



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



# Dynamika

## Fizyka I (Mechanika)

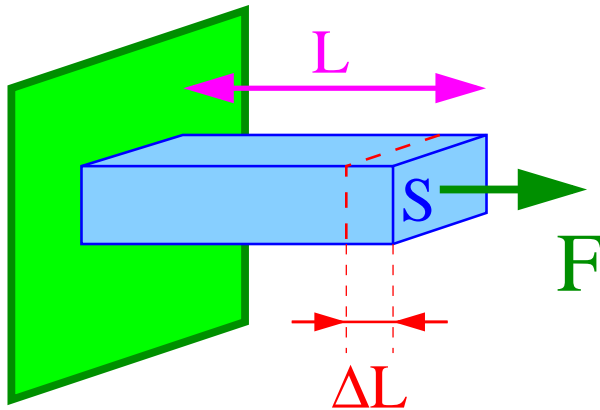
### Wykład VI:

- Siły sprężyste i opory ruchu
- Prawa ruchu w układzie nieinercyjnym
  - ⇒ siły bezwładności
- Zasada zachowania pędu
- Zasada zachowania momentu pędu
- Ruch ciał o zmiennej masie

# Siła sprężysta

## Prawo Hooke'a

Opisuje zależność siły sprężystej od odkształcenia ciała:

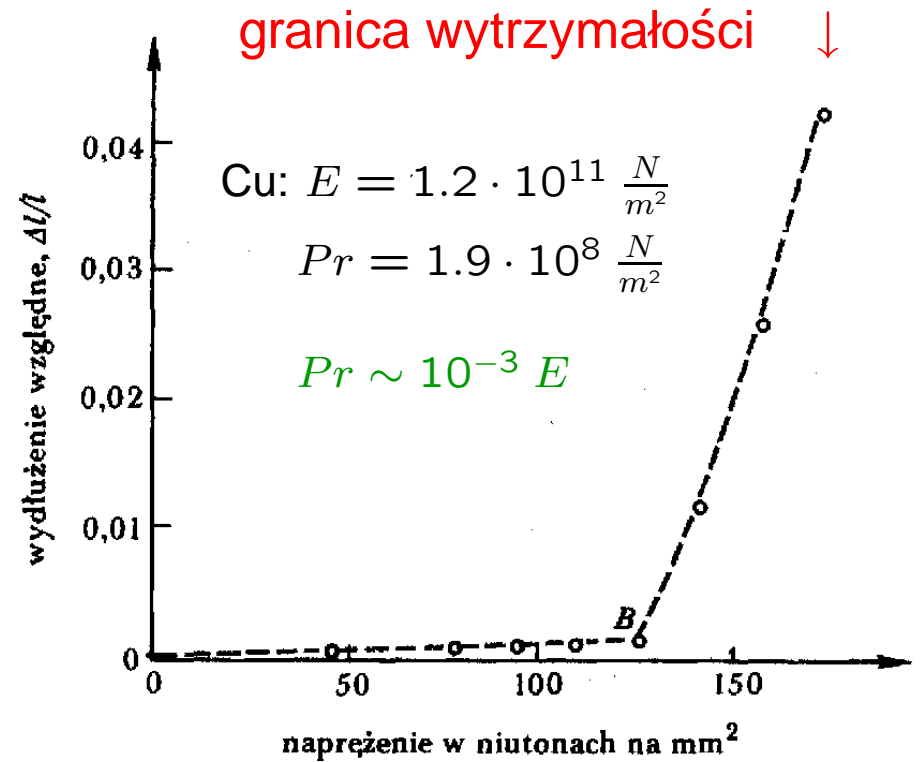


$$F = E S \frac{\Delta L}{L}$$

$E$  - moduł Younga [ $N/m^2$ ]

naprężenie odpowiadające dwukrotnemu wydłużeniu

Prawo Hooke'a jest prawem empirycznym  
Jest słuszne tylko dla małych naprężeń.



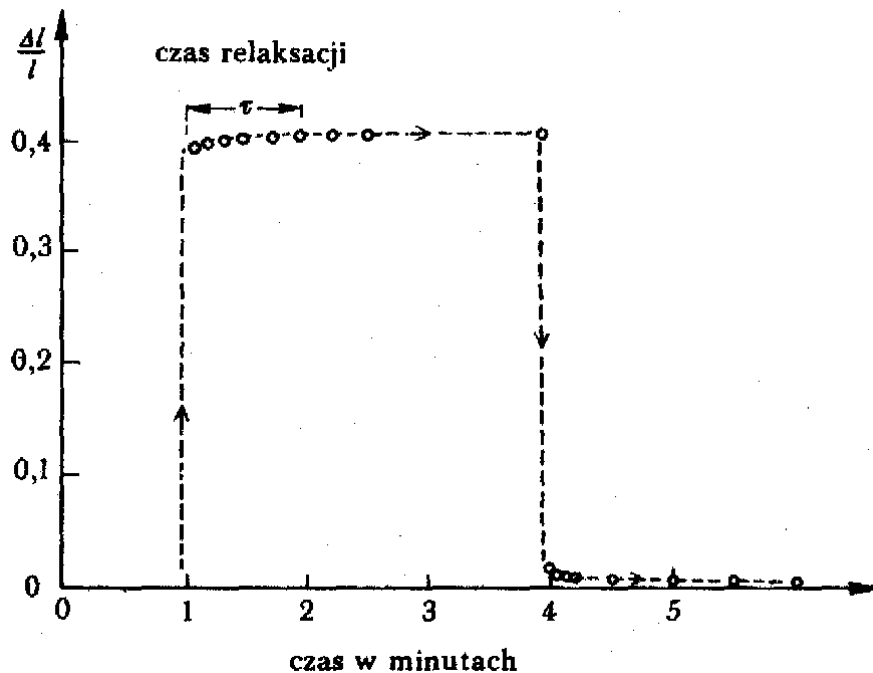
granica proporcjonalności  $\uparrow$  ( $Pr$ )

# Siła sprężysta

## Relaksacja

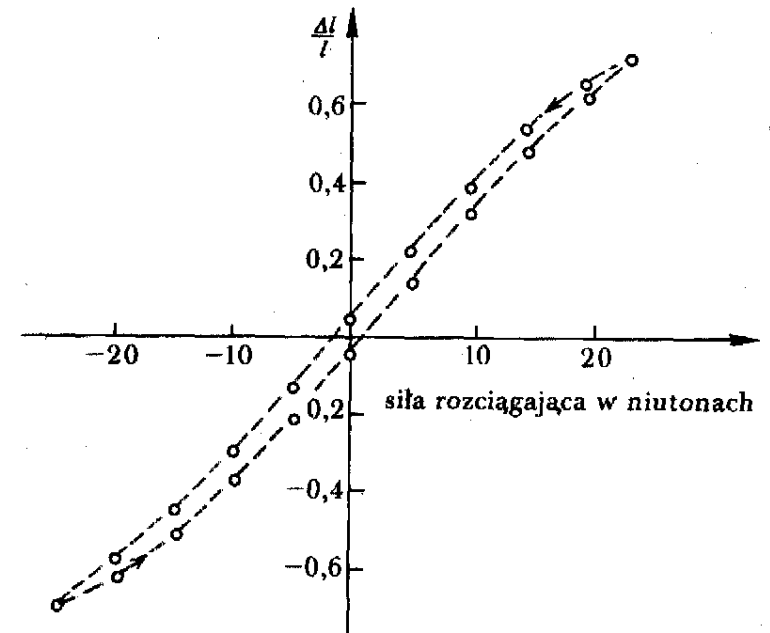
Prawo Hooke'a odnosi się do sytuacji statycznej.

Od momentu przyłożenia siły do osiągnięcia odpowiedniego odkształcenie mija skończony czas - **czas relaksacji**



podobnie gdy siła przestanie działać

## Histereza



Przyłożenie dużej siły, nawet na krótki czas może powodować trwałe odkształcenie

⇒ trzeba przyłożyć siłę przeciwnie skierowaną

# Tarcie

## Tarcie kinetyczne

Siła pojawiająca się między dwoma powierzchniami **poruszającymi się** względem siebie, dociskanymi siłą  $N$ .

Ścisły opis sił tarcia jest bardzo skomplikowany.

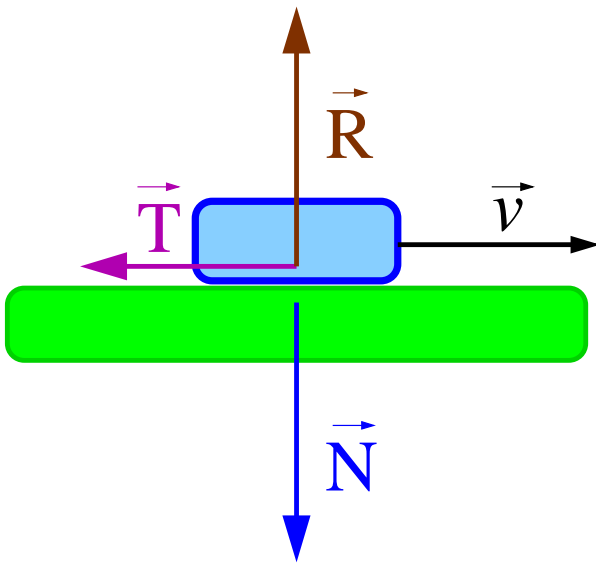
⇒ Prawo empiryczne:

$$\vec{T} = -\mu_k \vec{i}_v N \quad \vec{i}_v = \frac{\vec{v}}{v}$$

Siła tarcia kinetycznego:

- jest proporcjonalna do  $\perp$  siły dociskającej
- nie zależy od powierzchni zetknięcia
- nie zależy od prędkości

Prawo empiryczne ⇒ przybliżone !!!



# Tarcie

## Obraz mikroskopowy

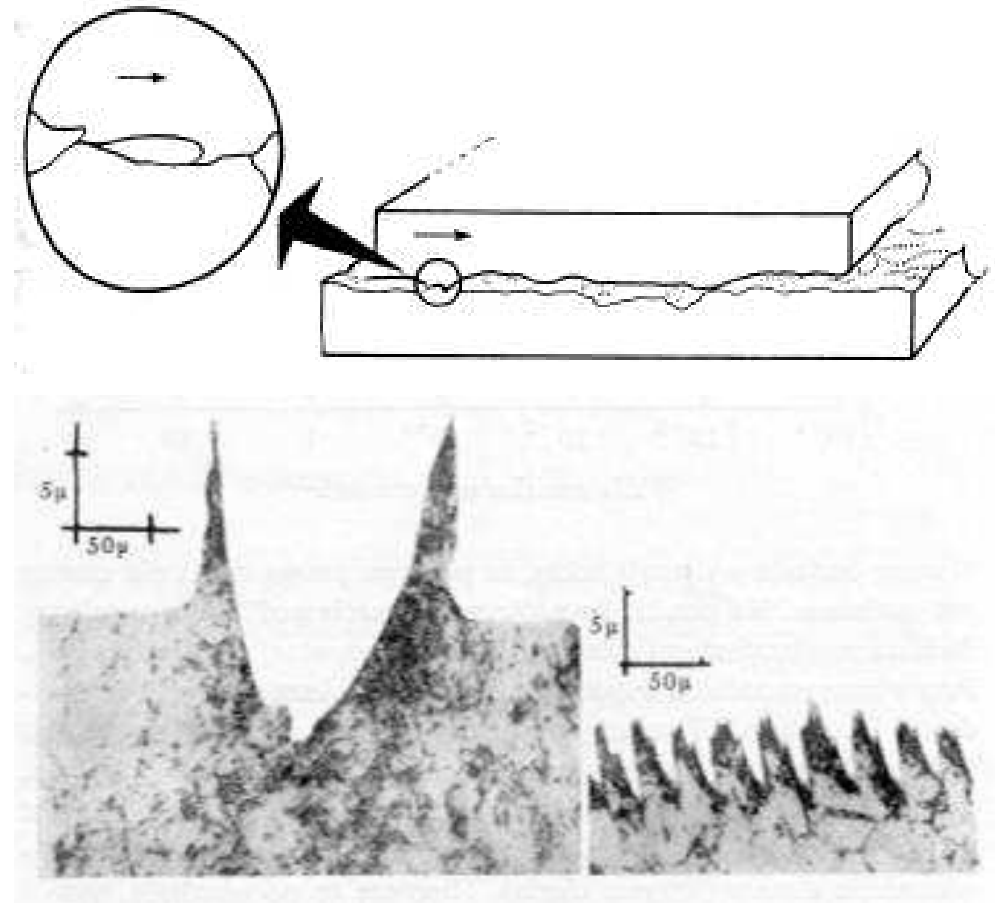
Tarcie wywołane jest przez oddziaływanie elektromagnetyczne cząstek stykających się ciał.

Powierzchnie nigdy nie są idealnie równe

na poziomie mikroskopowym cząstki jednego ciała “blokują drogę” cząstkom drugiego ciała

⇒ muszą zostać “odepchnięte”

wypolerowana miedź ⇒



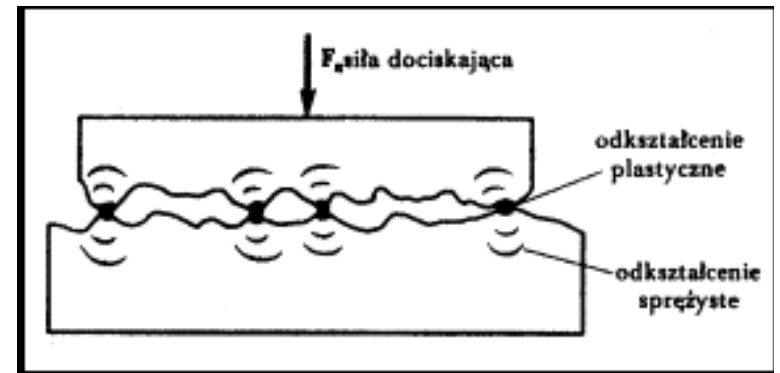
# Tarcie

## Zależność od nacisku

Powierzchnia rzeczywistego (mikroskopowego) styku ciał jest w normalnych warunkach wiele rzędów wielkości mniejsza niż powierzchnia geometryczna:

siła dociskająca	ułamek powierzchni
1 N/cm <sup>2</sup>	0.00001
2.5 N/cm <sup>2</sup>	0.000025
50 N/cm <sup>2</sup>	0.0005
250 N/cm <sup>2</sup>	0.0025

(płytki stalowe)



⇒ efektywna powierzchnia styku proporcjonalna do nacisku

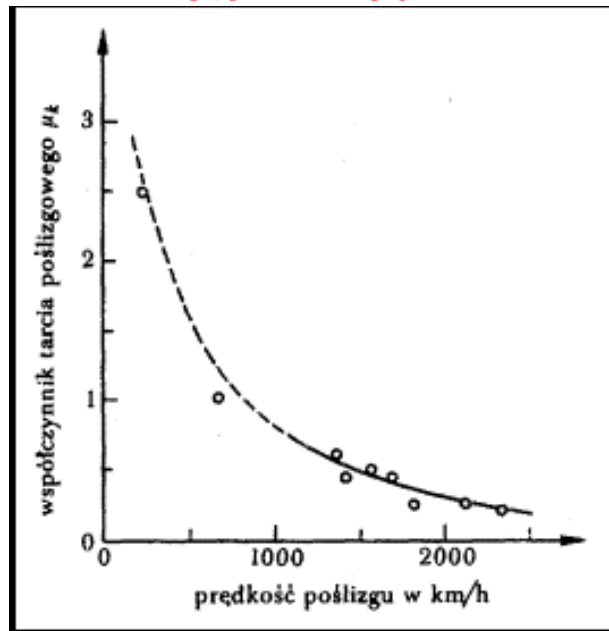
⇒ liczba oddziaływań na poziomie atomowym proporcjonalna do nacisku

# Tarcie

## Odstępstwa od praw empirycznych

Przy dużych prędkościach może się pojawić zależność  $\mu_k$  od prędkości  $v$ :

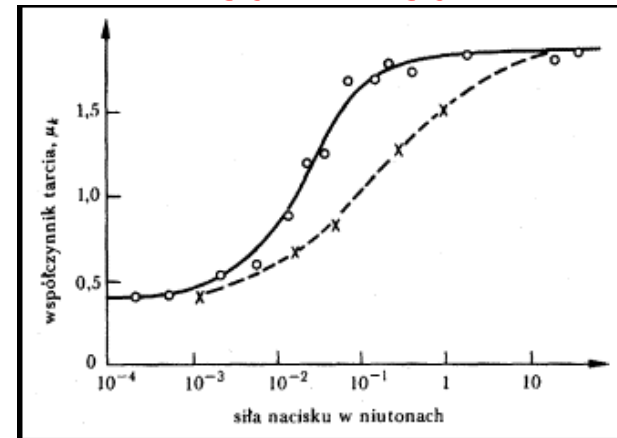
stal i miedź



Przy bardzo dużych prędkościach miedź ulega chwilowemu stopieniu...

Przy dużych siłach dociskających mogą się pojawić odstępstwa od zależności liniowej:

miedź i miedź



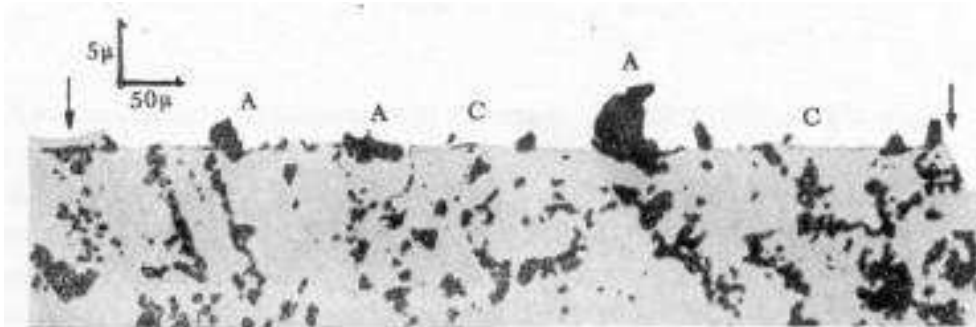
Przy dużym nasisku zniszczeniu ulega warstwa tlenków na powierzchni miedzi...

# Tarcie

## Ścieranie

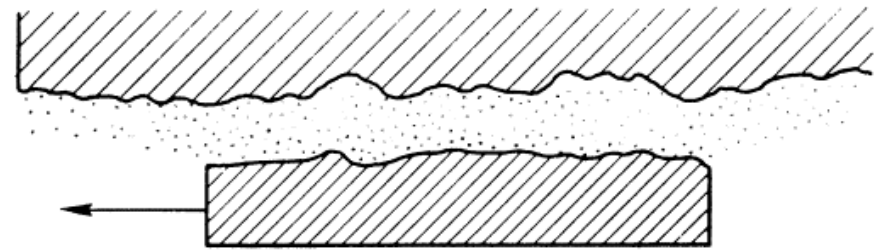
Na poziomie mikroskopowym tarcie prowadzi trwałych zmian w stykających się powierzchniach.

Fragmenty miedzi przyłączone do powierzchni stali:



## Smarowanie

Tarcie zmniejszamy wprowadzając smar między poruszające się powierzchnie.

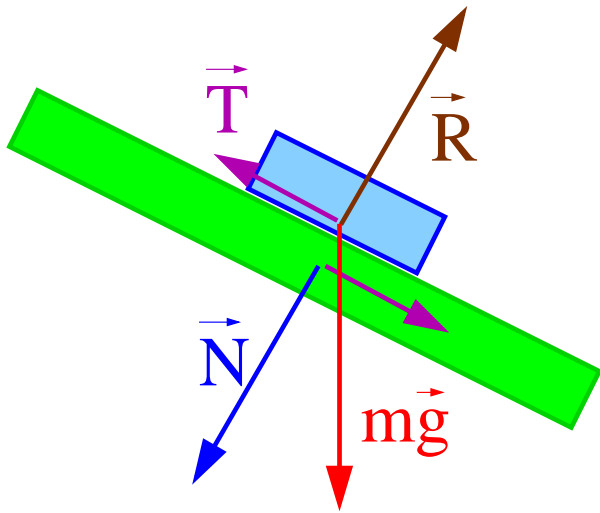


Powierzchnie nie stykają się  $\Rightarrow$  brak tarcia  
 $\Rightarrow$  pojawia się jednak nowa siła oporu  
związana z lepkością



# Tarcie

## Tarcie statyczne



Ciało pozostaje w równowadze dzięki działaniu tarcia statycznego

Siła działająca między dwoma powierzchniami nieruchomymi względem siebie, dociskanymi siłą  $N$ .

Maksymalna siła tarcia statycznego  $T_S^{max}$  jest równa najmniejszej sile  $F$  jaką należy przyłożyć do ciała, aby ruszyć je z miejsca.

Prawo empiryczne:

$$\vec{T}_S^{max} = -\mu_s \vec{i}_F N \quad \vec{i}_F = \frac{\vec{F}}{F}$$

# Tarcie

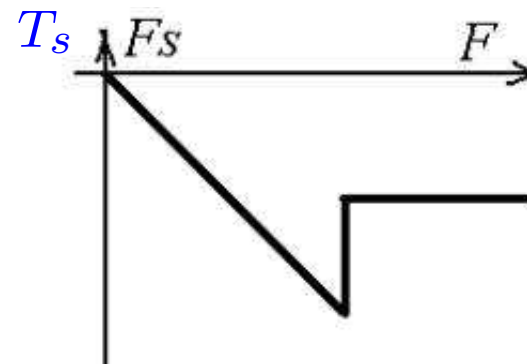
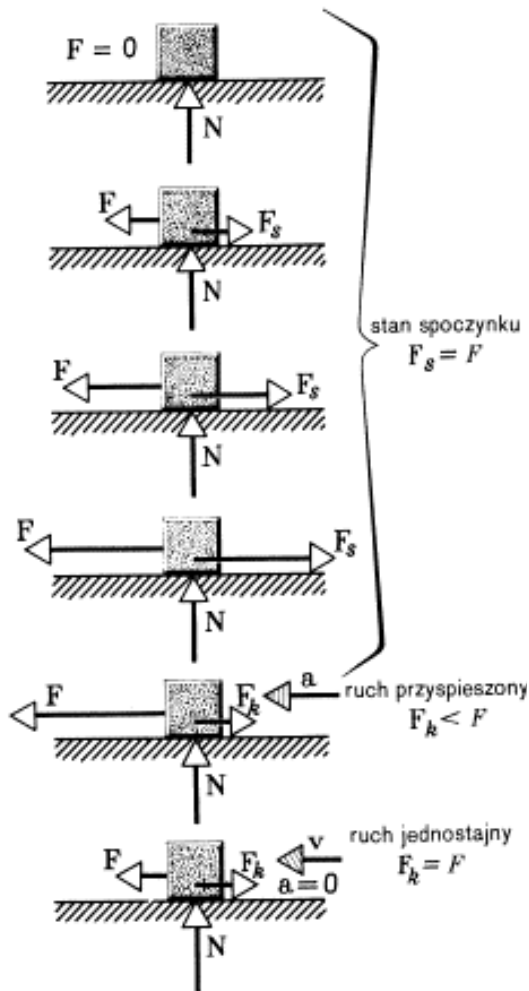
## Tarcie statyczne

Póki przyłożona siła  $\vec{F}$  jest mała, tarcie statyczne utrzymuje ciało w spoczynku:

$$\vec{T}_s = -\vec{F}$$

⇒ siła tarcia rośnie proporcjonalnie do przyłożonej siły.

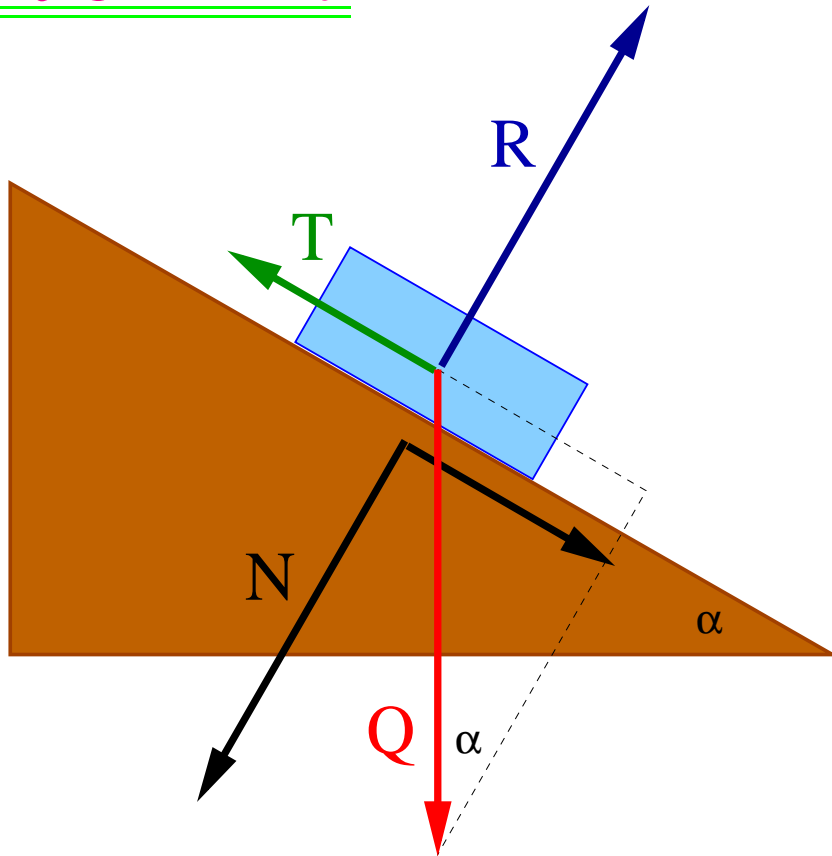
Gdy przyłożona siła przekroczy wartość  $T_s^{max} = \mu_s \cdot N$  ciało zaczyna się poruszać ⇒ tarcie kinetyczne



Tarcie kinetyczne naogół słabsze od spoczynkowego:  $\mu_k < \mu_s$

# Tarcie

## Kąt graniczny



Jest to maksymalny kąt nachylenia równi, przy którym siła tarcia pozwala na utrzymanie go w równowadze. Z warunku równowagi:

$$T = Q \sin \alpha$$

$$N = Q \cos \alpha$$

Z definicji współczynnika tarcia statycznego:

$$T_S^{max} = \mu_S \cdot N$$

Otrzymujemy:

$$Q \sin \alpha_{gr} = \mu_S \cdot Q \cos \alpha_{gr}$$

$$\mu_S = \tan \alpha_{gr}$$

# Tarcie

## Współczynniki tarcia

Przykładowe współczynniki  
dla wybranych materiałów:

materiały	$\mu_s$	$\mu_k$
stal o stal	0,15	0,03 – 0,09
stal o lód	0,027	0,014
drewno o drewno	0,65	0,2 – 0,4
guma o beton suchy	1,0	0,7
guma o beton mokry	0,7	0,5

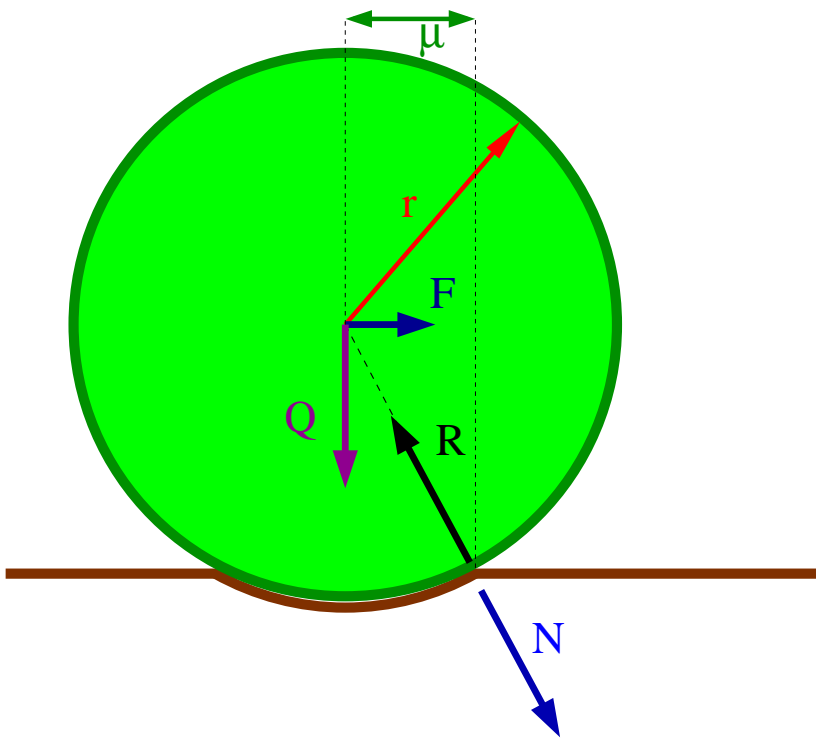
Hamowanie samochodu:

**ważne aby koła nie zaczęły się ślizgać**

- poślizg  $\Rightarrow \mu_k$
- dobry kierowca lub ABS  $\Rightarrow \mu_s$   
zysk  $\sim 40\%$  na drodze hamowania

# Tarcie

## Tarcie toczne



Toczące się ciało odkształca zawsze powierzchnię po której się toczy.

Poza tarciem statycznym i kinetycznym (poślizgowym) mamy **tarcie toczne**:

$$\vec{T}_t = -\mu_t \vec{i}_F \frac{N}{r}$$

Współczynnik tarcia tocznego  $\mu_t$  jest zwykle bardzo mały

Przykładowo:

- drewno + drewno  $\Rightarrow \mu_t = 0,0005 \text{ m}$
- stal hartowana + stal  $\Rightarrow \mu_t = 0,00001 \text{ m}$   
(wymiar długości!)

# Układ inercjalny

## Zasada bezwładności

“Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszają ciała do zmiany tego stanu.” I. Newton

Układ odniesienia w którym spełniona jest zasada bezwładności nazywamy **układem inercjalnym**

Zasada bezwładności jest równoważna z postulatem istnienia układu inercjalnego

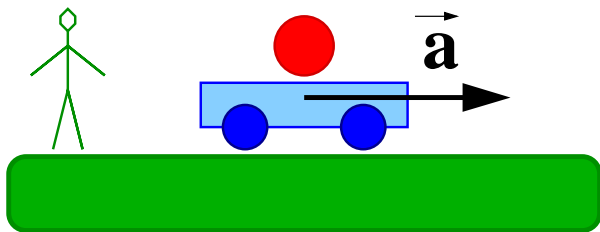
W **układzie inercjalnym** ruch ciała jest jednoznacznie zadany przez działające na nie siły zewnętrzne (**równanie ruchu**) + warunki początkowe

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R$$
$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \quad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

# Układy nieinercyjne

## Opis ruchu

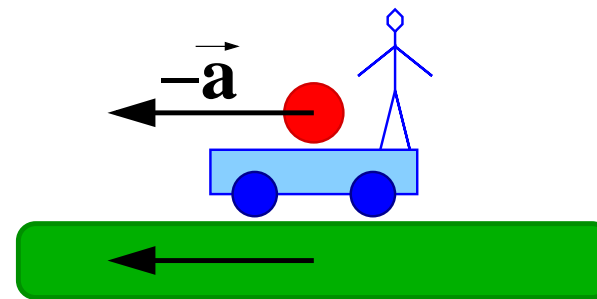
Wózek porusza się z przyspieszeniem  $\vec{a}$  względem stołu



Z punktu widzenia obserwatora związanego ze stołem kulka pozostaje w spoczynku.

Wynika to z **zasady bezwładności** - siły działające na kulkę **równoważą się**

$$\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$$



Z punktu widzenia obserwatora związanego z wózkiem kulka porusza się z przyspieszeniem  $-\vec{a}$

$\Rightarrow$  prawa Newtona nie są spełnione !?

Oba układy nie mogą być inercyjne.

Prawa ruchu w układzie nieinercyjnym wymagają modyfikacji

# Układy nieinercyjne

## Prawa ruchu

Przyjmijmy, że układ  $O'$  porusza się względem układu inercyjnego  $O$ .

Osie obu układów pozostają cały czas równoległe (brak obrotów)

Niech  $\vec{r}_o(t)$  opisuje położenie układu  $O'$  w  $O$ . Przyspieszenie:  $\vec{a}_o = \frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2}$

Ruch punktu materialnego mierzony w układach  $O$  i  $O'$ :

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_o$$

Przyspieszenie punktu materialnego mierzone w układach  $O$  i  $O'$ :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_o$$

Prawa ruchu w układzie inercyjnym  $O$ :

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R$$

⇒ w układzie nieinercyjnym  $O'$ :

$$m\vec{a}' = \vec{F}(\vec{r}', \vec{v}', t) + \vec{F}_R - m\vec{a}_o$$

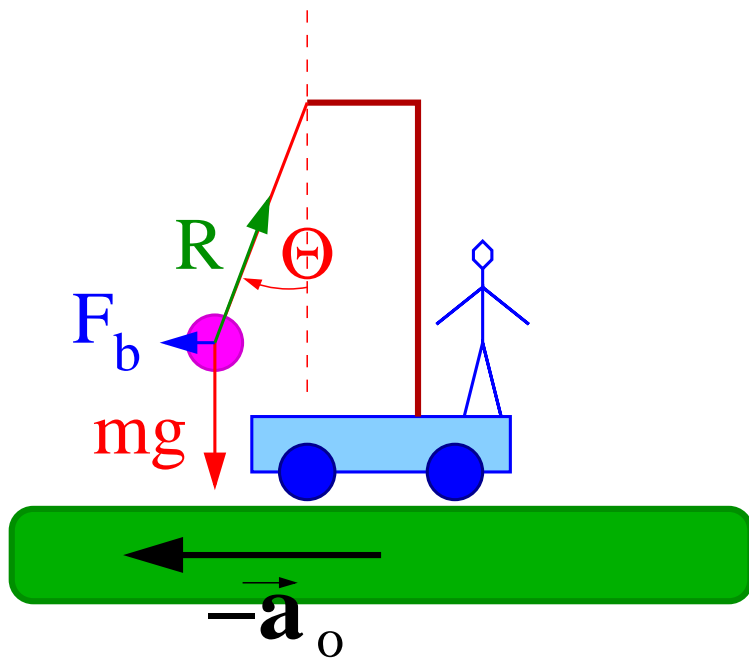
⇒ w układzie nieinercyjnym musimy wprowadzić siłę bezwładności  $\vec{F}_b = -m\vec{a}_o$



# Układy nieinercyjne

## Prawa ruchu

Wahadło w układzie nieinercyjnym poruszającym się z przyspieszeniem  $\vec{a}$  względem układu inercyjnego



Oprócz siły ciężkości  $m\vec{g}$  i reakcji  $\vec{R}$  musimy uwzględnić pozorną siłę bezwładności  $\vec{F}_b = -m\vec{a}_0$

Opis ruchu można uprościć wprowadzając efektywne przyspieszenie ziemskie:

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_0$$

siły bezwładności  $\equiv$  siły grawitacji

$\Rightarrow$  odchylenie położenia równowagi:

$$\tan \theta = \frac{a_0}{g}$$

Przyspieszenie drgań:

$$\omega'^2 = \frac{g'}{l} = \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l}$$

# Układy nieinercjalne

## Prawa ruchu

Jeśli  $a_o \ll g \Rightarrow$  w układzie poruszającym się z przyspieszeniem  $\vec{a}_o \perp \vec{g}$  obserwujemy **pozorną** zmianę **kierunku** działania siły ciężkości:

Ciecz w naczyniu:

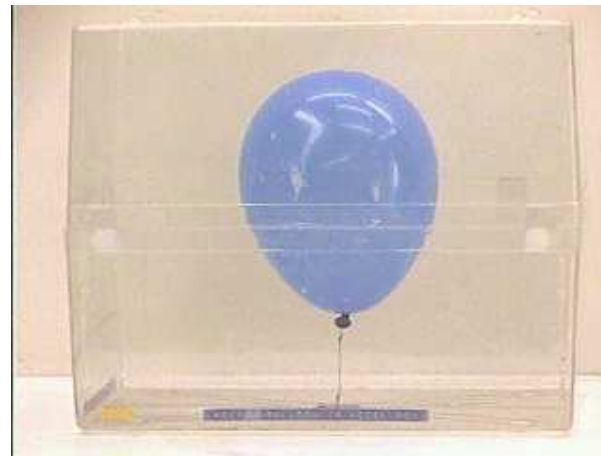
Balon z helem:

$$\vec{a} = 0$$

$$\vec{a} \neq 0$$

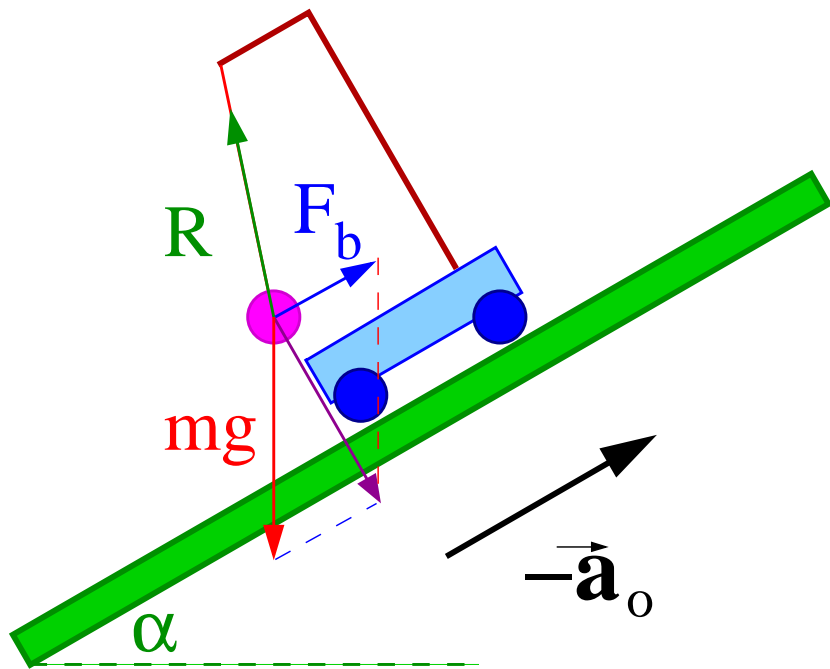
$$\vec{a} = 0$$

$$\vec{a} \neq 0$$



# Układy nieinercjalne

## Równia



siły działające w układzie wózka

Wózek zsuwa się bez tarcia po równi pochyłej. Zaniedbując ruch obrotowy kół przyspieszenie wózka:

$$a_0 = g \sin \alpha$$

W układzie związanym z wózkiem działająca na wahadło siła bezwładności jest równa co do wartości (lecz przeciwnie skierowana) równoległej składowej ciężaru.

Na wahadło działa pozorna siła ciężkości prostopadła do powierzchni równi.

$$g' = g_{\perp} = g \cos \alpha < g$$

⇒ spowolnienie drgań

# Układy nieinercjalne



## Spadek swobodny

W układzie odniesienia poruszającym się z przyspieszeniem  $\vec{a}_o \parallel \vec{g}$  obserwujemy **pozorną** zmianę wartości przyspieszenie grawitacyjnego:

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_o$$



W układzie związanym z ciałem spadającym swobodnie  $\vec{a}_o = \vec{g}$

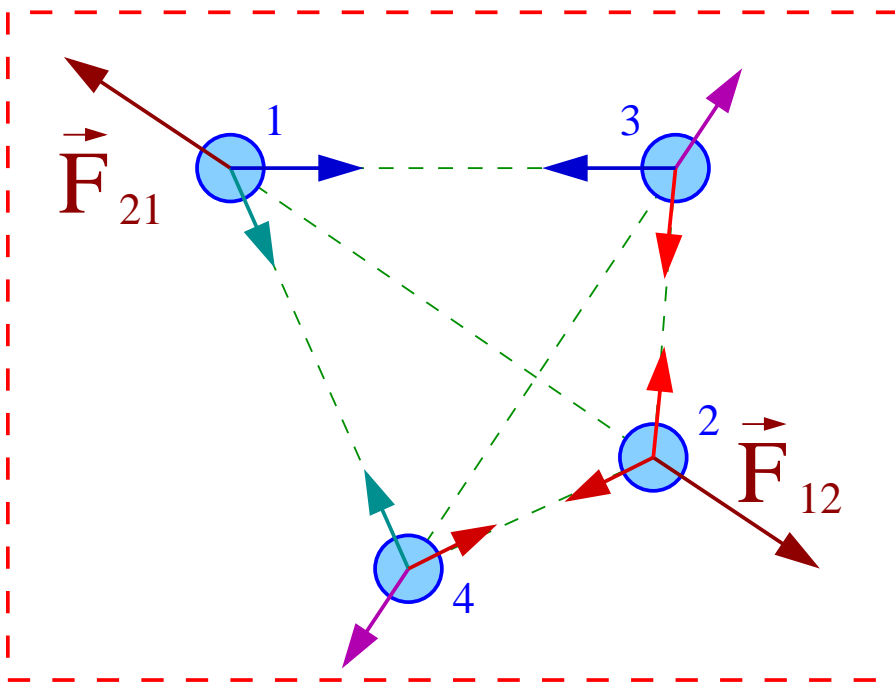
$$\vec{g}' = 0$$

$\Rightarrow$  stan nieważkości

# Zasada zachowania pędu

## Układ izolowany

Każde ciało może w dowolny sposób oddziaływać z innymi elementami układu.



Brak oddziaływań ze światem zewnętrznym

## III zasada dynamiki

Siły z którymi działają na siebie ciała  $i$  i  $j$ :

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Suma sił działających na ciało  $i$ :

$$\vec{F}_i^\Sigma = \sum_j \vec{F}_{ji}$$

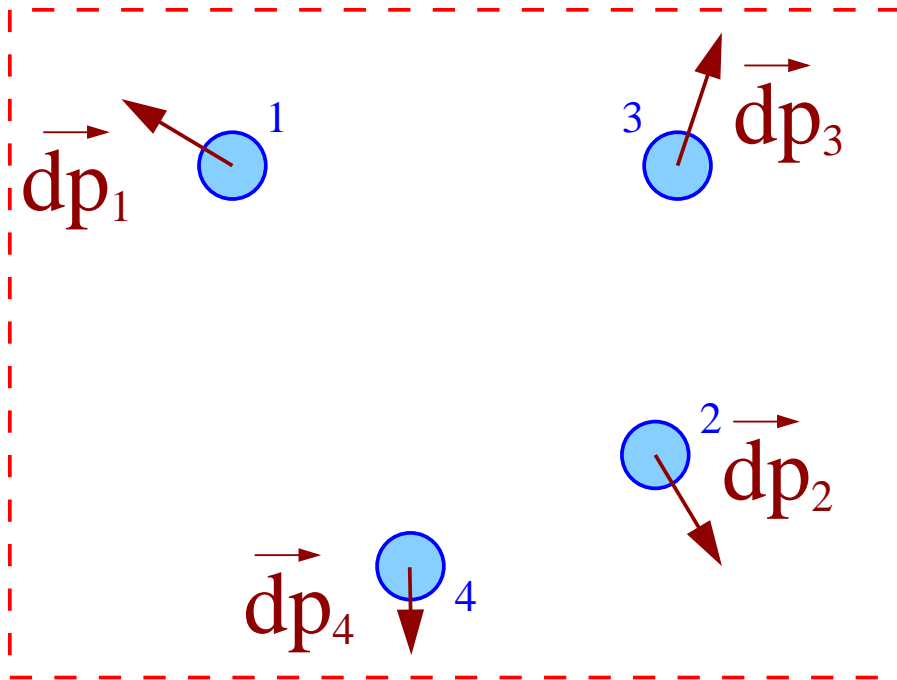
Suma sił działających na układ:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{tot} &= \sum_i \vec{F}_i^\Sigma = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ji} \\ &= \sum_j \sum_i -\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{tot} \\ \Rightarrow \vec{F}_{tot} &= 0\end{aligned}$$

# Zasada zachowania pędu

## II zasada dynamiki

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^\Sigma$$



izolowany układ inercjalny

## Pęd układu

Prawo ruchu układu:

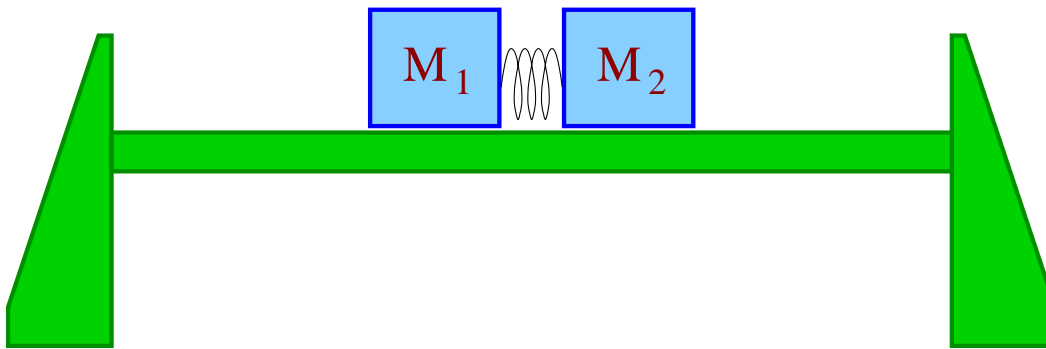
$$\begin{aligned}\vec{F}_{tot} &= \sum_i \vec{F}_i^\Sigma = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i\end{aligned}$$

$$\vec{F}_{tot} = 0 \Rightarrow \sum_i \vec{p}_i = \text{const}$$

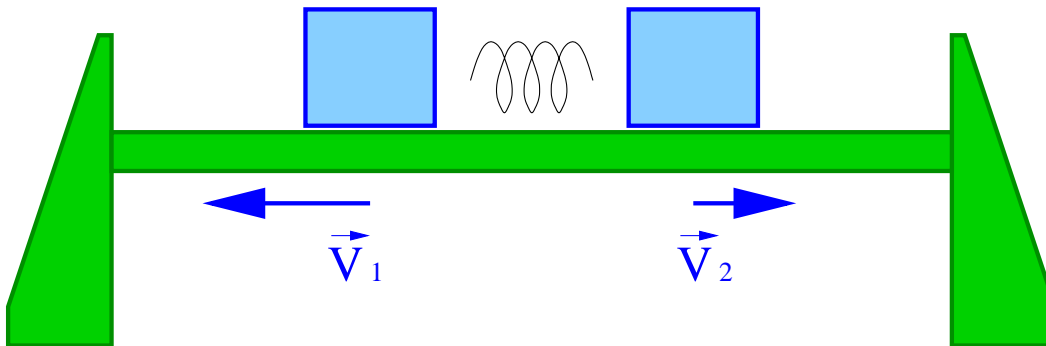
Dla dowolnego układu **izolowanego**, **suma pędów** wszystkich elementów układu pozostaje **stała**.

# Zasada zachowania pędu

## Oddziaływanie dwóch ciał



$$M_1 < M_2$$



Układ “rozpada się” pod wpływem **sił wewnętrznych**.

Jeśli na początku wszystkie obiekty spoczywają

$$\sum_i \vec{p}_i = 0$$

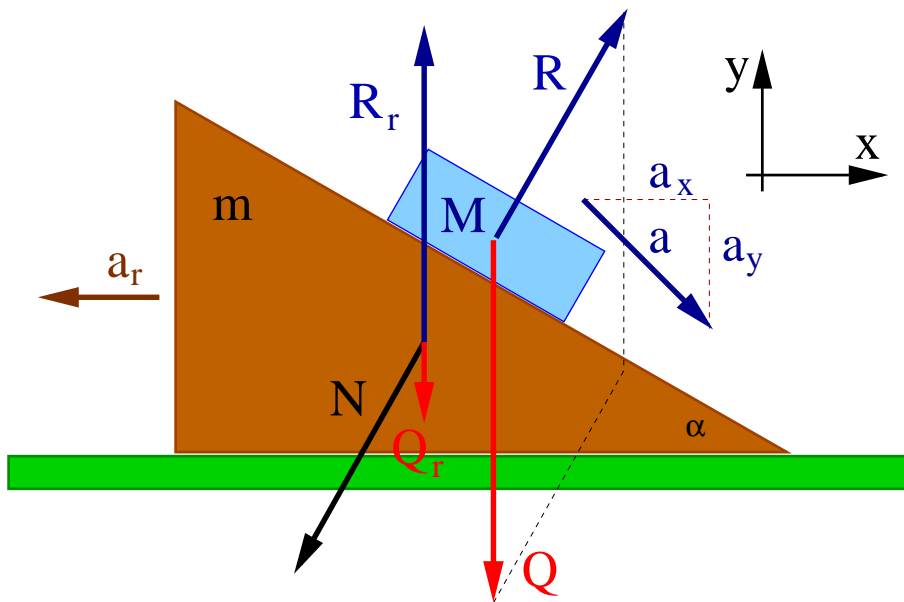
to i po “rozpadzie” **suma pędów** musi być **równa 0**.

Dwa ciała:  $(v_i \ll c)$

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= 0 \\ \Rightarrow \vec{v}_2 &= -\frac{m_1}{m_2} \cdot \vec{v}_1 \\ \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} &= \frac{m_1}{m_2} \end{aligned}$$

# Zasada zachowania pędu

## Oddziaływanie dwóch ciał



Równia rusza się bez tarcia po poziomym stole.  
Klocek zsuwa się bez tarcia po równi.

Na układ działają siły zewnętrzne:

- siły ciężkości  $Q$  i  $Q_r$
- oraz siła reakcji stołu  $R_r$

Ale wiemy, że siły te działają wzdłuż kierunku pionu (prostopadle do powierzchni stołu).

Siły zewnętrzne mogą zmieniać składową pionową pędu układu równia-klocek.

**Ale składowa pozioma będzie wciąż zachowana!**

Uwzględniając, że prędkość i przyspieszenie równi są skierowane przeciwnie do osi X:

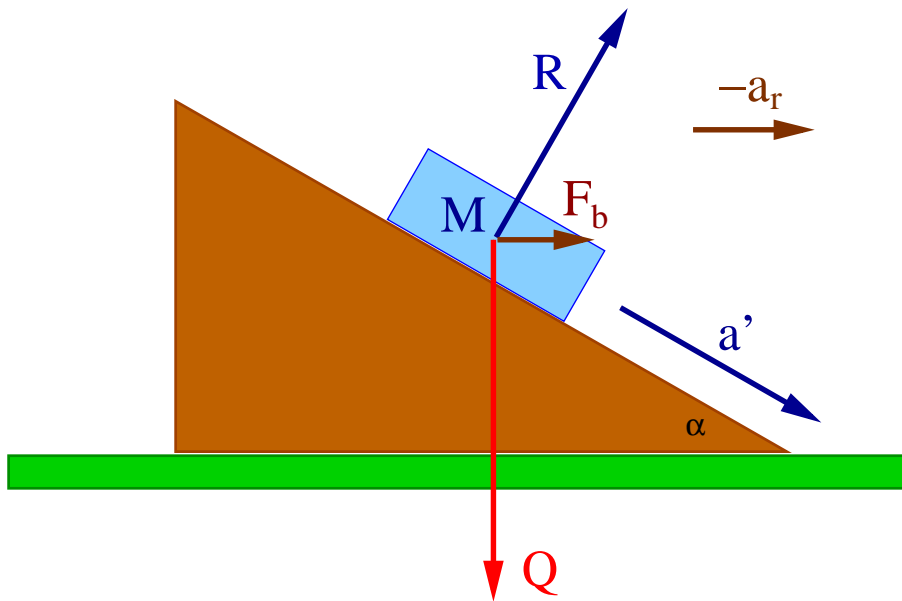
$$-mV_r + MV_x = const \quad \Leftrightarrow \quad ma_r = Ma_x$$

**Kierunek przyspieszenia klocka nie jest równoległy do powierzchni równi!**



# Zasada zachowania pędu

## Oddziaływanie dwóch ciał



Zagadnienie daje się łatwiej rozwiązać, gdy przejdziemy do układu **nieinercyjnego** związanego z równią. W układzie tym na klocek działa dodatkowo siła bezwładności

$$\vec{F}_b = -\vec{a}_r M$$

Przyspieszenie klocka (wzdłuż równi!):

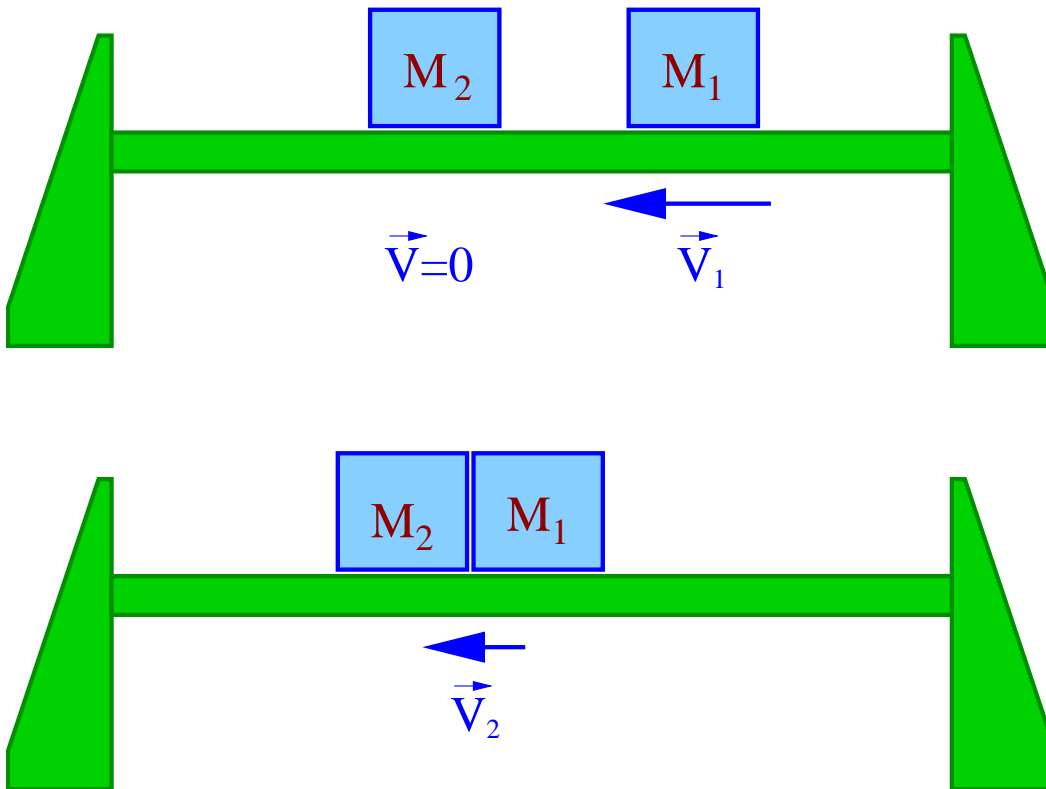
$$a' = g \sin \alpha + a_r \cos \alpha$$

Możemy teraz wyznaczyć składową X tego przyspieszenia w układzie stołu, i porównać z wartością oczekiwaną z zasady zachowania pędu:

$$\begin{cases} a_x = a' \cos \alpha - a_r = g \sin \alpha \cos \alpha - a_r \sin^2 \alpha \\ M a_x = m a_r \end{cases} \Rightarrow a_r = g \frac{M \sin \alpha \cos \alpha}{m + M \sin^2 \alpha}$$

# Zasada zachowania pędu

## Oddziaływanie dwóch ciał



Zderzenie całkowicie niesprężyste  
(po zderzeniu ciała trwale połączone)

Pęd początkowy:  $\vec{p}_i = m_1 \vec{v}_1$

Pęd końcowy:  $\vec{p}_f = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_2$

Zasada zachowania pędu:

$$\begin{aligned} \vec{p}_i &= \vec{p}_f \\ \Rightarrow \vec{v}_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_1 \end{aligned}$$

# Zasada zachowania momentu pędu

## Siły centralne

Jeśli układ ciał (lub pojedyncze ciało) działa jakaś siła zewnętrzna  $\vec{F}_{tot} \neq 0$  to pęd układu musi się zmieniać:  $\sum \vec{p}_i \neq \text{const.}$

Siły które działają na układ często są

**siłami centralnymi** - działają w kierunku ustalonego źródła siły.

Jeśli położenie źródła przyjmiemy za środek układu  $\Rightarrow \vec{F}_{tot} = F(r, \dots) \cdot \vec{i}_r$

Przykład:

- siła grawitacyjna  $F(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}$
- siła kulombowska  $F(r) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
- siła sprężysta  $F(r) = -k \cdot r$

Czy można coś “uratować” z zasady zachowania pędu ?...

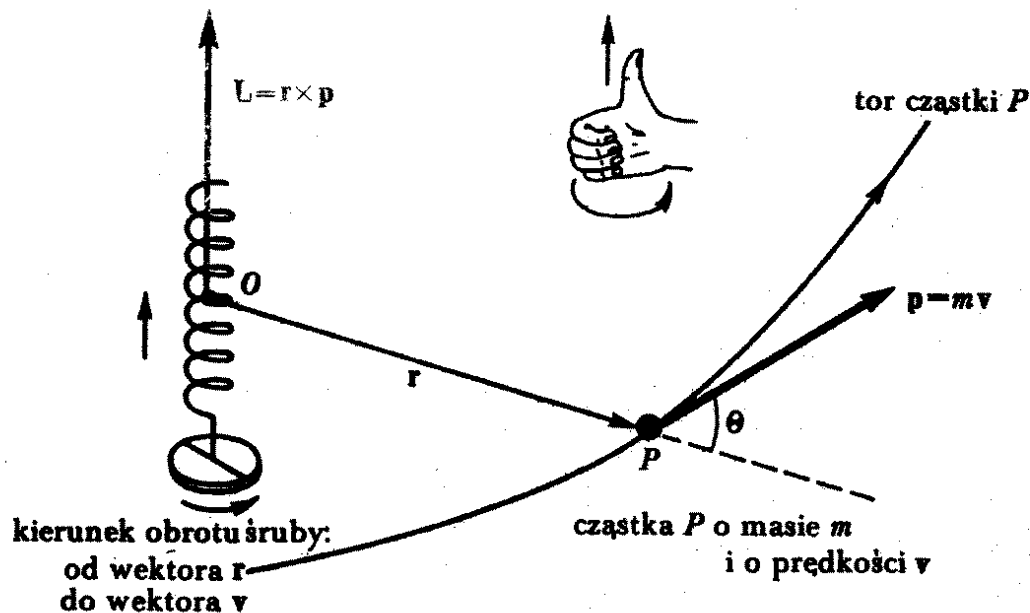
# Zasada zachowania momentu pędu

## Moment pędu

Zdefiniujemy dla punktu materialnego:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

⇐ moment pędu **względem O**  
zależy od wyboru początku układu



Dla  $v \ll c$

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$$

$$L = m r v \sin \theta$$

# Zasada zachowania momentu pędu

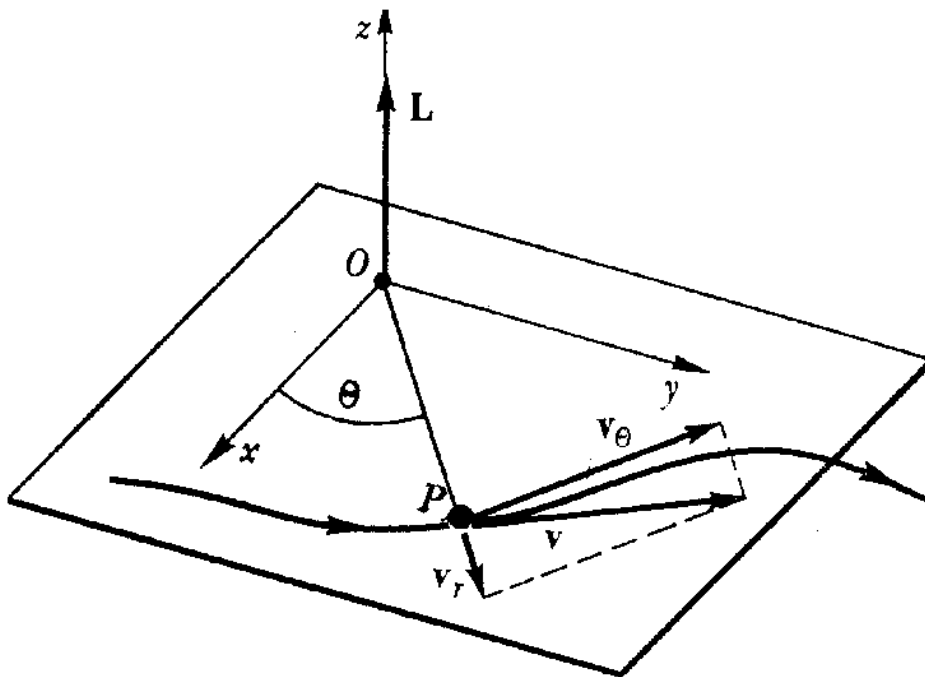
## Moment pędu

Ruch po płaszczyźnie:

$$\vec{L} = m \vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta)$$

$$L = m r v_\theta$$

$$\Rightarrow L = m r^2 \frac{d\theta}{dt} = m r^2 \omega$$



Przypadek szczególny:  
ruch po okręgu -  $r = \text{const}$

Moment bezwładności

$$I = m r^2$$

$\Rightarrow$  moment pędu możemy przedstawić  
w ogólnej postaci

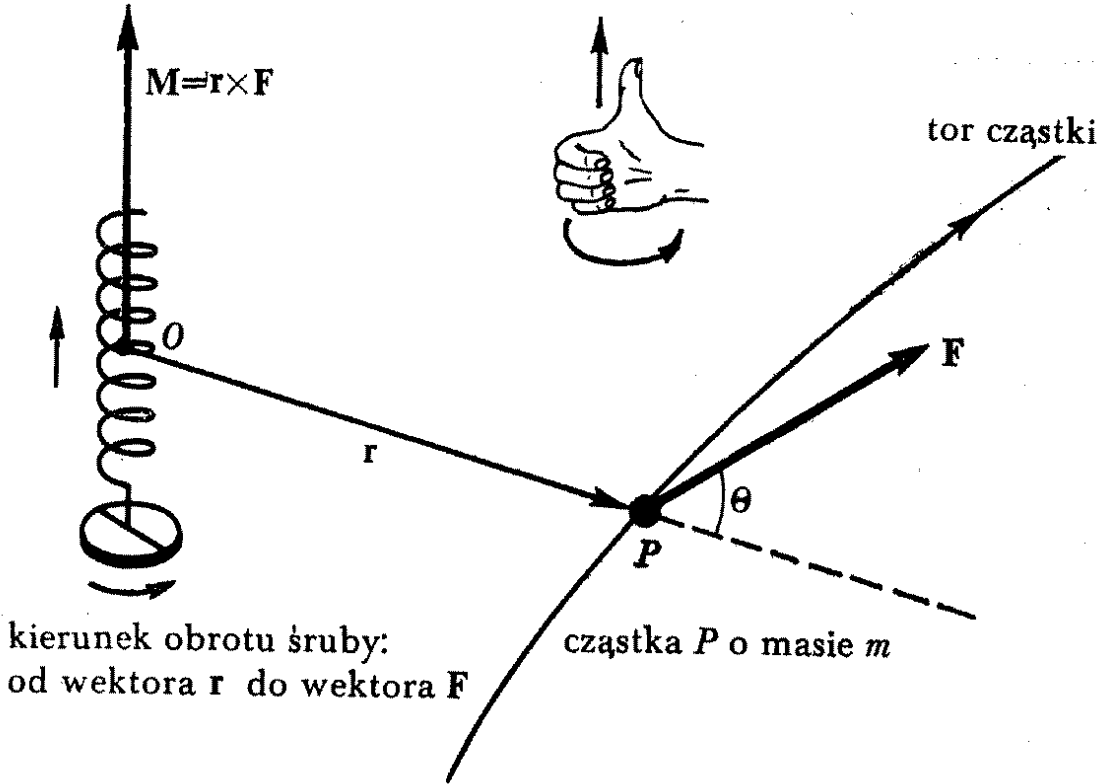
$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

# Zasada zachowania momentu pędu

## Moment siły

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

← moment siły **względem O**



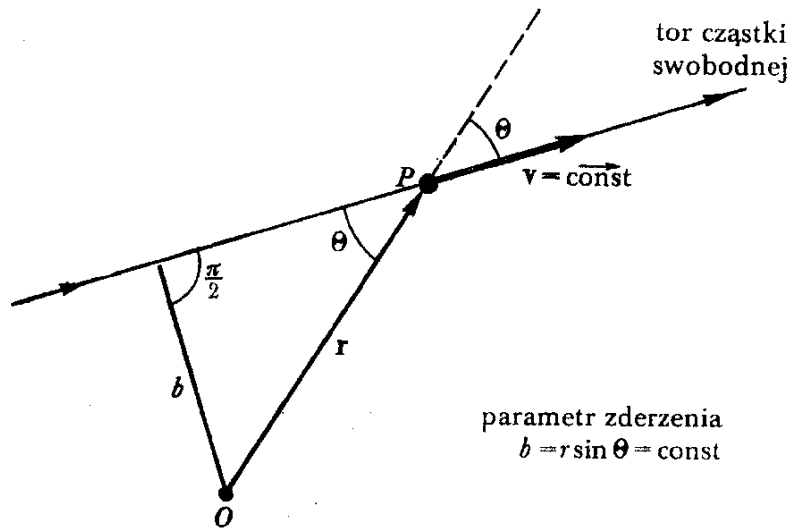
Równanie ruchu

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} \\ &= 0 + \vec{M} \end{aligned}$$

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

# Zasada zachowania momentu pędu

## Cząstka swobodna



Moment pędu względem **dowolnego punktu 0** pozostaje stały:

$$L = m v r \sin \theta = m v b = \text{const}$$

**b** - parametr zderzenia  
odległość najmniejszego zbliżenia do O

## Siła centralna

Moment siły: (względem źródła)

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \vec{r} \times \vec{i}_r \cdot F(r, \dots) = 0\end{aligned}$$

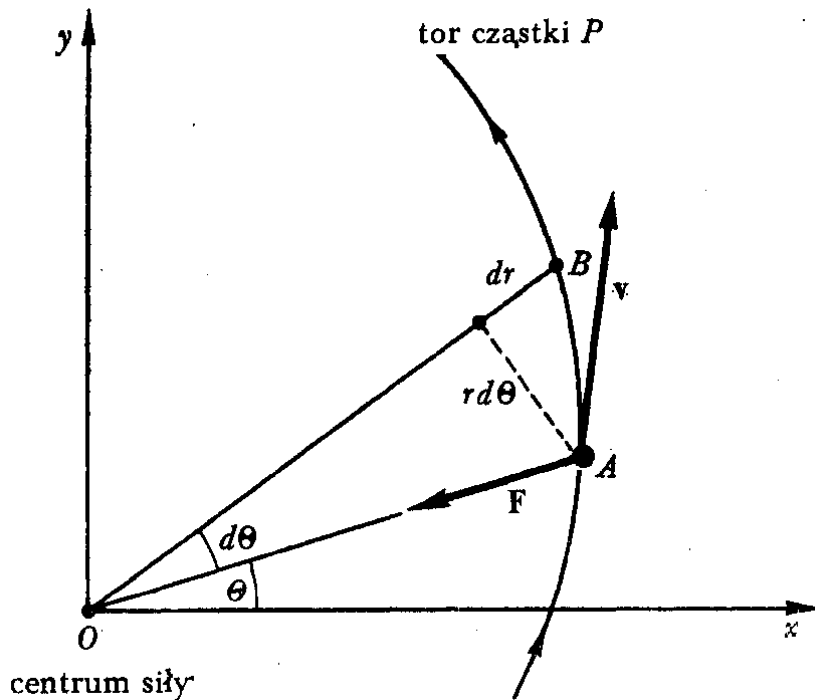
$$\vec{L} = \text{const}$$

Moment pędu, liczony **względem źródła** siły centralnej pozostaje stały.

# Zasada zachowania momentu pędu

## Prędkość polowa

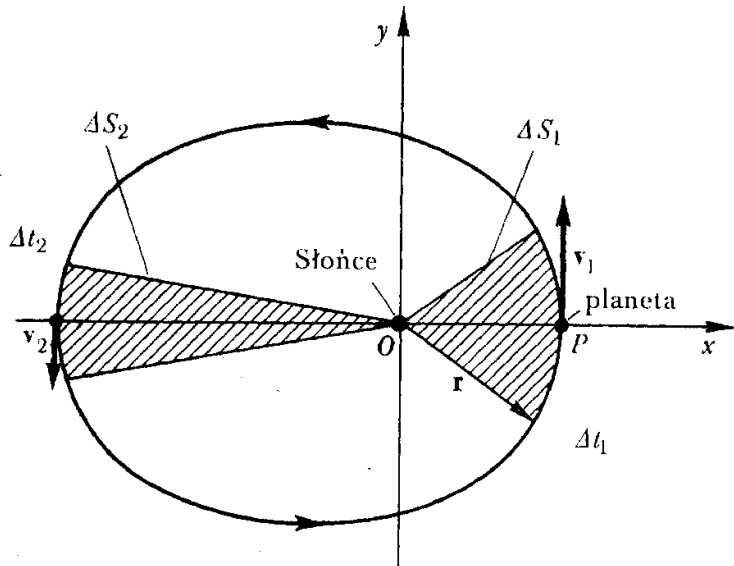
Pole jakie wektor wodzący punktu zakreśla w jednostce czasu:  $\frac{dS}{dt}$



$$dS_{OAB} = \frac{1}{2} r dr = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt$$

## II prawo Keplera

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{L}{2m} = \text{const}$$

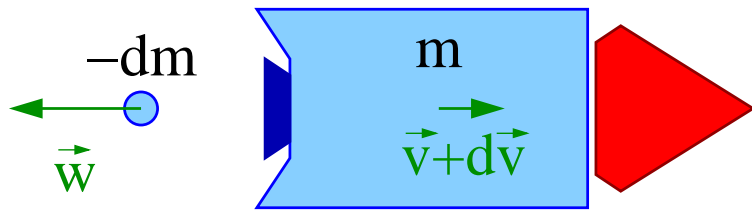


W ruchu pod działaniem sił centralnych prędkość polowa jest stała.



# Ruch ciała o zmiennej masie

Rozważmy ruch ciała o zmiennej masie. W ogólnym przypadku:  $m = m(\vec{r}, \vec{v}, t)$



Od ciała o masie  $m - dm$  poruszającego się z prędkością  $\vec{v}$  odłącza się element  $-dm > 0$  poruszający się z prędkością  $\vec{w}$  ( $dm < 0$  bo masa ciała maleje)

Z zasady zachowania pędu:

$$\begin{aligned} (m - dm) \vec{v} &= m (\vec{v} + d\vec{v}) - dm \vec{w} \\ \Rightarrow d\vec{p} = m d\vec{v} &= (m - dm) \vec{v} - m \vec{v} + dm \vec{w} \\ &= dm (\vec{w} - \vec{v}) \equiv dm \vec{v}_{odrz} \end{aligned}$$

Siła odrzutu (siła ciągu rakiety):

$$\vec{F}_{odrz} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v}_{odrz} \quad \frac{dm}{dt} < 0$$

# Ruch ciał o zmiennej masie

## Równanie ruchu

Ruch ciała pod wpływem siły odrzutu:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{zewn} + \frac{dm}{dt} \vec{v}_{odrz}$$

Zaniedbując wpływ sił zewnętrznych  
(np. pola grawitacyjnego):

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{dm}{dt} \vec{v}_{odrz} \\ m \frac{d\vec{v}}{dm} \cdot \frac{dm}{dt} &= \frac{dm}{dt} \vec{v}_{odrz} \\ m \frac{d\vec{v}}{dm} &= \vec{v}_{odrz} \end{aligned}$$

Całkując stronami:

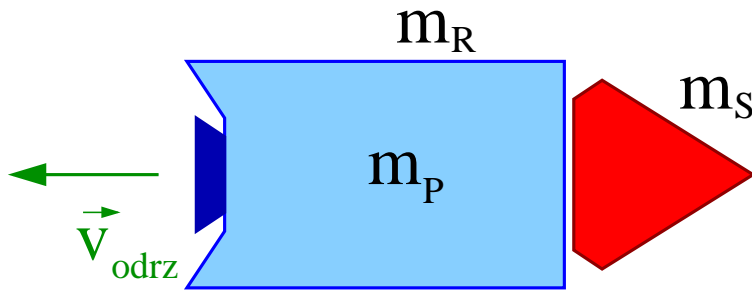
$$\begin{aligned} \int_{v_0}^{v_k} \frac{d\vec{v}}{\vec{v}_{odrz}} &= \int_{m_0}^{m_k} \frac{dm}{m} \\ \Rightarrow \vec{v}_k &= \vec{v}_0 + \vec{v}_{odrz} \cdot \ln \left( \frac{m_k}{m_0} \right) \end{aligned}$$

wzór Ciotkowskiego

# Ruch ciał o zmiennej masie

## Rakieta jednostopniowa

Rakieta o masie  $m_R$  ma wynieść satelitę o masie  $m_S$ , zużywając paliwo o masie  $m_P$ :



Aby uzyskać II prędkość kosmiczną  $v_k \approx 11 \text{ km/s}$  (np. lot na Księżyc) przy silniku raketowym o  $v_o = 3 \text{ km/s}$

Możliwa do uzyskania prędkość końcowa:

$$v_k = v_{odrz} \cdot \ln \left( \frac{m_S + m_R + m_P}{m_S + m_R} \right) \\ \approx v_{odrz} \cdot \ln(1 + f)$$

gdzie:  $f = \frac{m_P}{m_R}$        $m_S \ll m_R$

stosunek masy paliwa do masy rakiety

$$f = \exp \left( \frac{v_k}{v_o} \right) - 1 \approx 38$$

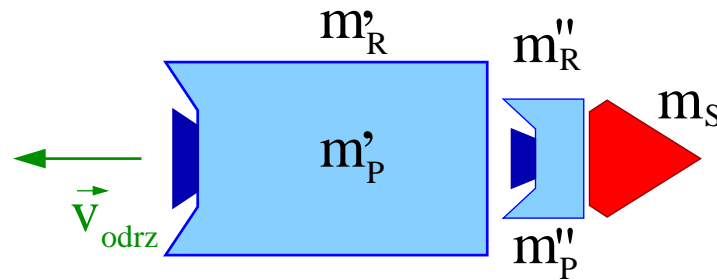
Teoretycznie możliwe,  
praktycznie niewykonalne (?)...  
i nieopłacalne !...

# Ruch ciał o zmiennej masie

## Rakieta dwustopniowa

Raketę dzielimy na dwa człony o masach  $m'_R$  i  $m''_R$ ,  
w których znajduje się paliwo o masie  $m'_P$  i  $m''_P$ :

$$\begin{aligned} m'_R + m''_R &= m_R \\ m'_P + m''_P &= m_P \end{aligned}$$



Prędkość końcowa:

$$v_k = v_{odrz} \cdot \left[ \ln \left( \frac{m_S + m_R + m_P}{m_S + m_R + m''_P} \right) + \ln \left( \frac{m_S + m''_R + m''_P}{m_S + m''_R} \right) \right]$$

W przybliżeniu  $m_S \ll m''_R \ll m'_R$ :  $v_k \approx v_{odrz} \cdot 2 \ln(1 + f)$

Aby uzyskać II prędkość kosmiczną  $v_k \approx 11 \text{ km/s}$  przy  $v_o = 3 \text{ km/s}$ :

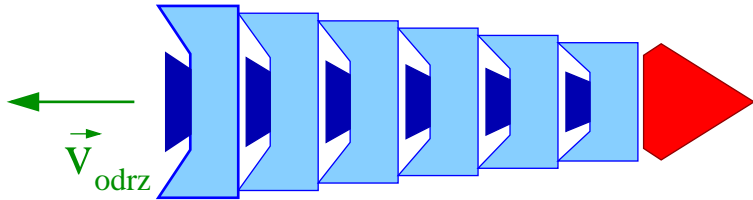
$$f = \exp \left( \frac{v_k}{2 v_o} \right) - 1 \approx 5.3$$

Dla  $f \approx 10$  (dla obu członów) można wystrzelić w kosmos  $m_S \approx 0.6\% (m_R + m_P)$   
przy optymalnym wyborze  $m''_R \approx 7\% m_R$

# Ruch ciał o zmiennej masie

## Rakieta wielostopniowa

Rakieta składa się z wielu członów.  
W każdym z nich stosunek masy paliwa do “obudowy” wynosi  $f$



Aby uzyskać II prędkość kosmiczną dla  $m_S \approx 100 \text{ kg}$  przy rakiemie o  $f = 10$ :

$$m_R = \frac{m_S}{1+f} \left[ \exp \left( \frac{v_k (1+f)}{v_o f} \right) - 1 \right]$$

W granicy wielu bardzo małych członów:

$$m d\vec{v} = dm \vec{v}_{odrz} \cdot \frac{f}{f+1}$$

$$m_R \approx 500 \text{ kg}$$

$$m_P \approx 5000 \text{ kg}$$

Co sprowadza się do:

Przy rakiemie jednoczłonowej, przy tych samych  $m_S$  i  $m_R$  potrzebaby 228'000 kg paliwa !!!

$$v_k = v_{odrz} \cdot \frac{f}{f+1} \cdot \ln \left( 1 + \frac{m_R}{m_S} (1+f) \right)$$

Dla rakiety dwuczłonowej:  
 $m_R \approx 1600 \text{ kg}$ ,  $m_P \approx 16'000 \text{ kg}$



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt **Fizyka wobec wyzwań XXI w.**  
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej  
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego