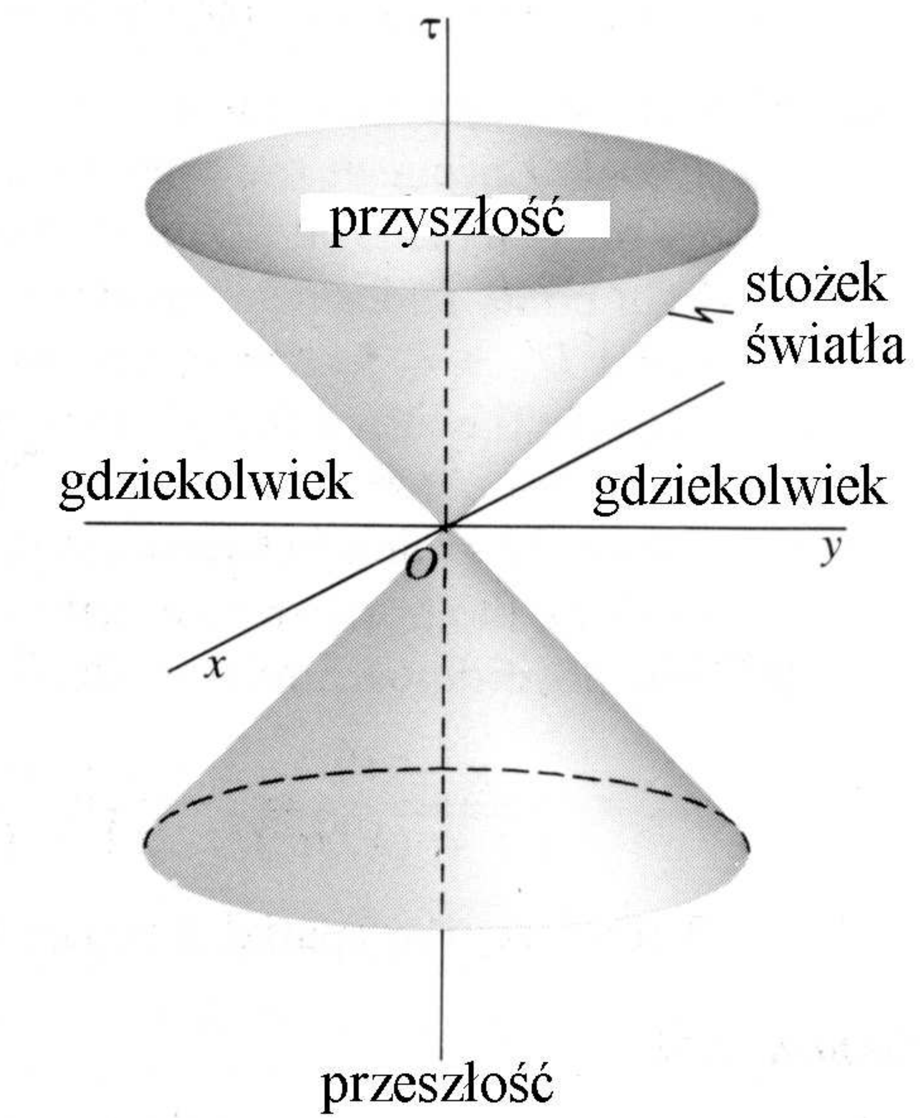
Przyczynowość

O - "tu i teraz"

$s_{OA} > 0$ i $t_A > 0$
bezwzględna przyszłość: zdarzenia na które możemy mieś wpływ

$s_{OA} < 0$
zdarzenia bez związku przyczynowego

$s_{OA} > 0$ i $t_A < 0$
bezwzględna przeszłość: zdarzenia które mogły mieś wpływ na nas



Skrócenie Lorentza

O' - układ związany z rakietą o długości L_0.

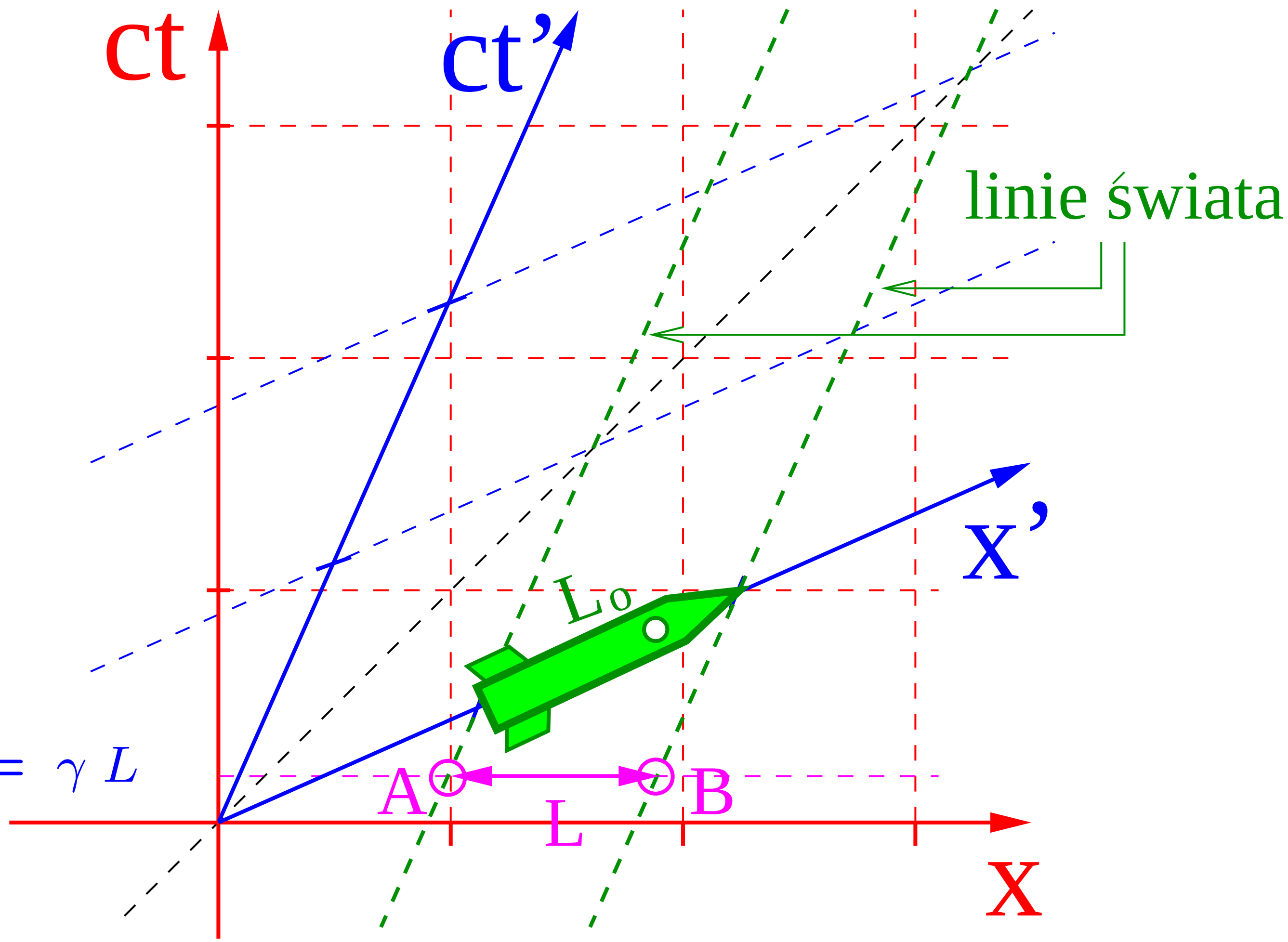
Pomiar długości:
równoczesny pomiar położenia obu końców.

Pomiar AB w układzie O:

$$\Delta x_{AB} = L$$
$$\Delta t_{AB} \equiv 0 \qquad (!)$$

W układzie O':

$$L_0 \equiv \Delta x'_{AB} = \gamma\,\Delta x_{AB} = \gamma\,L$$
$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{\gamma}\,L_0$$



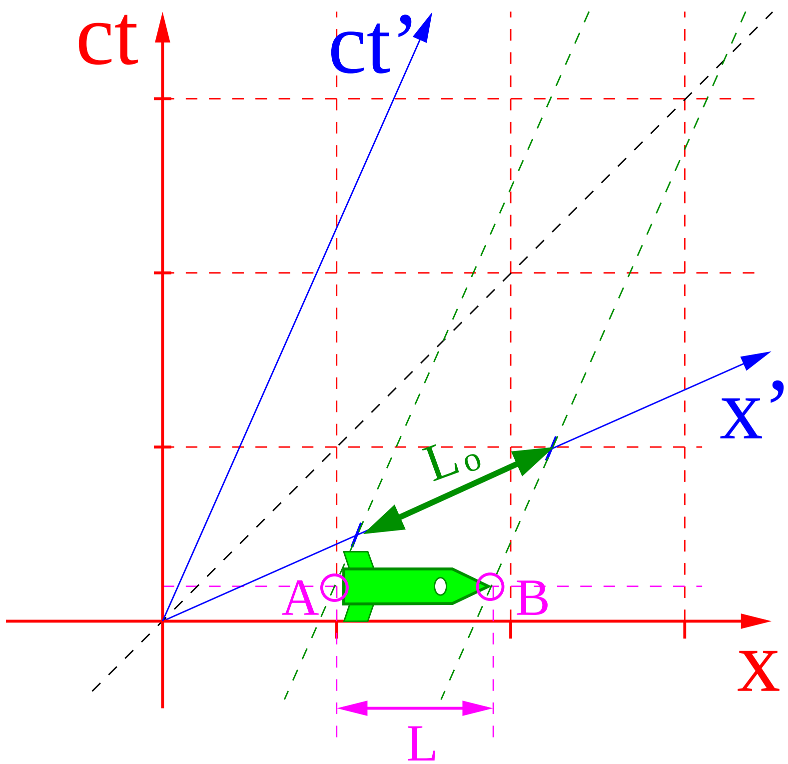
skrócenie Lorentza

$\Delta t'_{AB} \neq 0$!!!

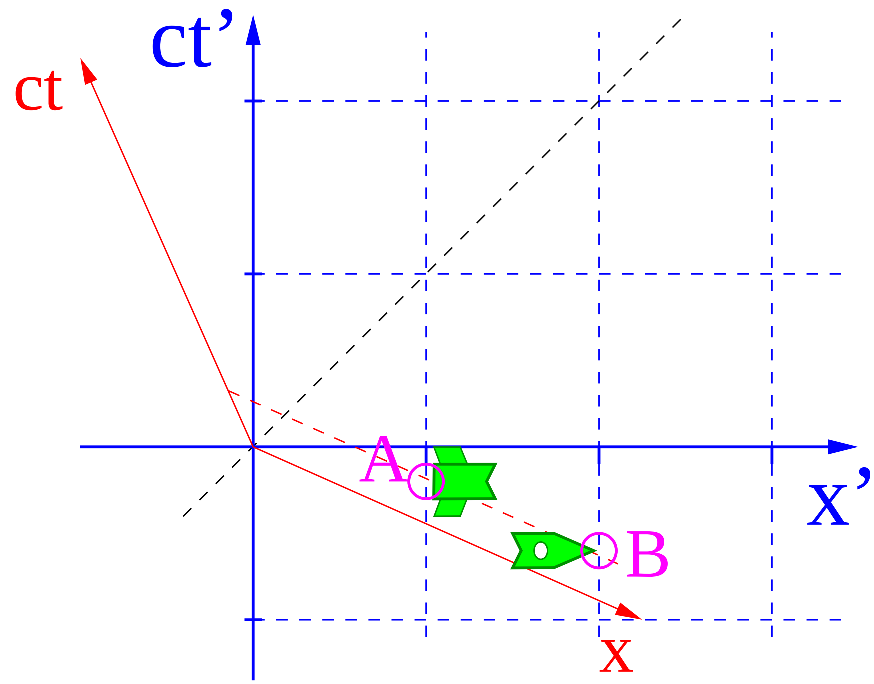
Skrócenie Lorentza

Skrócenie Lorentza ma związek ze względnością równoczesności:

Obserwator O uważa, że równocześnie zmierzył położenie obu końców rakiety (zdarzenia A i B):

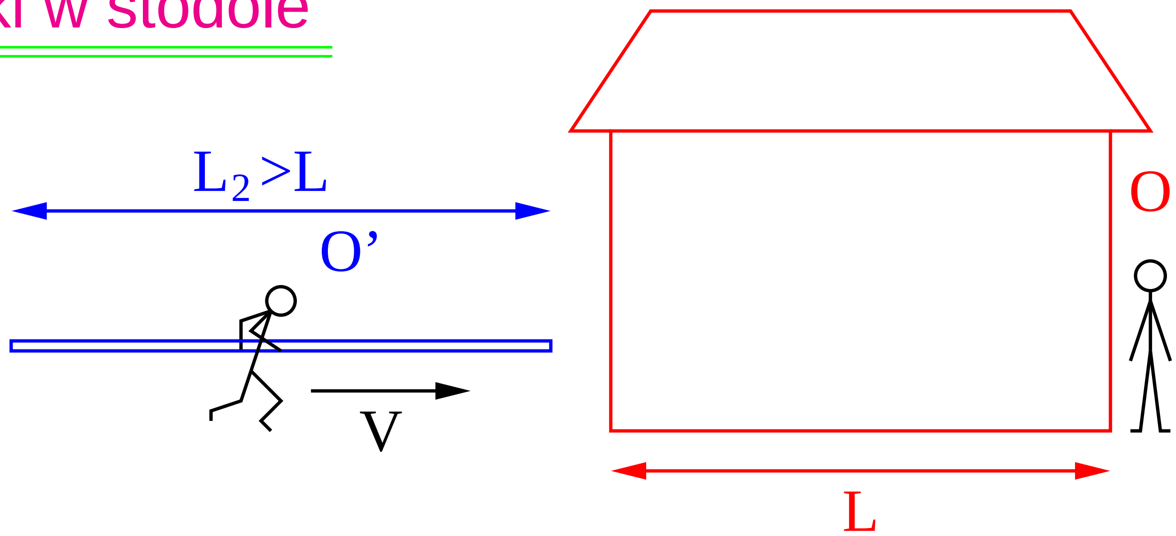


Obserwator O' stwierdzi, że wcześniej zmierzono położenie przodu niż tyłu rakiety ⇒ rakieta przesunęła się ⇒ zły pomiar



Skrócenie Lorentza

Paradoks “tyczki w stodole”



Obserwator O powie, że tyczka się skóciła i zmieściła w stodole. (jeśli $\frac{L_2}{\gamma} < L$)

Biegacz O’ stwierdzi, że to stodoła się skróciła. Tyczka nie mogła się w niej zmieścić.

Obaj mają rację !!!

Różni ich zdanie na temat kolejności zdarzeń: minięcia wrót stodoły przez końce tyczki.

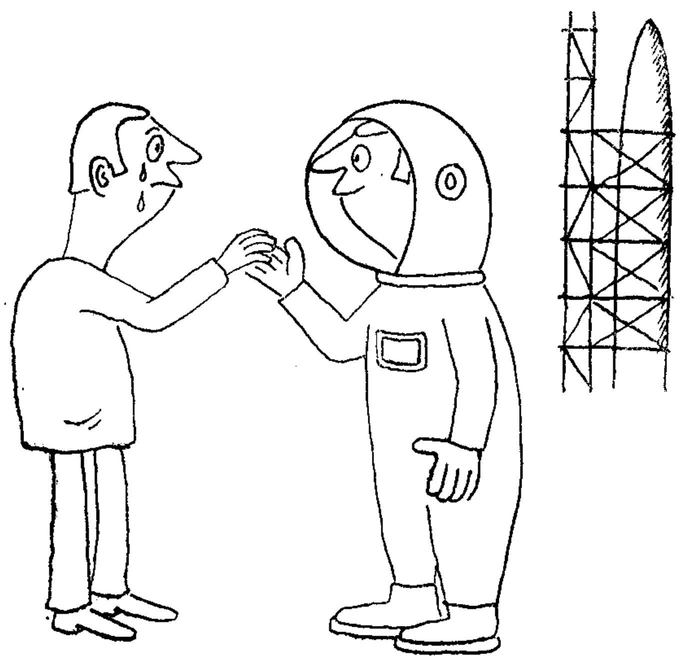
Zdarzenia te są rozdzielone przestrzennie ($s < 0$) - kolejność zależy od układu...

Paradoks bliźniąt

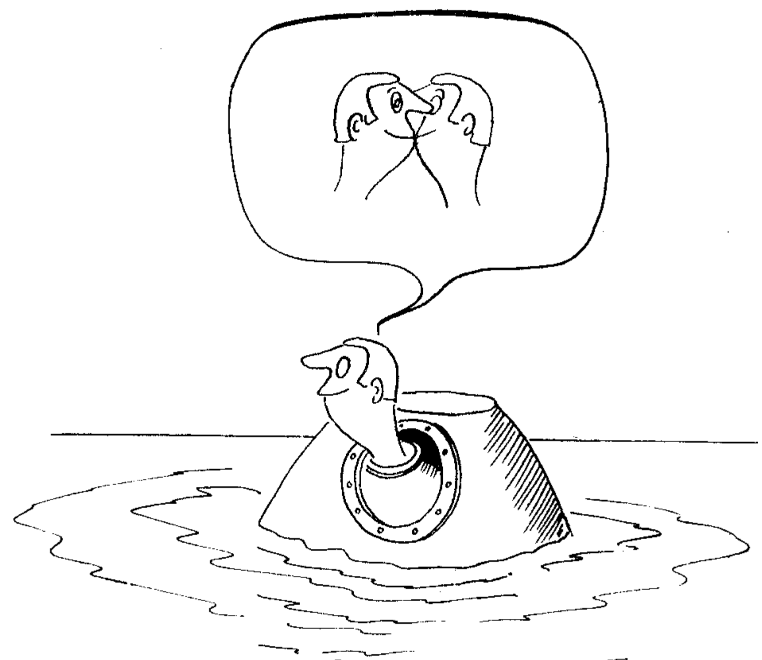
Kosmonauta wyrusza w podróż na $\alpha\ Cen$, jego brat bliźniak zostaje na Ziemi.

Obaj bracia - obserwatorzy mierzą czas pomiędzy dwoma zdarzeniami:

wylotem rakiety



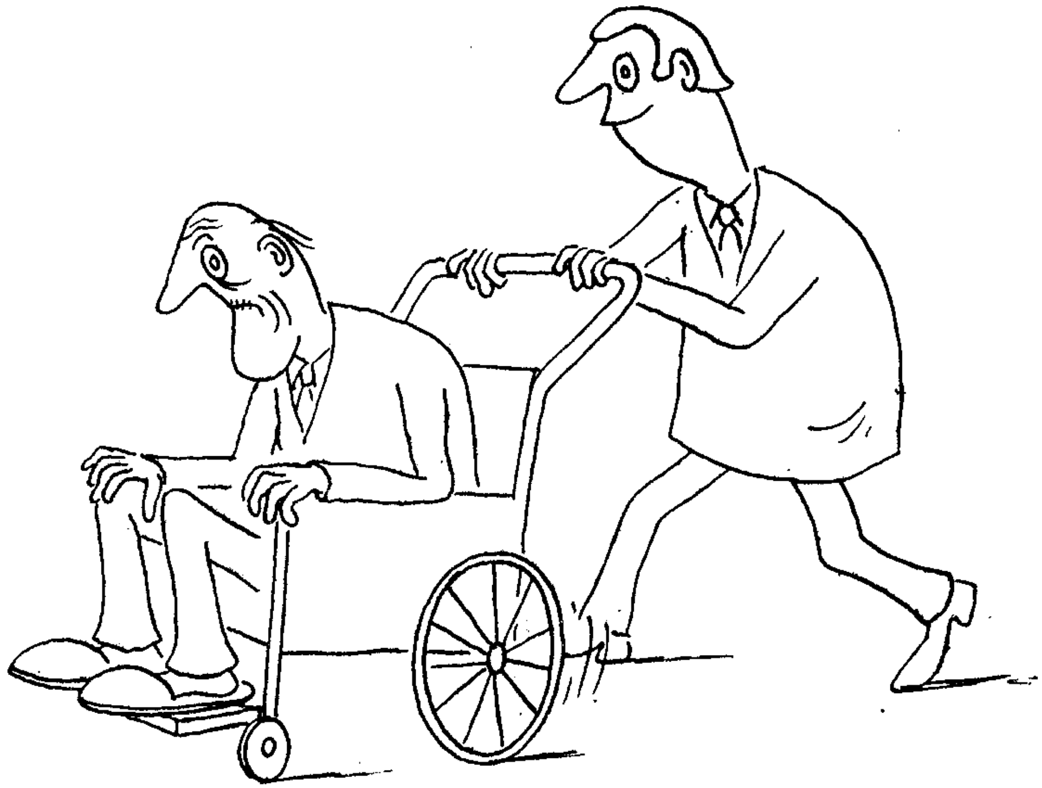
powrotem na Ziemię



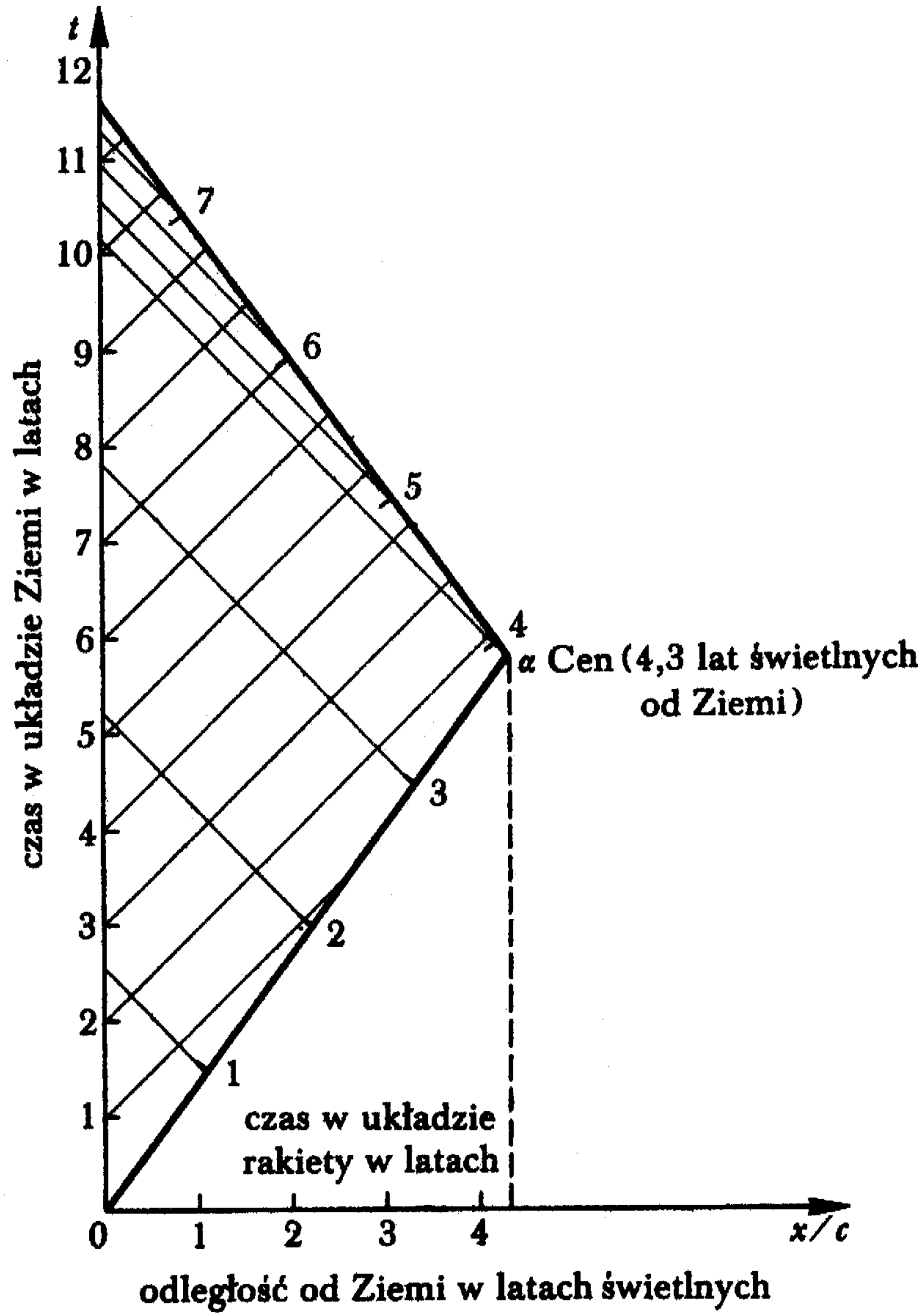
Poruszają się względem siebie z prędkością porównywalną z prędkością światła
$\Rightarrow$ każdy z nich stwierdzi, że jego brat powinien być młodszy (dylatacja czasu)

Paradoks bliźniąt

Ale dla obu z nich oba zdarzenia zaszły
też w tym samym miejscu
⇒ powinni być w tym samym wieku !
(z niezmienniczości interwału)



Jak rozstrzygnąć czy i który z braci będzie młodszy ?



Paradoks bliźniąt

Przyjmijmy, że podróż odbywa się z prędkością $v = 0.745\ c$ $\quad (\gamma = 1.5)$

Według obserwatora na Ziemi podróż zajmie

$$\frac{2 \times 4.3}{0.745} \approx 11.5 \text{ lat}$$

Dzięki dylatacji czasu, mierzony przez kosmonautę czas podróży skróci się do:

$$\frac{11.5 \text{ lat}}{1.5} \approx 7.7 \text{ lat}$$

$\Leftarrow$ impulsy świetlne wysyłane przez obu braci co rok

Paradoks bliźniąt

Dla kosmonauty odległość skróci się do $\frac{4.3}{1.5} \approx 2.9$ lat świetlnych (skrócenie Lorentza)

Podróż będzie jego zdaniem trwała $\frac{2 \times 2.9}{0.745} \approx 7.7$ lat (to samo powiedział jego brat)

Ale dla kosmonauty bieg zegarów na Ziemi ulega spowolnieniu (dylatacja czasu)

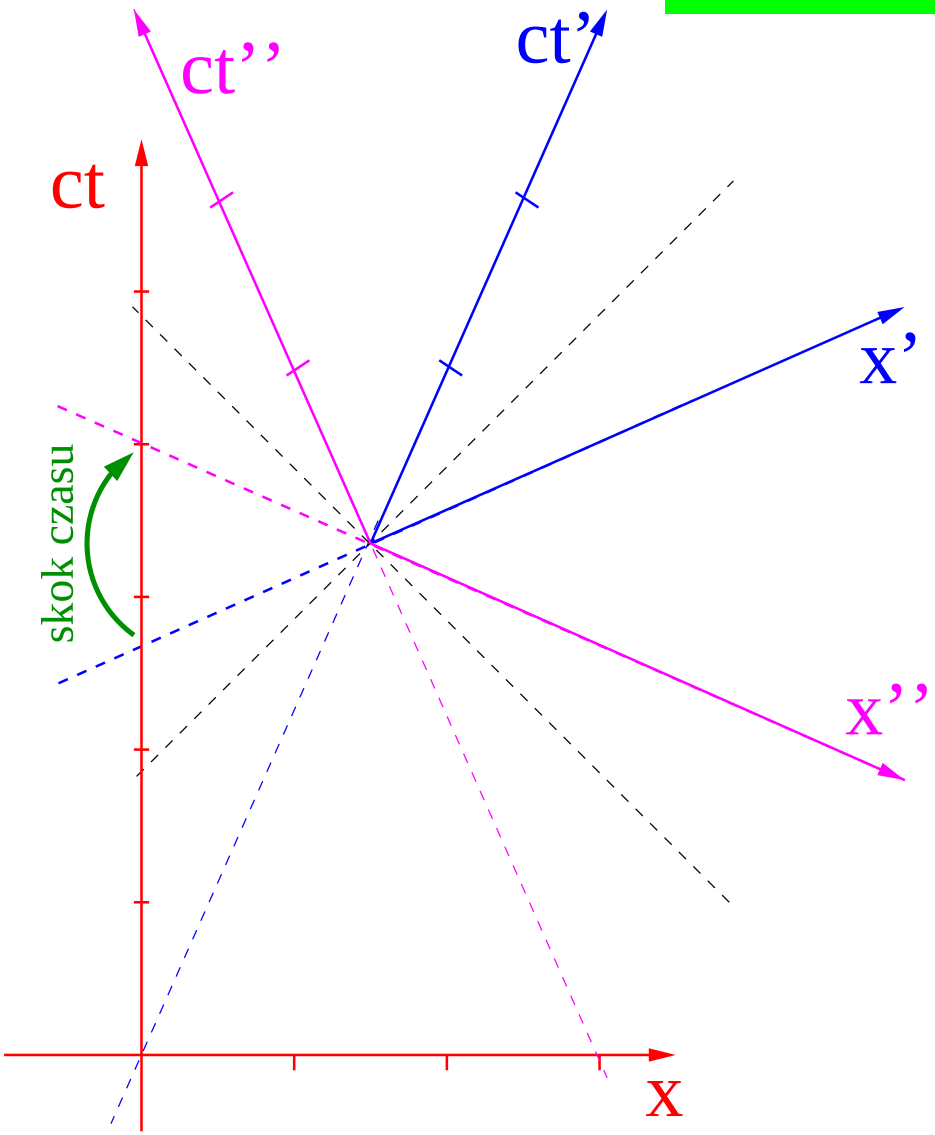
W czasie jego lotu do układu α-Centaura na Ziemi mija tylko $\frac{0.5 \times 7.7 \text{ lat}}{1.5} \approx 2.6$ lat,

tyle samo czasu mija na Ziemi w czasie jego podróży powrotnej.

Łącznie powinno minąć $\frac{7.7 \text{ lat}}{1.5} \approx 5.1$ lat, ale brat na Ziemi stwierdzi, że minęło 11.5 lat

$\boxed{\text{Gdzie znika ponad 6 lat !?}}$

Paradoks bliźniąt



Kosmonauta obserwuje wskazania zegara na Ziemi.

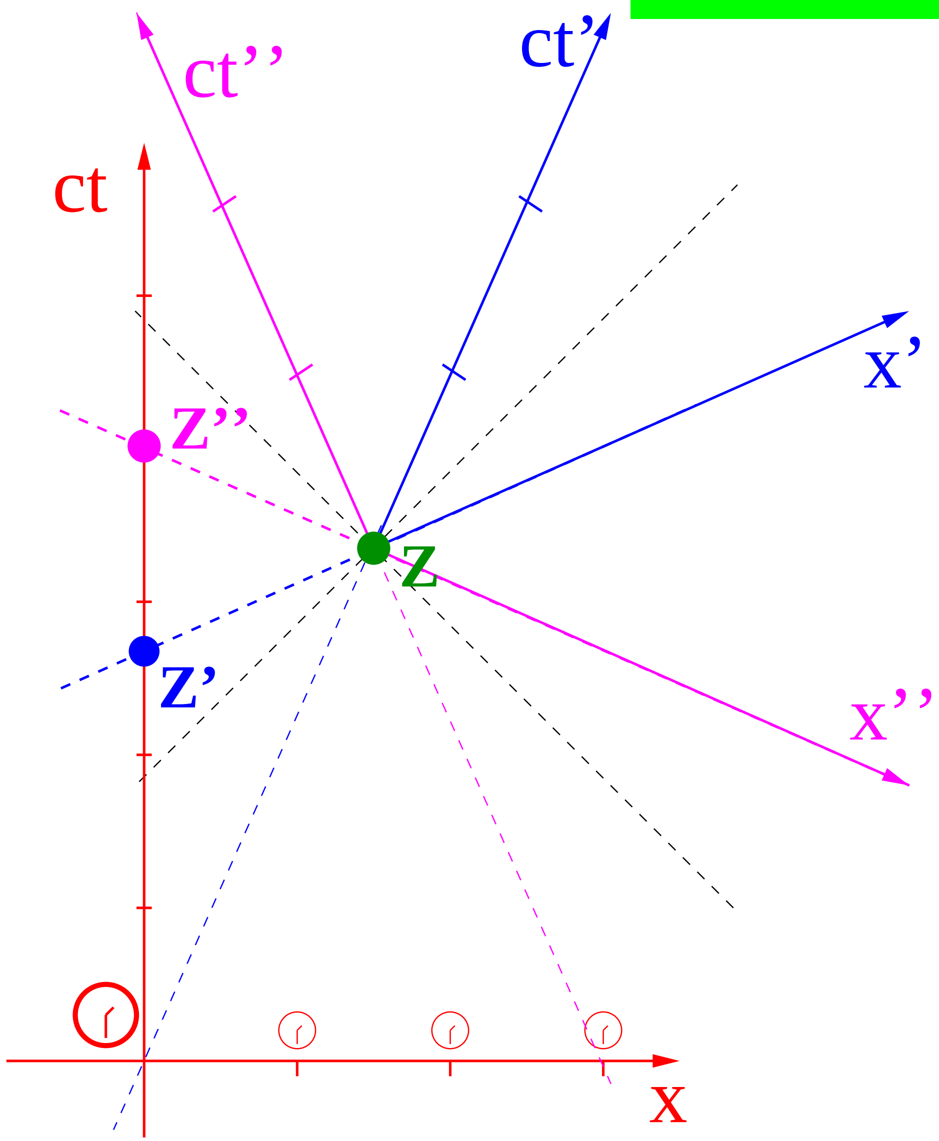
Na zegarze tym przybywa **"skokowo"** ponad 6 lat w momencie zmiany przez kosmonautę układu współrzędnych.

Zegar na Ziemi nie może być wprost porównywany z zegarem kosmonauty
$\Rightarrow$ zawsze porównywany jest z najbliższym zegarem układu współporuszającego się.

$\Rightarrow$ Istotna jest synchronizacja zegarów

Synchronizacja zmienia się przy zmianie układu odniesienia.

Paradoks bliźniąt



Kosmonauta obserwuje wskazania zegara na Ziemi porównując go zawsze z najbliższym zegarem jego układu.

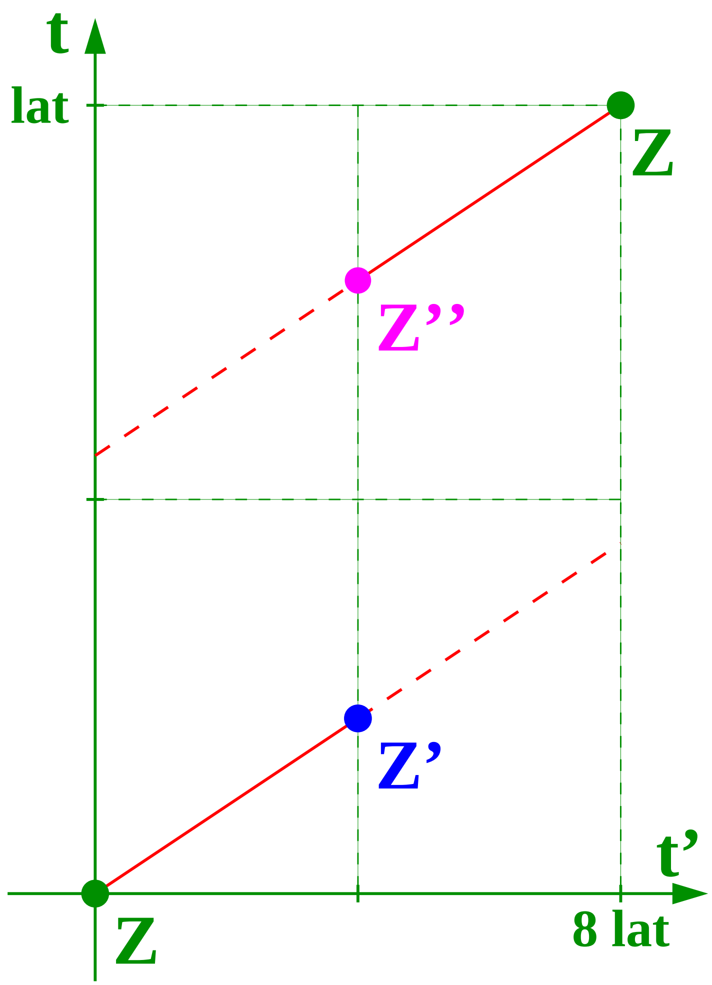
W chwili startu ($t = t' = 0$) jest to jego własny zegar **Z**.

Gdy dotrze do celu są to zegary **Z'** (przed) i **Z”** (po zawróceniu).

Także obserwator na Ziemi może obserwować wskazania zegarów kosmonauty (**Z**, **Z'** i **Z”**) porównując je ze swoją siatką zegarów.

Paradoks bliźniąt

Czas na Ziemi według kosmonauty



Rakieta

Dolatując do celu, po $t' \sim$ 4 latach (według swojego zegara **Z**), kosmonauta stwierdza, że na Ziemi minęło $t <$3 lata.

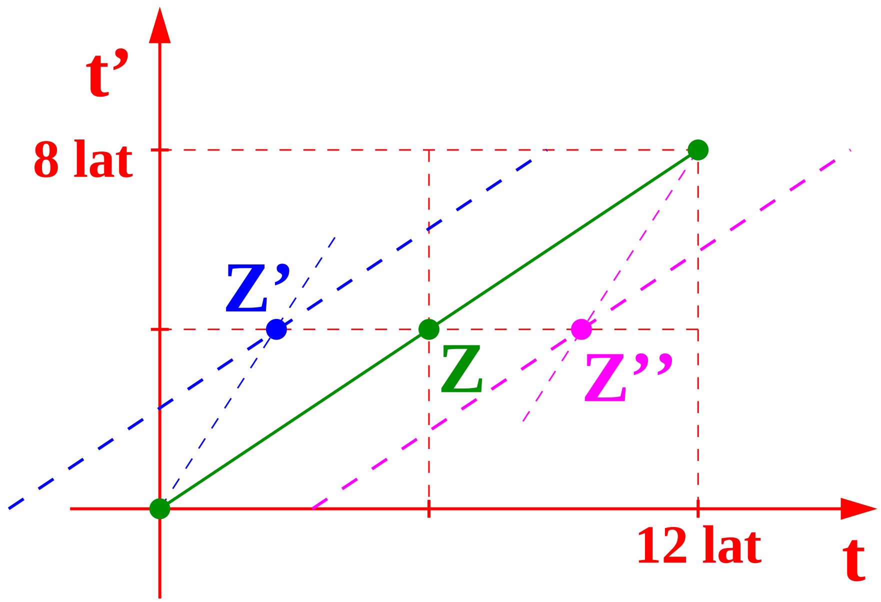
Kosmonauta opiera się na wskazaniach zegara **Z'** zsynchronizowanego z **Z**.

Po zawróceniu informacja o wskazaniach zegara na Ziemi pochodzi od zegara **Z"**, też zsynchronizowanego z **Z** ale w nowym układzie odniesienia.

Według zegara **Z"** w chwili zawracania zegar na Ziemi wskazywał $t >$9 lat.

Paradoks bliźniąt

Wskazania zegarów kosmonauty rejestrowane przez obserwatora na Ziemi



Ziemia

Według obserwatora na Ziemi bieg zegara **Z** kosmonauty jest spowolniony na skutek dylatacji czasu.

Kosmonauta źle ocenił bieg czasu na Ziemi gdyż:

- najpierw użył zegara **Z'** który spieszył się względem **Z**
- potem użył zegara **Z"** który spóźniał się względem **Z**

Według obserwatora nia Ziemi, zawrócenie rakiety **Z**, oraz zdarzenia porównania czasu na Ziemi z przelatującymi zegarami **Z'** i **Z"** nie były równoczesne.

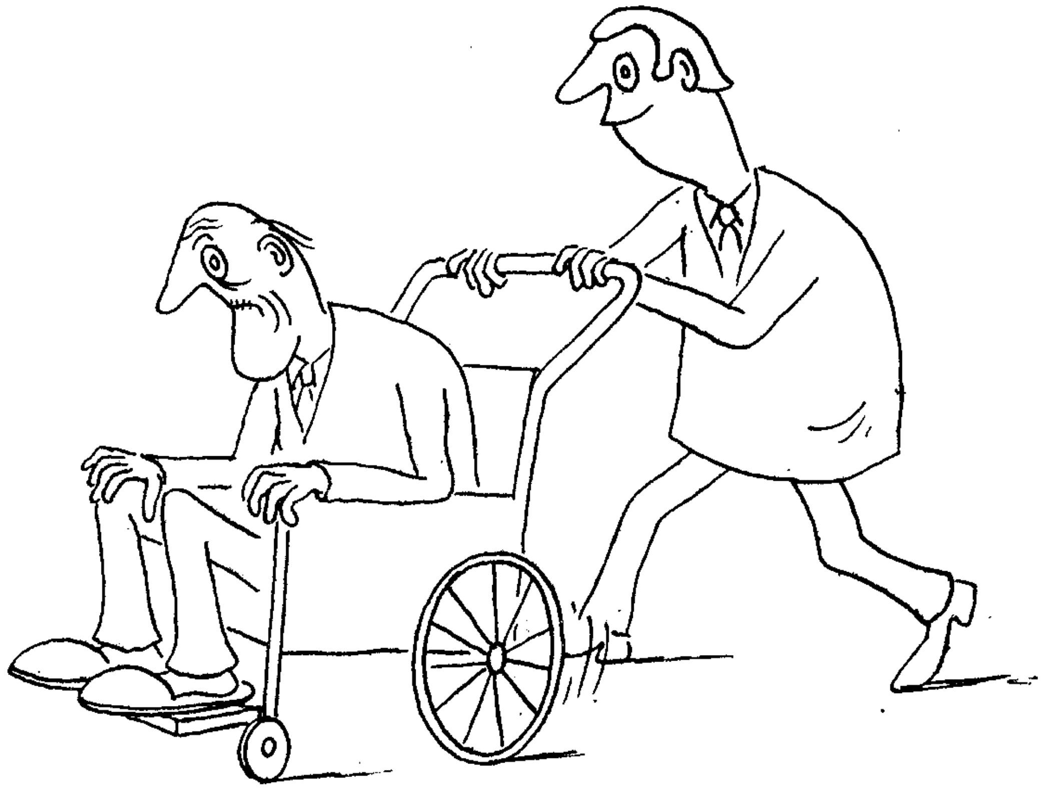
W chwili zawracania zegar **Z'** dawno minął Ziemię, a zegar **Z"** jeszcze do niej nie doleciał.

Paradoks bliźniąt

Dokonany przez kosmonautę pomiar czasu jaki upłynął na Ziemi jest nieprawidłowy, ze względu na zmianę układu odniesienia.

Na ziemi minęło 11.5 lat.

Obaj obserwatorzy zgadzają się, że dla kosmonauty minęło 7.7 lat.

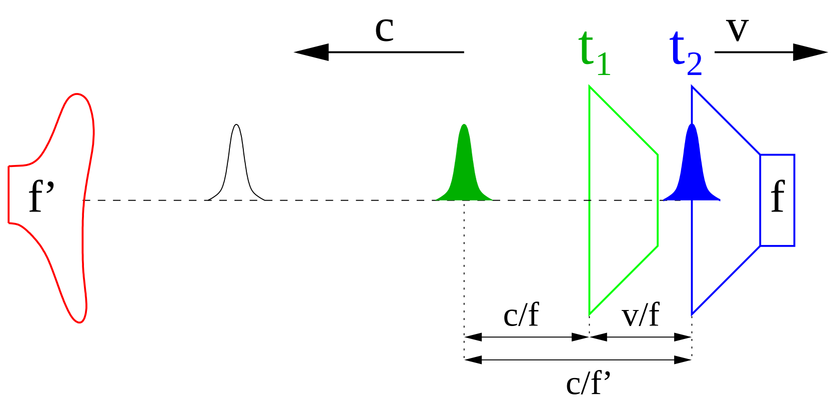


“Ziemianin” kosmonauta

Efekt Dopplera

Dwa przypadki “klasyczne”:

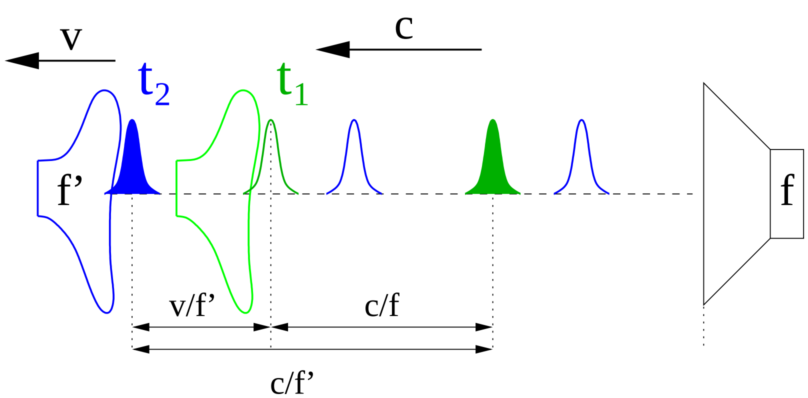
Ruchome źródło



Częstość mierzona przez obserwatora nieruchomego względem ośrodka:

$$f' = \frac{f}{1+\beta}$$

Ruchomy obserwator



Częstość dźwięku mierzona przez ruchomego obserwatora:

$$f' = f\ (1-\beta)$$

Ale światło nie potrzebuje “ośrodka”. Powinien się liczyć tylko ruch względny !...

Efekt Dopplera

Jeśli źródło i/lub obserwator poruszają się z dużymi prędkościami

$\Rightarrow$ należy uwzględnić dylatację czasu

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}$$

Ruchome źródło

Poruszające się źródło drga z częstością γ razy mniejszą:

$$f' = \frac{f/\gamma}{1+\beta} = f\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Ruchomy obserwator

Dla poruszającego się obserwatora czas biegnie wolniej, mierzona częstość jest γ razy większa:

$$f' = \gamma\, f\, (1-\beta) = f\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$\Rightarrow$ Pełna symetria !

Efekt Dopplera

Ruch źródła

Wysłanie impulsu w układzie O':

$$A \; : \; (T, 0, 0, 0)$$

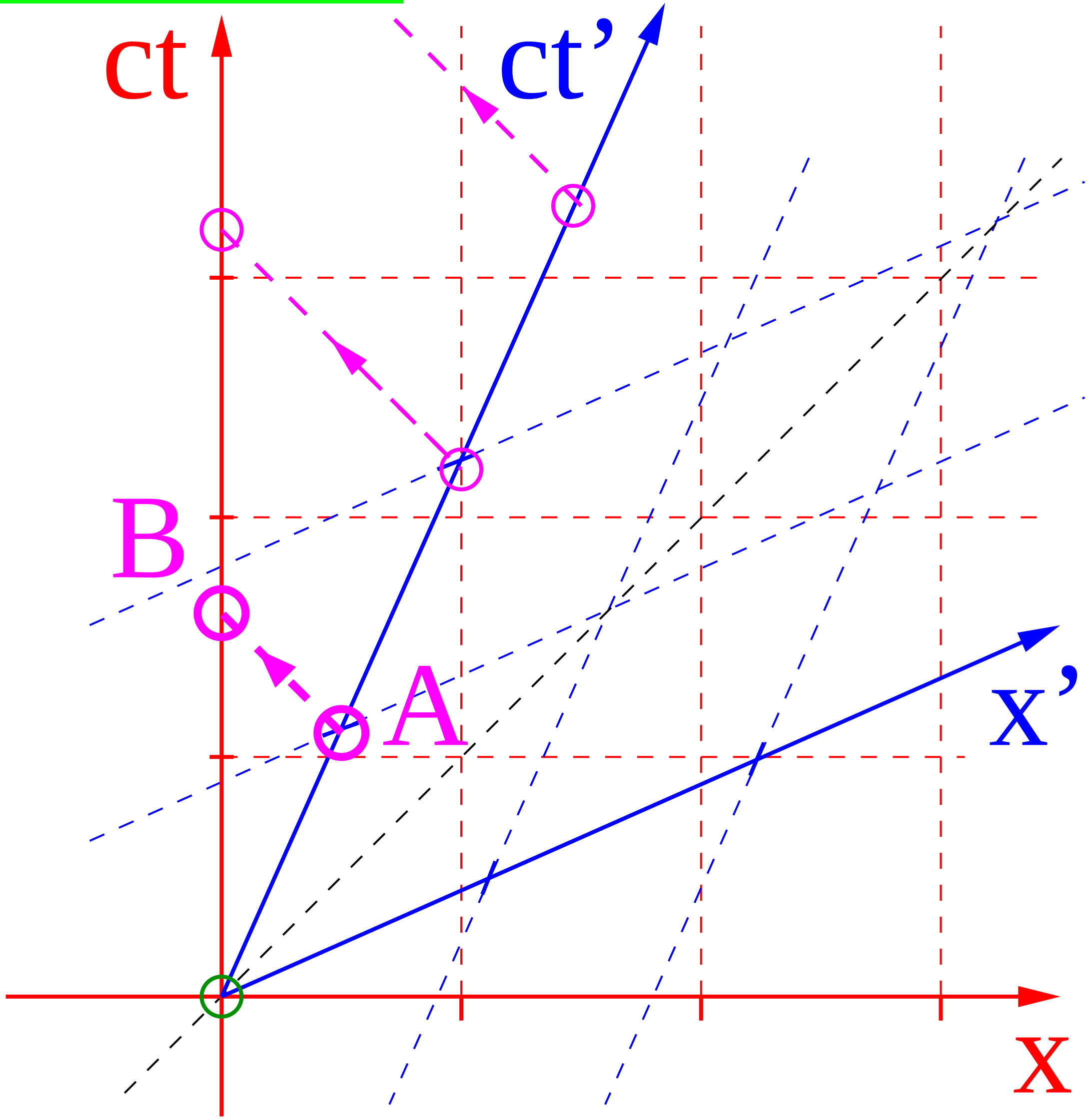
W układzie O: $(c = 1)$

$$A \; : \; (\gamma\, T, \beta\gamma\, T, 0, 0)$$

Na pokonianie odległości $\beta\gamma T$ światło potrzebuje $\beta\gamma\, T$ czasu $\Rightarrow$ dotarcie impulsu światła do obserwatora O:

$$B \; : \; (\gamma\, T + \beta\gamma\, T, 0, 0, 0)$$

$$T' \; = \; \gamma(1+\beta)\, T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, T$$



Efekt Dopplera

Wysłanie impulsu w układzie O:

$$A \quad : \quad (T, 0, 0, 0)$$

Dotarcie impulsu do obserwatora O':

$$B \quad : \quad (T + \Delta T, \Delta T, 0, 0)$$

Prędkość O' względem O:

$$\beta = \frac{\Delta T}{T + \Delta T} \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{\beta}{1 - \beta}\, T$$

Współrzędne dotarcia impulsu w O:

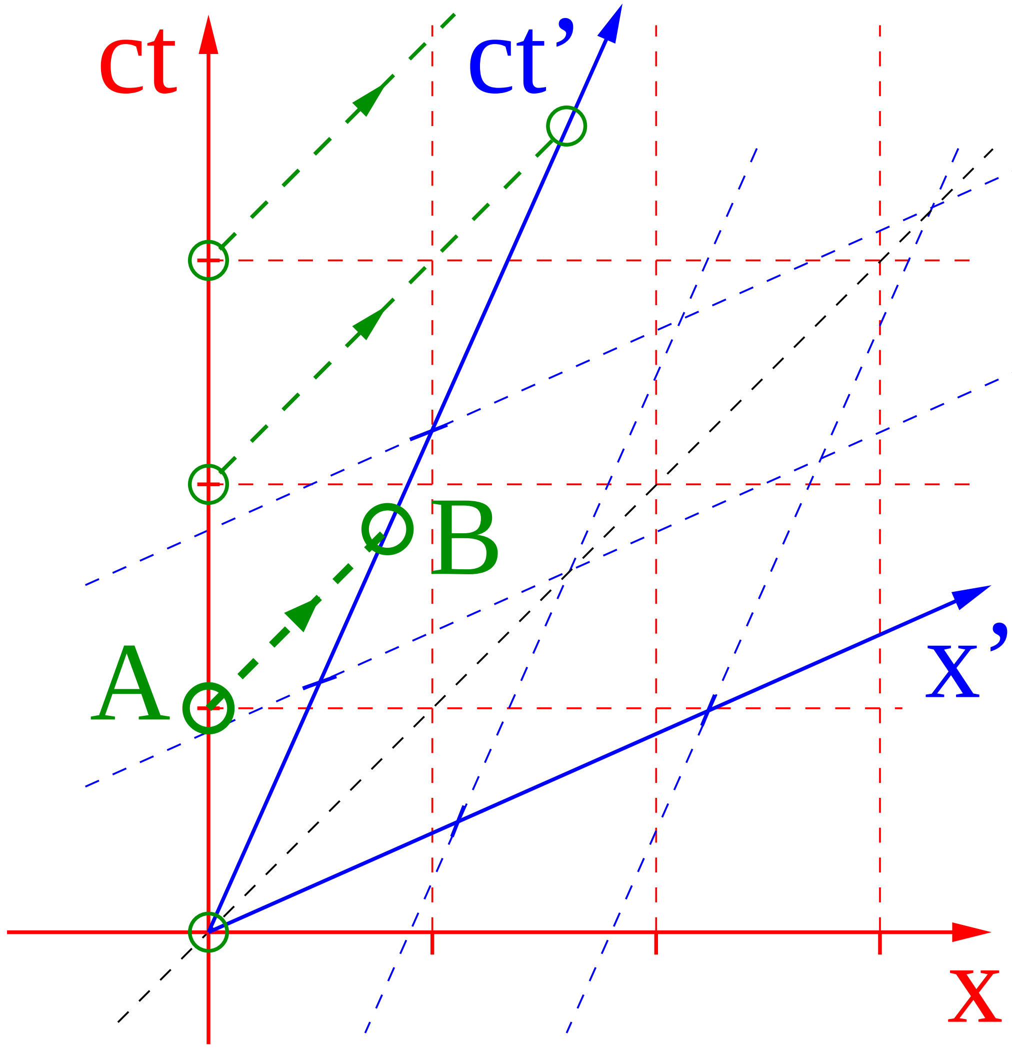
$$B \quad : \quad (\frac{T}{1-\beta}, \frac{\beta\, T}{1-\beta}, 0, 0)$$

$\Rightarrow$ według O' (dylatacja czasu)

$$B \quad : \quad (\frac{T}{\gamma(1-\beta)}, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \; T' \; = \; \frac{T}{\gamma(1-\beta)} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\; T$$

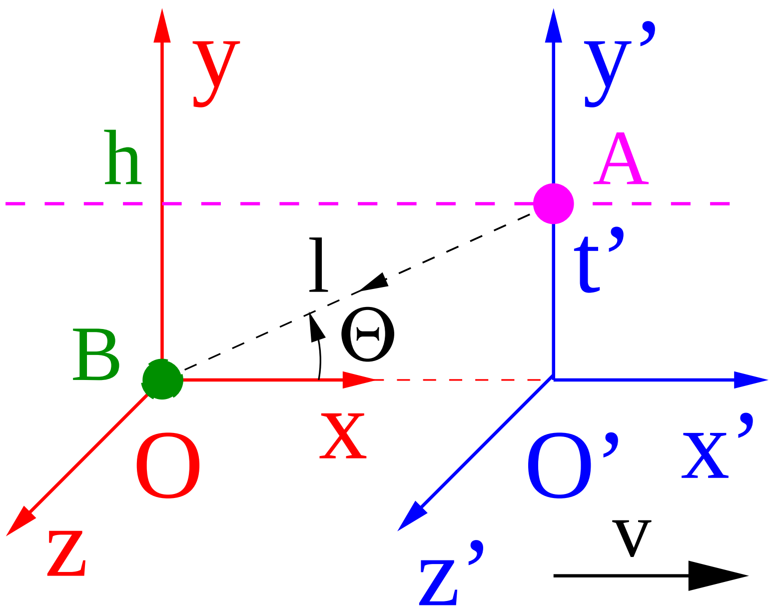
Ruch obserwatora



Efekt Dopplera

Przypadek ogólny

Źródło światła przelatuje w odległości h od obserwatora:



t - czas wysłania impulsu mierzony w układzie O':

$$A \; : \; (t, 0, h, 0)$$

Współrzędne tego zdarzenia w układzie O:

$$A \; : \; (\gamma\, t, \gamma\beta\, t, h, 0)$$

$\Rightarrow$ czas dotarcia impulsu do obserwatora O (B):

$$t' \;=\; \gamma t + l \;=\; \gamma t + \sqrt{(\gamma\beta t)^2 + h^2}$$

Różnica dt' między czasami dotarcia dwóch impulsów wysłanych w odstępie czasu dt

$\Rightarrow$ współczynnik przesunięcia dopplerowskiego:

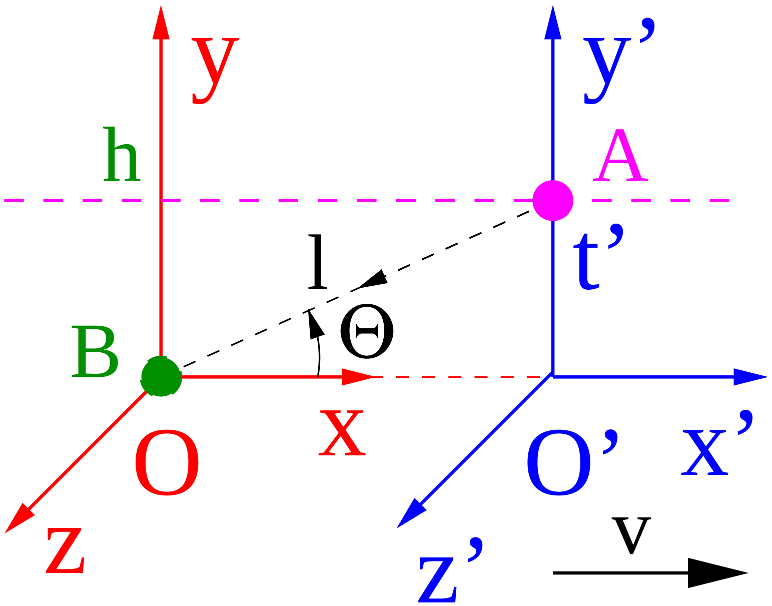
$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{dt'}{dt} \;=\; \gamma + \frac{\gamma^2\beta^2 t}{\sqrt{(\gamma\beta t)^2 + h^2}} \;=\; \gamma\left(1 + \beta\,\frac{x}{l}\right) \;=\; \gamma\,(1 + \beta\ \cos\Theta)$$

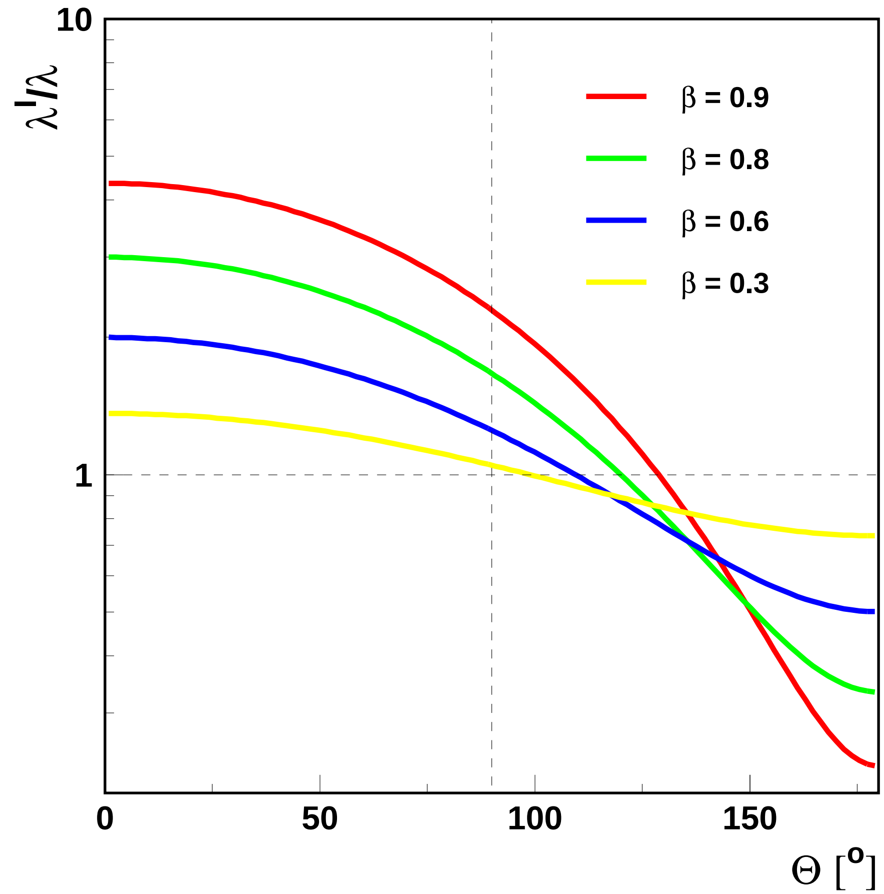
(mierzona / emitowana)

Θ - kąt obserwacji (!)

Efekt Dopplera

Przypadek ogólny





Przesunięcie długości fali:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{T'}{T} = \gamma\,(1 + \beta \cos\Theta)$$

mierzona / emitowana

Zmiana częstości także dla $\Theta = 90^\circ$!!!

Klasycznie nie ma zmiany częstości...

Efekt Dopplera

Efekt Dopplera obserwowany w warunkach laboratoryjnych dla dla fal elektromagnetycznych jest na ogól bardzo niewielki (z wyjątkiem akceleratorów cząstek i ciężkich jonów).

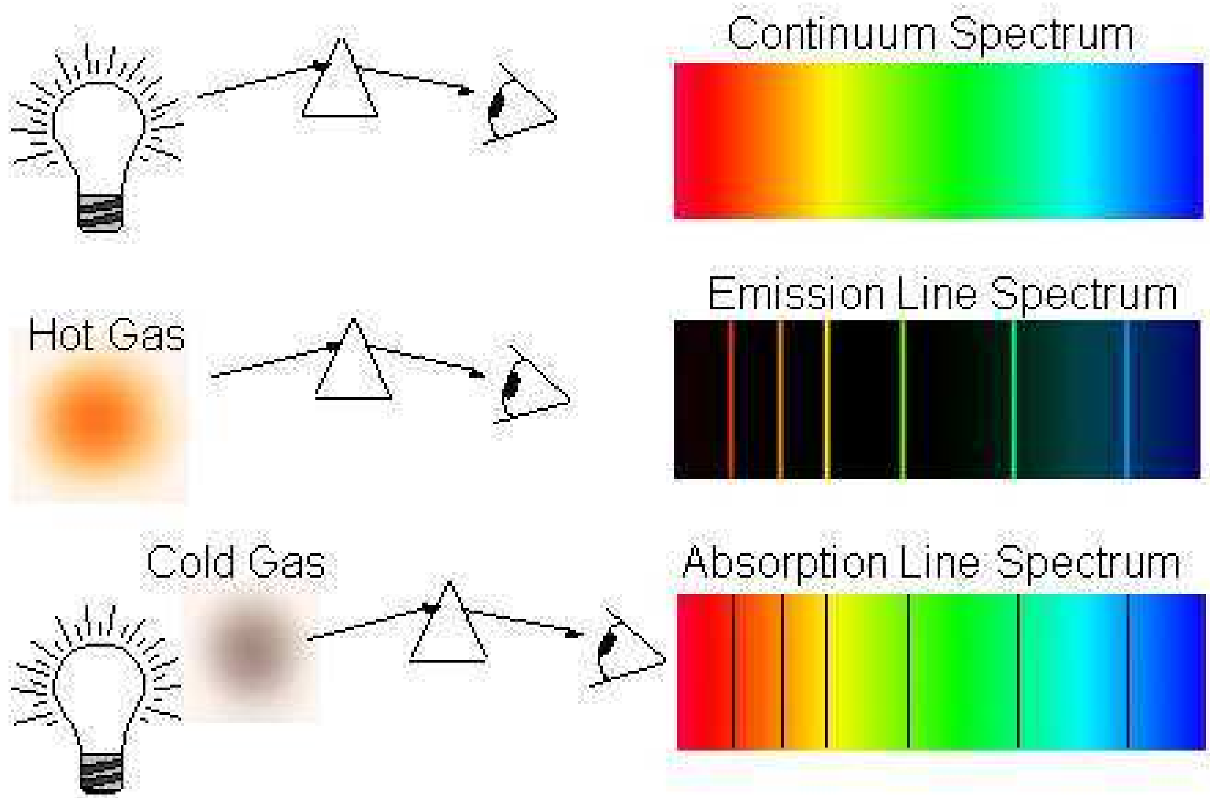
Duże efekty widoczne w obserwacjach astronomicznych

Linie emisyjne

Światło emitowane przez wzbudzone atomy.

Linie absorpcyjne

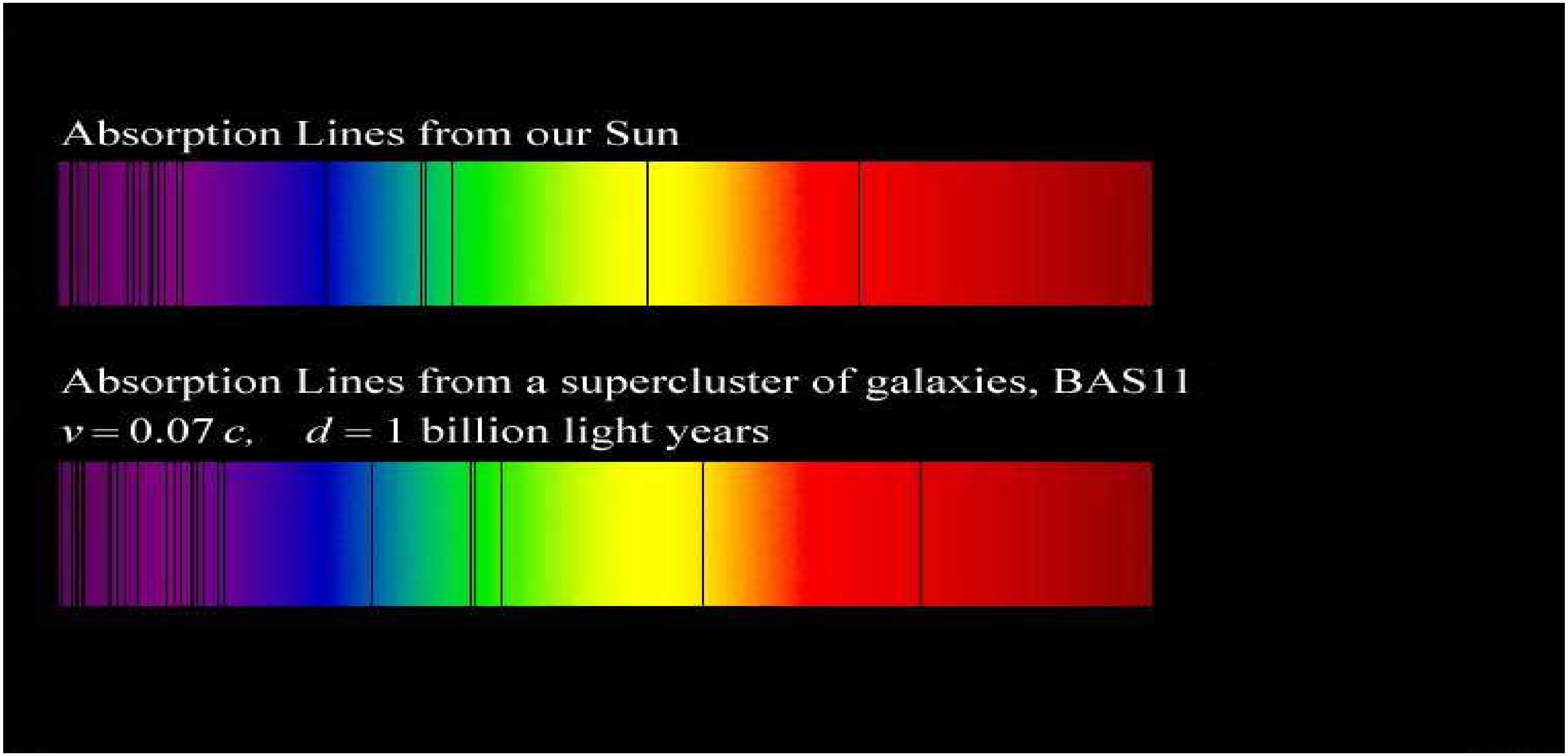
Widoczne w świetle przechodzącym przez gaz.



W obu przypadkach pozycja linii jest ściśle określona (dla danego atomu)

Efekt Dopplera

Mierząc linie absorpcyjne w widmie galaktyk możemy wnioskować o ich ruchu i wyznaczyć ich prędkość względem nas



Prawo Hubbla

Dzięki efektowi Dopplera wiemy, że Wszechświat się rozszerza.

W 1929 roku Edwin Hubble jako pierwszy powiązał obserwowane prędkości mgławic z ich odległością od Ziemi.

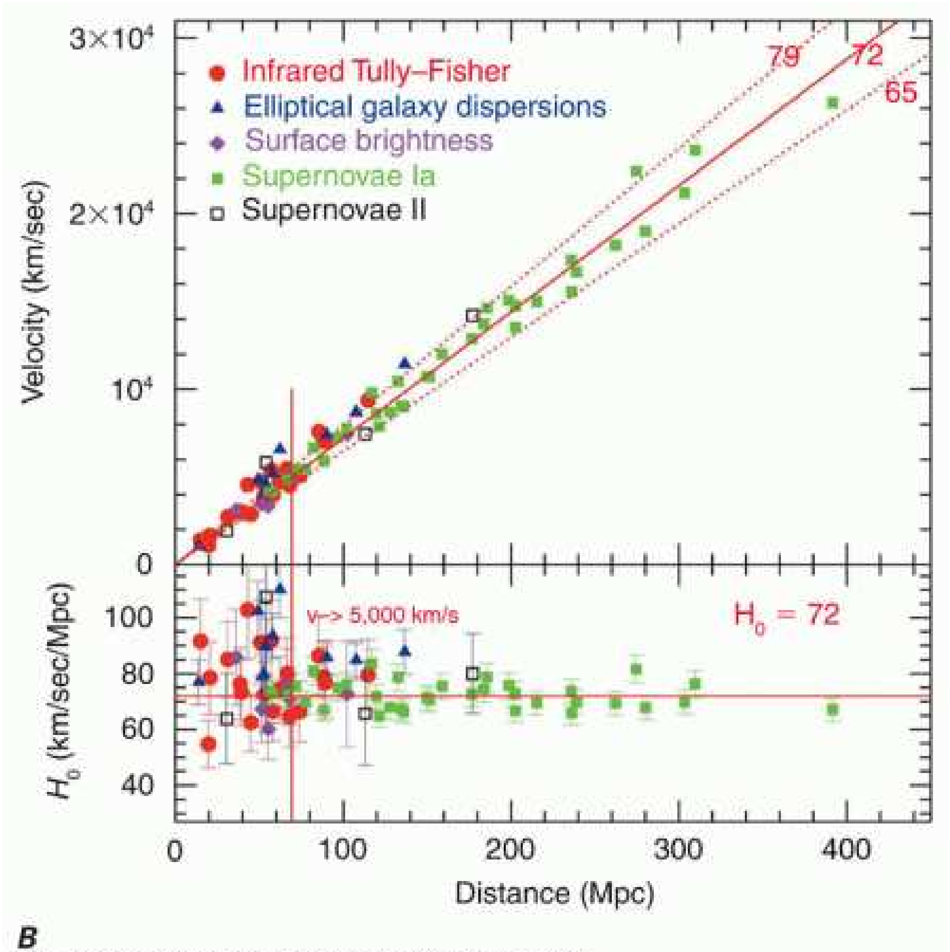
Zauważył on, że prędkość 'ucieczki' rośnie z odległością od Ziemi:

$$v = H \cdot r$$

r - odległość, H - stała Hubbla

Obecne pomiary: $H \sim 72\ km/s/Mpc$

$$1 Mpc \approx 3 \cdot 10^{22} m$$



(Wendy L. Freedman, Observatories of the Carnegie Institution of Washington, and NASA)

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt **Fizyka wobec wyzwań XXI w.**

współfinansowany ze środków Unii Europejskiej

w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego